ENSEIGNEMENT

Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral

Clément Kesselmark & Laurent Moonens[1]

Étant donnée une fonction réelle F de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$, la formule de Newton-Leibniz :

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a),$$

permet de calculer l'intégrale (de Riemann) de F' sur $[a, b]$ à partir des valeurs de F en a et b. Lorsque l'on tâche d'étendre la formule ci-dessus au cas d'une fonction F supposée simplement *dérivable* sur $[a, b]$, on rencontre un premier obstacle à cette extension dans l'existence de dérivées non-bornées, et donc non intégrables au sens de Riemann (voir l'exemple 1.13). Du reste, les travaux de V. Volterra ont montré que l'intégrale de Riemann était même impuissante à traiter le cas des dérivées bornées.

L'intégrale de Lebesgue, apte à intégrer toutes les dérivées bornées et à donner lieu, pour de telles fonctions, à la Formule de Newton-Leibniz, est cependant impuissante elle aussi à intégrer toutes les dérivées, dans la mesure où la dérivabilité d'une fonction F sur un intervalle fermé borné n'assure pas l'intégrabilité, au sens de Lebesgue, de F' sur cet intervalle (voir l'Exemple 1.13 ci-dessous). Cette insuffisance de l'intégrale de Lebesgue ne tient pas à l'impossibilité foncière d'une pareille extension : A. Denjoy, en effet, avait montré dès 1912 la possibilité de recouvrer les valeurs d'une fonction à partir de sa dérivée par un processus de « totalisation ».

Le procédé de Denjoy, fondé sur une induction transfinie, n'offrait cependant ni la simplicité du cadre riemannien, ni la puissance de généralisation aux cadres abstraits de l'intégrale de Lebesgue.

Les travaux (indépendants) de J. Kurzweil et R. Henstock, au début de la seconde moitié du vingtième siècle, ont mis au jour une définition de l'intégrale alliant la simplicité de l'approche de Riemann à un résultat de compacité, dû à P. Cousin, laquelle s'est avérée par la suite équivalente à la définition de Denjoy. Dans le cadre proposé par ces deux mathématiciens, la formule de Newton-Leibniz devient un résultat élégant et aisé à démontrer pour toutes les dérivées. Nous nous proposons d'illustrer l'efficacité de cette théorie de l'intégrale dans la première partie de ce texte.

En plusieurs dimensions, la formule de Gauß-Green :

$$\int_\Omega \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} v \cdot n,$$

[1] Université ParisSud, Orsay.

qui relie l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur un volume, à son flux à travers le bord de celui-ci, constitue une généralisation importante de la formule de Newton-Leibniz, à laquelle elle se réduit en dimension un.

L'intégrale de Kurzweil et Henstock, dont on formule sans peine une généralisation en dimension supérieure à un, ne donne cependant pas lieu à une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs supposés simplement *différentiables*.

Nous nous proposons de montrer, dans cette brève note, que la non-validité, en théorie de Kurzweil et Henstock, de cette formule de Gauß-Green généralisée, est due à une incompatibilité foncière entre celle-ci et une version générale du théorème de Fubini, laquelle *est* valide en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

Nous nous efforcerons ensuite de rendre hommage au premier universitaire à avoir adopté la présentation de Kurzweil et Henstock pour enseigner l'intégrale dans les premières années de faculté, le Professeur Jean Mawhin, en présentant la théorie de l'intégrale qui lui est due et qui, en dimension supérieure à un, donne lieu à une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables – théorie qui a été le point de départ d'une longue et fructueuse série de travaux en intégration.

1. Une approche Riemannienne de l'intégration en dimension 1 : l'intégrale de Kurzweil et Henstock

Introduisons quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite. Rappelons qu'étant donné $A \subseteq \mathbb{R}$, on désigne par $\mathring{A}$ son intérieur.

Définition 1.1. *On appellera* intervalle *un ensemble de la forme* $[a, b]$, *où* $a < b$ *sont des réels, auquel cas on pose* $\ell([a, b]) := b - a$ *et on appelle ce nombre la* longueur *de* $[a, b]$ *– on observera en particulier que, pour notre propos, tout intervalle est* fermé.

On dira aussi que deux intervalles I *et* J *sont* essentiellement disjoints *si on a* $\mathring{I} \cap \mathring{J} = \varnothing$.

Définition 1.2. *Soient* $a < b$ *des réels. On dit qu'une famille finie d'intervalles mutuellement essentiellement disjoints* $P = \{I^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *est une* partition *de* $[a, b]$ *si on a* $\bigcup_{j=1}^m I^j = [a, b]$.

On dit qu'une famille finie $\Pi = \{(x^j, I^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *est une* partition pointée *(ou plus simplement une P-partition) de* $[a, b]$ *si* $\{I^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *est une partition de* $[a, b]$ *et que l'on a* $x^j \in I^j$ *pour chaque* $1 \leqslant j \leqslant m$.

Afin d'obtenir une théorie de l'intégration sur $\mathbb{R}$ plus puissante que l'intégrale de Riemann, il nous faut recourir au concept de *jauge*. Une *jauge* est une application réelle à valeurs strictement positives qui exerce un contrôle sur les intervalles d'une P-partition.

Définition 1.3. *Soient* $a < b$ *des réels. Une application* $\delta : [a, b] \to]0, \infty[$ *est appelée une* jauge sur $[a, b]$.

Soit δ *une jauge sur* $[a, b]$, *et soit* $\Pi := \{(I^j, x^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *une P-partition de* $[a, b]$. *On dit que* Π *est une P*-partition δ-fine de $[a, b]$ *si pour tout* $1 \leqslant j \leqslant m$, *on a* $x^j \in I^j \subseteq [x^j - \delta(x^j), x^j + \delta(x^j)]$.

Remarque 1.4. *Donnons-nous un intervalle* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$*, et une jauge* δ *sur* $[a, b]$*. Un lemme, dû à Pierre Cousin, nous assure l'existence d'une P-partition* δ*-fine de* $[a, b]$*.*

Lemme 1.5 (Cousin)**.** *Soient* $a < b$ *des réels. Pour toute jauge* δ *sur* $[a, b]$*, il existe une P-partition* δ*-fine de* $[a, b]$*.*

Démonstration. Effectuons une preuve par l'absurde. Supposons que l'intervalle $[a, b]$ n'admette pas de P-partition δ-fine. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, et découpons l'intervalle $[a, b] = [a_0, b_0]$ en deux intervalles de même longueur, *i.e.* $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ ainsi que $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$. Comme la réunion de deux P-partitions δ-fine en est encore une, il est clair que l'un de ces deux intervalles n'admet pas de telle P-partition.

On itère alors le procédé en construisant des intervalles fermés emboîtés notés $[a_k, b_k]$ de longueur $\frac{b-a}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, n'admettant pas de P-partition δ-fine. D'après le théorème des intervalles fermés emboîtés, il existe un point x commun à tous les $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$. Par définition, on a $\delta(x) > 0$; il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait :

$$[a_{k_0}, b_{k_0}] \subseteq]x - \delta(x), x + \delta(x)[,$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ puisque dès lors $\{(x, [a_{k_0}, b_{k_0}])\}$ constitue une P-partition δ-fine de $[a_{k_0}, b_{k_0}]$. $\square$

Définition 1.6. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*,* Π *une P-partition* δ*-fine de* $[a, b]$*. On définit la* somme de Riemann *de* f *associée à* Π*, notée* $S(f, \Pi, [a, b])$*, comme suit :*

$$S(f, \Pi, [a, b]) := \sum_{i=1}^{m} f(x^j)\ell(I^j).$$

L'*intégrale de Kurzweil et Henstock* est définie par un procédé de passage à la limite sur les sommes de Riemann.

Définition 1.7. *Soient* $a < b$ *des réels,* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle à valeurs réelles et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. On dit que* f *est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur* $[a, b]$*, d'intégrale* α*, si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une jauge* δ_ε *sur* $[a, b]$ *telle que, pour toute P-partition* δ_ε*-fine* Π *de* $[a, b]$*, on ait :*

$$|S(f, \Pi, [a, b]) - \alpha| \leqslant \varepsilon; \tag{1}$$

auquel cas, on dit que f *est* intégrable au sens de Kurzweil et Henstock (ou, brièvement, KH-intégrable) *sur* $[a, b]$*.*

Remarque 1.8. *Dans les conditions de la définition précédente, on observe que le réel* α *vérifiant la propriété ci-dessus est unique ; on le note habituellement* $\int_a^b f$*.*

Il est par ailleurs facile de démontrer les proprités élémentaires de cette intégrale, à savoir : la positivité, la conservation de l'ordre, la linéarité, la relation de Chasles (additivité).

Nous pouvons remarquer la puissance de cette intégrale qui ignore, contrairement à l'intégrale de Riemann comme à celle de Lebesgue, les intégrales dites *impropres* (voir la Remarque 1.14 à ce sujet). Le théorème de Hake énonce en effet, en quelque sorte, que toute limite d'intégrales au sens de Kurzweil et Henstock en est encore une.

Théorème 1.9 (Hake)**.** *Soient $a < b$ des réels. La fonction f est KH-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est KH-intégrable sur $[c,b]$ pour tout $c \in]a,b[$ et que la limite $\lim_{c\to a}\int_c^b f$ existe, auquel cas il vient :*

$$\int_a^b f = \lim_{c\to a}\int_c^b f. \tag{2}$$

Nous admettrons ici ce résultat sans démonstration, mais nous renvoyons au beau livre de J. Mawhin [6] le lecteur intéressé.

Nous pouvons aussi énoncer et démontrer une version particulièrement élégante et générale du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

Théorème 1.10 (Fondamental de l'analyse et du calcul différentiel)**.** *Soient $a < b$ des réels et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur $[a,b]$; alors sa dérivée F' est KH-intégrable sur $[a,b]$ et on a :*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Démonstration. Posons, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) := F'(t)$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$; il nous faut construire une jauge δ_ε sur $[a,b]$ donnant lieu à l'inégalité (1) pour toute P-partition δ_ε-fine Π de $[a,b]$.

Si $t \in [a,b]$ est donné, F est dérivable en t. Il existe donc $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tel que si $s \in [a,b]$ vérifie $0 < |s-t| \leqslant \delta_\varepsilon(t)$, on ait :

$$\left|\frac{F(s)-F(t)}{s-t} - f(t)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a};$$

on obtient ainsi, en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $|s-t|$:

$$|F(s) - F(t) - f(t)(s-t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}|s-t|.$$

Si à présent $t,u,v \in [a,b]$ vérifient $u < v$ et $t \in [u,v] \subseteq [t-\delta_\varepsilon(t), t+\delta_\varepsilon(t)]$, on aura :

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - f(t)(v-u)| &\leqslant |F(v) - F(t) - f(t)(v-t)| \\ &\quad + |F(t) - F(u) - f(t)(t-u)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(v-t) + \frac{\varepsilon}{b-a}(t-u) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(v-u). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que f est KH-intégrable sur $[a,b]$ et que son intégrale est donnée par $F(b)-F(a)$. Pour ce faire, fixons $\Pi := \{([x^j,[a^j,b^j]), 1 \leqslant j \leqslant m\}$ une P-partition δ_ε-fine de $[a,b]$ et observons que l'on peut écrire :

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^m \left[F(b^j) - F(a^j)\right].$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
|F(b) - F(a) - S(f, \Pi, [a, b])| &= \left| \sum_{j=1}^{m} [F(b^j) - F(a^j) - f(x^j)(b^j - a^j)] \right|, \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \left| F(b^j) - F(a^j) - f(x^j)(b^j - a^j) \right|, \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{b-a}(b^j - a^j), \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

La démonstration est complète. □

Remarque 1.11. *On peut également raffiner légèrement ce théorème en supposant f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b] \setminus E$ où E est un sous-ensemble au plus dénombrable de $[a, b]$.*

La façon traditionnelle de définir l'intégrale de Lebesgue (sur un intervalle) consiste à utiliser un processus de passage à la limite sur des fonctions dites « simples » ou « étagées ». L'intégrale de Kurzweil et Henstock permet également de produire une caractérisation naturelle de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 1.12. *Soient $a < b$ des réels. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est* intégrable au sens de Lebesgue *sur $[a, b]$ si et seulement si f et $|f|$ sont intégrables au sens de Kurzweil et Henstock sur $[a, b]$; on dit aussi, dans ces conditions, que f est absolument intégrable au sens de Kurzweil et Henstock.*

Exemple 1.13. *Étudions pour finir cette première partie une fonction réelle intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur $[0, 1]$ sans y être intégrable au sens de Lebesgue.*

Soit $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que F est dérivable sur $[0, 1]$ et que sa dérivée F' est donnée, au point $0 \leqslant x \leqslant 1$, par :

$$F'(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 2x \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - \frac{2\pi}{x} \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{si } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Par le théorème fondamental, on voit donc que F' est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur $[0, 1]$.

Pour montrer qu'en revanche $|F'|$ n'est pas intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur $[0, 1]$, observons qu'il vient, par positivité de l'intégrale, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{i+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{i}}} |F'| \geqslant \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{i}}}^{\frac{1}{\sqrt{i+1}}} F' \right| = \left| F\left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) \right| = \frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \geqslant \frac{2}{i+1}.$$

Ce qui implique que l'on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |F'| \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{i+1}.$$

Comme le membre de droite dans l'inégalité précédente diverge avec N, la fonction $|F'|$ ne peut être intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur $[0,1]$; il suit alors de la Proposition 1.12 que F' n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.

Remarque 1.14. *On notera au passage que la fonction F' construite dans l'exemple précédent est intégrable au sens de Riemann (et donc aussi de Lebesgue) sur $[\varepsilon,1]$ pour chaque $0 < \varepsilon < 1$ et que la limite :*

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^1 F' = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} [F(1) - F(\varepsilon)] = -1,$$

est finie. L'intégrale $\int_0^1 F'$ est donc dite impropre *dans les théories de Riemann et de Lebesgue.*

Remarque 1.15. *Grâce à l'exemple précédent, on peut remarquer le caractère non absolu de l'intégrale de Kurzweil et Henstock. Celle-ci, en effet, donne lieu, contrairement à l'intégrale de Lebesgue, à des fonctions intégrables dont la valeur absolue n'est* pas *intégrable.*

Avant d'examiner la situation en dimension supérieure, mentionnons que plusieurs auteurs ont, dans leur enseignement francophone de l'analyse, tiré profit de la simplicité conceptuelle de l'intégrale de Kurzweil et Henstock pour introduire l'intégrale aux étudiants de premier cycle universitaire : à titre d'exemple, mentionnons le premier traité du genre, celui de J. Mawhin [5] – et son évolution ultérieure [6] – et les excellentes notes de cours de J.-P. Demailly [2], qui mériteraient une diffusion plus large.

2. Intégration en dimension supérieure.

On travaillera désormais dans l'espace $\mathbb{R}^n$ que l'on munira, par commodité (étant donné que la notion de « pavé », *i.e.* de « rectangle de dimension n », est centrale dans la suite de ce texte) de la norme $|\cdot|_\infty$ définie pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par :

$$|x|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

On notera en particulier $B_\infty[x,r]$ la boule de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, relativement à cette norme.

2.1. Introduction et notations

L'approche « riemannienne » développée dans la section précédente pour introduire l'intégrale de Kurzweil et Henstock, s'adapte naturellement en dimension supérieure, où l'on substitue, à la notion d'intervalle, celle de *pavé*.

Définition 2.1. *Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé un* pavé *s'il existe des réels $a_i < b_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que l'on ait :*

$$A = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

auquel cas on note $\mathring{A}$ l'intérieur *de A et $\mu[A] := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ le n-*volume *(ou plus simplement le* volume, *si la dimension n est identifiable sans ambiguïté) de A.*

Deux pavés $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sont dits essentiellement disjoints *si l'on a $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \varnothing$.*

Les notions de *jauge*, de *partition* et de *P-partition (δ-fine)* s'étendent naturellement en dimension supérieure ; il suffira au lecteur d'adapter les Définitions 1.2 et 1.3 à une famille de pavés $\{A^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ recouvrant un pavé A, et d'y remplacer l'occurrence de $[x^j - \delta(x^j), x^j + \delta(x^j)]$ par $B_\infty[x^j, \delta(x^j)]$.

L'existence, étant donnée une jauge δ sur un pavé A, d'une P-partition δ-fine de A est garantie par le lemme suivant, dû à P. Cousin en dimension $n = 2$, et dont le lecteur intéressé produira sans peine une preuve en adaptant celle du lemme de Cousin uni-dimensionnel (Lemme 1.5).

Lemme 2.2 (Cousin)**.** *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un pavé et δ une jauge sur A. Il existe une P-partition δ-fine de A formée de pavés* semblables *à A.*

La définition de l'intégrale, telle que nous l'avons présentée, s'étend alors sans peine en dimension supérieure.

Définition 2.3. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un pavé et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur A. On dit que f est intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur A, avec pour intégrale $\alpha \in \mathbb{R}$, si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ_ε sur A jouissant de la propriété suivante : pour toute P-partition δ_ε-fine $\Pi = \{(x^j, A^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ de A, on a :*

$$|S(f, A, \Pi) - \alpha| \leqslant \varepsilon,$$

où l'on a posé $S(f, A, \Pi) := \sum_{j=1}^{m} f(x^j)\mu[A^j]$.

Dans ce cas, on appellera α l'intégrale (au sens de Kurzweil et Henstock) de f sur *A et on la notera indifféremment $\int_A f$ ou $\int_A f(x)\, dx$.*

On démontre aisément, comme en dimension un, la linéarité et la positivité de l'intégrale de Kurzweil et Henstock sur un pavé. Outre les théorèmes de convergence usuels (théorème de convergence monotone, théorème de convergence minorée et majorée), on démontre une version particulièrement élégante du *Théorème de Fubini*, qui lie l'intégrale obtenue aux intégrales définies en dimension inférieure.

La définition suivante est classique.

Définition 2.4. *Une partie $N \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite* n-négligeable *(ou, plus simplement,* négligeable *lorsque l'identification de l'entier n ne souffre aucune ambiguïté) si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{A^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de pavés de $\mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$N \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A^j \quad \textit{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \mu[A^j] \leqslant \varepsilon.$$

On peut à présent énoncer une version du *théorème de Fubini* pour l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

Théorème 2.5. *Soient $1 \leqslant p \leqslant n-1$ un entier, $A \subseteq \mathbb{R}^p$ et $B \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ deux pavés. Supposons en outre que la fonction $f : A \times B \to \mathbb{R}$ soit intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur $A \times B$ et désignons, pour chaque $y \in A$, par $f(y,\cdot)$ l'application*

$$B \to \mathbb{R}, z \mapsto f(y,z).$$

L'ensemble

$$T := \{y \in A : f(y,\cdot) \textit{ n'est pas intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur } B\}$$

est p-négligeable et la fonction $F : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(y) := \begin{cases} \int_B f(y,\cdot) & \textit{si } y \notin T, \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

est intégrable (au sens de Kurzweil et Henstock) sur A et vérifie

$$\int_A F = \int_{A\times B} f,$$

ce que l'on écrit encore :

$$\int_A \left[\int_B f(y,z)\,dz\right] dy = \int_{A\times B} f.$$

Il n'entre pas dans notre propos d'exposer ici la démonstration, délicate mais élémentaire, de la version précédente du théorème de Fubini. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'excellent livre de J. Mawhin [6, Théorème, p. 537] déjà cité.

2.2. Vers un théorème fondamental en dimension $n > 1$

Après avoir développé la généralisation en plusieurs dimensions de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, examinons la possibilité de démontrer, en dimension $n > 1$, un analogue au théorème fondamental dans le cadre de cette théorie de l'intégrale.

Introduisons à cet effet une terminologie qui facilitera l'expression des résultats escomptés en dimension n.

Définition 2.6. *Soit $A = \prod_{i=1}^n [a_i^-, a_i^+]$ un pavé de $\mathbb{R}^n$.*

*On appelle $i^{\text{ème}}$*projection *de A le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^{n-1}$:*

$$A_{(i)} := [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times \widehat{[a_i^-, a_i^+]} \times \cdots \times [a_n^-, a_n^+],$$

où $\widehat{[a_i^-, a_i^+]}$ indique que le facteur $[a_i^-, a_i^+]$ manque dans le produit cartésien.

On introduit de façon analogue, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, *deux* faces *de* A *:*

$$A_i^{\pm} := [a_1^-, a_1^+] \times \cdots \times \{a_i^{\pm}\} \times \cdots \times [a_n^-, a_n^+],$$

tandis qu'à un champ de vecteurs $v : A \to \mathbb{R}^n$*, on associe de même deux champs de vecteurs* $v_i^{\pm}$ *définis sur* $A_{(i)}$ *pour chaque* $1 \leqslant i \leqslant n$ *par :*

$$v_i^{\pm} : A_{(i)} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \mapsto v(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, a_{\pm}^i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{n-1});$$

on définit finalement deux vecteurs normaux $n_i^{\pm}$ *de la manière suivante :*

$$n_i^{\pm} := (0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0),$$

où la composante non nulle ± 1 *apparaît en* $i^{\text{ème}}$ *position.*

Un analogue au théorème fondamental en dimension supérieure à 1 est généralement formulé, pour un champ de vecteurs v de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, à l'aide de sa divergence définie par

$$\text{div } v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Il s'agit de la formule de Gauß-Green.

On pourrait donc espérer obtenir, en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, un résultat du type suivant.

Conjecture 2.7. *Si* A *est un pavé de* $\mathbb{R}^n$ *et si* $v : A \to \mathbb{R}^n$ *est différentiable sur* A*, alors on a :*

$$\int_A \text{div } v = \int_{\partial A} v \cdot n, \tag{4}$$

où l'intégration de la divergence de v *se fait au sens de Kurzweil et Henstock, et où l'intégrale de droite représente le* flux *de* v *à travers le bord de* A.

Définition 2.8 (Flux d'un champ de vecteurs)**.** *Soient* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un pavé de dimension* n *et* $v : A \to \mathbb{R}^n$ *un champ de vecteurs sur* A*. Le* flux *de* v *à travers le bord de* A*, noté* $\int_{\partial A} v \cdot n$*, est défini par :*

$$\int_{\partial A} v \cdot n := \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{A_i^+} v \cdot n_i^+ + \int_{A_i^-} v \cdot n_i^- \right],$$

où l'on a posé, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$ *:*

$$\int_{A_i^{\pm}} v \cdot n_i^{\pm} := \pm \int_{A_{(i)}} v_i^{\pm},$$

et où la dernière intégrale, qui est une intégrale de Riemann classique à $n-1$ *variables, s'interprète comme le flux du champ de vecteurs* v *à travers la face* $A_i^{\pm}$.

La fonction d'ensembles F_v*, définie sur la collection des pavés de* $\mathbb{R}^n$ *contenus dans* A *par la formule*

$$F_v(B) := \int_{\partial B} v \cdot n,$$

où B *est un pavé de* $\mathbb{R}^n$ *contenu dans* A*, est appelée le* flux de v.

Les notions de *périmètre* et de *diamètre* d'un pavé nous seront utiles dans la suite.

Définition 2.9. *Soit $A = \prod_{i=1}^{n}[a_i^-, a_i^+]$ un pavé de $\mathbb{R}^n$. On définit le* périmètre *de A, noté $\|A\|$, par la formule suivante :*

$$||A|| := 2\sum_{i=1}^{n} \mu[A_{(i)}].$$

On définit de même le diamètre *de A, noté $d(A)$, de la façon suivante :*

$$d(A) := \sup_{(x,y)\in A^2} |x-y|_\infty.$$

Remarque 2.10. *Concernant la structure de l'opérateur d'intégrale de bord dans l'équation (4), on remarque immédiatement que l'application $v \mapsto \int_{\partial A} v \cdot n$ est une fonctionnelle linéaire sur les champs de vecteurs continus. On note en outre que si le champ de vecteurs $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continu, alors l'intégrale de bord $\int_{\partial A} v \cdot n$ est majorée par $||A|| \sup_{x\in\partial A} |v(x)|_\infty$.*

La propriété suivante, dont on se convaincra aisément, traduit une propriété d'additivité du flux d'un champ de vecteurs ; le lecteur intéressé en trouvera une démonstration complète dans le livre de Washek F. Pfeffer [7, Proposition 7.2.2].

Lemme 2.11. *Soit v un champ de vecteurs continu sur un pavé A de $\mathbb{R}^n$. Alors le flux de v est une fonction additive,* i.e. *on a*

$$F_v(A) = \sum_{C\in\mathscr{C}} F_v(C),$$

pour toute partition $\mathscr{C}$ de A par des pavés.

La formule (4) est classique pour des champs de vecteurs affines.

Lemme 2.12. *Soit w un champ de vecteurs affine défini sur un pavé A de $\mathbb{R}^n$ (*i.e *de la forme $w(x) = M \cdot x + b$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre n et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur). On a :*

$$\int_A \operatorname{div} w = \int_{\partial A} w \cdot n.$$

Le résultat suivant nous sera utile pour établir une formule de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables.

Lemme 2.13. *Soit v un champ de vecteurs défini sur un pavé $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On suppose que v est différentiable en tout point de A. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait :*

$$\left|\operatorname{div} v(x)\mu[B] - \int_{\partial B} v \cdot n\right| < \varepsilon||B||d(B),$$

pour tout pavé B de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $B \subseteq A \cap B_\infty[x,\delta]$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in A$; on construit un champ de vecteurs affine $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dont la divergence égale $\operatorname{div} v(x)$ en posant :

$$w(y) := v(x) + v'_x(y - x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, où v'_x désigne la différentielle (ou dérivée totale) de v au point x. On vérifie facilement que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a $\operatorname{div} w(y) = \operatorname{div} v(x)$.

Par ailleurs, v est différentiable en x. Il existe donc $\delta > 0$ tel que l'on ait $|v(y) - w(y)|_\infty \leqslant \varepsilon |y - x|_\infty$, pour tout $y \in A \cap B_\infty[x, \delta]$. Si $B \subseteq A \cap B_\infty[x, \delta]$ est un pavé contenant x, on aura donc

$$|v(y) - w(y)|_\infty \leqslant \varepsilon d(B),$$

pour tout $y \in B$.

D'après le théorème et le lemme précédents, on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{div} v(x)\mu[B] - \int_{\partial B} v \cdot n\right| &= \left|\int_B \operatorname{div} w - \int_{\partial B} v \cdot n\right|, \\
&= \left|\int_{\partial B} w \cdot n - \int_{\partial B} v \cdot n\right|, \\
&= \left|\int_{\partial B} (w - v) \cdot n\right|, \\
&\leqslant \varepsilon d(B)||B||,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme. □

Tâchons à présent de démontrer la Conjecture énoncée ci-dessus.

Tentative de démonstration de la Conjecture 2.7. Par continuité du champ de vecteurs v sur le pavé A, le flux F_v est une fonction d'ensembles bien définie sur la collection des pavés contenus dans A. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$; il nous faut montrer l'existence d'une jauge δ sur A telle que l'inégalité :

$$|S(\operatorname{div} v, \Pi, A) - F_v(A)| \leqslant \varepsilon,$$

soit vérifiée pour toute P-partition δ-fine Π de A.

Fixons $x \in A$. D'après le lemme précédent, il existe $\delta(x) > 0$ tel que l'on ait

$$|\operatorname{div} v(x)\mu[B] - F_v(B)| \leqslant \varepsilon d(B)||B||, \tag{5}$$

pour tout pavé $B \subseteq A \cap B_\infty[x, \delta(x)]$. Ceci définit une jauge δ sur A. Fixons donc une P-partitition δ-fine $\Pi := \{(x^j, A^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ de A. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
|S(\operatorname{div}, \Pi, A) - F_v(A)| &= \left|\sum_{j=1}^m \operatorname{div}(x^j)\mu[A^j] - F_v(A^j)\right|, \\
&\leqslant \sum_{j=1}^m \left|\operatorname{div}(x^j)\mu[A^j] - F_v(A^j)\right|, \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^m d(A^j)||A^j||,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité (5).

Nous pourrions achever la démonstration s'il existait un moyen de montrer que la somme

$$\sum_{j=1}^{m} d(A^j)\|A^j\|, \tag{6}$$

peut être bornée par une quantité finie indépendante de la P-partition choisie. Nous allons voir que ce n'est, en général, pas le cas ; il convient donc d'interrompre ici notre tentative de démonstration. □

Remarque 2.14. *Soit* $\{A^j : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ *la partition de* $[0,1] \times [0,1]$ *définie par*

$$A^j := [0,1] \times \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right],$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$. *On observe que l'on a* $d(A^j) = 1$ *pour tout* $1 \leqslant j \leqslant m$.

Fixons un entier $1 \leqslant j \leqslant m$ *et calculons :*

$$||A^j|| = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad \textit{et} \quad \sum_{j=1}^{m} d(A^j)||A^j|| = 2m + 2.$$

Il n'est donc pas toujours possible de contrôler le terme $\sum_{j=1}^{m} d(A^j)||A^j||$ *en raison d'un aplatissement trop important des* A^j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

La remarque qui précède montre qu'il n'est pas possible de conclure, en suivant l'argument esquissé précédemment, la preuve de la Conjecture 2.7. Nous verrons plus loin (voir la section 3) que la raison en est profonde : cette conjecture est *fausse* si l'intégrale n-dimensionnelle dans (4) est interprétée au sens de Kurzweil et Henstock.

L'issue que nous choisirons à cette aporie temporaire est d'intégrer *dans la définition d'intégrale* une condition garantissant qu'il soit possible de contrôler, pour une partition admissible, la quantité (6).

Cette idée, qui a été le point clef du développement ultérieur des théories non-absolues de l'intégrale en dimension $n > 1$, est due à Jean Mawhin (voir [4]).

Pour développer sa définition de l'intégrale, introduisons une terminologie qui en simplifiera l'énoncé.

Définition 2.15. *Soit* A *un pavé de* $\mathbb{R}^n$ *; on définit l'*aplatissement *de* A, *noté* $\sigma(A)$, *de la façon suivante :*

$$\sigma(A) := \frac{\max_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_+^i - a_-^i)}{\min_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_+^i - a_-^i)}.$$

Remarque 2.16. *L'idée de Jean Mawhin, afin de contrôler la somme (6) dans le cadre de P-partitions admissibles, est d'imposer un contrôle sur l'aplatissement des rectangles qui la constituent. Il introduit pour ce faire le concept d'* irrégularité *d'une P-partition d'un pavé* A *de* $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.17. *Soit $\Xi = \{(x^j, A^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ une P-partition d'un pavé A de $\mathbb{R}^n$. On définit l'*irrégularité *de Ξ, notée $\Sigma(\Xi)$, comme suit :*

$$\Sigma(\Xi) := \frac{\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \sigma(A^j)}{\sigma(A)}.$$

Définition 2.18. *On dit que f est intégrable au sens de* Mawhin *(ou plus brièvement M-intégrable) sur un pavé A de $\mathbb{R}^n$, d'intégrale $\alpha \in \mathbb{R}$, si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\eta \geqslant 1$, il existe une jauge $\delta_{\varepsilon,\eta}$ sur A telle que pour toute P-partition $\delta_{\varepsilon,\eta}$-fine Ξ de I vérifiant $\Sigma(\Xi) \leqslant \eta$, on ait :*

$$|S(A, f, \Xi) - \alpha| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Dans ce cas, on appelle l'unique réel α vérifiant la propriété précédente, l'intégrale de f au sens de Mawhin sur A, et on le note $(M)\int_A f$ ou simplement $\int_A f$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Remarque 2.19. *Il résulte immédiatement de la définition précédente que si f est intégrable au sens de Kurzweil et Henstock sur A, alors f est intégrable au sens de Mawhin sur A.*

Remarque 2.20. *La définition de J. Mawhin de l'intégrale, qui impose une régularité aux P-partitions admises pour estimer l'intégrale dans (7), va nous permettre d'obtenir une majoration de la somme (6) posant problème dans la démonstration de la Conjecture 2.7.*

Plus précisément, on obtient dans cette nouvelle théorie le résultat suivant.

Théorème 2.21. *Si A est un pavé de $\mathbb{R}^n$ et que $v : A \to \mathbb{R}^n$ est différentiable sur A, alors* $\operatorname{div} v$ *est intégrable au sens de Mawhin sur A et on a :*

$$(M)\int_A \operatorname{div}\ v = \int_{\partial A} v \cdot n. \tag{8}$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon' > 0$, $\eta > 0$ et posons $\varepsilon := \varepsilon'/[2n\eta^{n-1}\sigma(A)^{n-1}\mu(A)]$. Associons à $\varepsilon > 0$ une jauge δ définie sur A exactement comme dans la tentative de preuve de la Conjecture 2.7, fixons $\Xi = \{(x^j, A^j) : 1 \leqslant j \leqslant m\}$ une P-partition δ-fine de A et supposons que l'on ait $\Sigma(\Xi) \leqslant \eta$.

On obtient, en procédant exactement comme précédemment :

$$|S(\operatorname{div} v, \Xi, A) - F_v(A)| \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{m} d(A^j)\|A^j\|.$$

On calcule alors, en notant, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$ et chaque $1 \leqslant j \leqslant m$, A_i^j la projection sur le $i^{\text{ème}}$ axe du pavé A^j :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m d(A^j)\|A^j\| &= \sum_{j=1}^m d(A^j) \min_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1} \frac{\|A^j\|}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
&\leqslant \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{\|A^j\|}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
&= \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{2\sum_{i=1}^n \mu[A_{(i)}^j]}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
&\leqslant 2n \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1}}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} \ell(A_i^j)^{n-1}}, \\
&= 2n \sum_{j=1}^m \mu[A^j]\sigma(A^j)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Or il vient pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$:

$$\sigma(A^j) \leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant m} \sigma(A^l) = \Sigma(\Xi)\sigma(A);$$

on obtient donc :

$$\sigma(A^j)^{n-1} \leqslant (\Sigma(\Xi)\sigma(A))^{n-1}.$$

Les inégalités précédentes nous fournissent la majoration recherchée, puisque l'on écrit finalement :

$$\begin{aligned}
|S(\operatorname{div} v, \Xi, A) - F_v(A)| &\leqslant 2n\varepsilon\Sigma(\Xi)^{n-1}\sigma(A)^{n-1} \sum_{j=1}^m \mu[A^j] \\
&= \{2n\Sigma(\Xi)^{n-1}\sigma(A)^{n-1}\mu[A]\}\varepsilon \leqslant \{2n\eta^{n-1}\sigma(A)^{n-1}\mu[A]\}\varepsilon = \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon' > 0$, le théorème est démontré. □

Il convient à présent de revenir à la « raison profonde » annoncée comme obstruction à l'obtention d'un théorème de la divergence pour les champs de vecteurs différentiables, en théorie de l'intégrale de Kurzweil et Henstock.

3. L'incompatibilité des deux « théorèmes fondamentaux »

Contrairement à l'intégrale de Kurzweil et Henstock, l'intégrale de M. Mawhin, nous allons le voir, ne donne pas lieu à un « théorème de Fubini » général. Nous voudrions le montrer, dans cette partie, comme le cas particulier d'un phénomène plus général : l'incompatibilité foncière, pour une théorie de l'intégration donnée, entre une version générale du théorème de la divergence, et une version générale du théorème de Fubini.

Plus précisément, nous parlerons dans la suite d'*intégrale uni-dimensionnelle* pour désigner la donnée, pour chaque intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, d'un espace $\mathscr{I}(I)$ (contenant l'espace $C(I)$ des fonctions continues sur I) de fonctions à valeurs réelles définies sur I et dites *intégrables sur* I, ainsi que d'une fonctionnelle linéaire positive

$$\int_I : \mathscr{I}(I) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_I f,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(A) si I et $I^1, \dots, I^m$ sont des intervalles mutuellement essentiellement disjoints vérifiant $I = \bigcup_{j=1}^m I^j$ et si f est intégrable sur I, alors la restriction (toujours notée f) de f à I^j est intégrable sur I^j pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$ et on a :

$$\int_I f = \sum_{j=1}^m \int_{I^j} f;$$

(H) si I est un intervalle, si $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable sur I et si l'on pose $I_c^- := I \cap]-\infty, c]$ et $I_c^+ := [c, +\infty[$ pour tout $c \in \mathring{I}$, on a (en notant toujours f la rectriction de f à une partie de I) :

$$\int_I f = \lim_{c \to \max I^-} \int_{I_c^-} f = \lim_{c \to \min I^+} \int_{I_c^+} f;$$

(N) si I est un intervalle, alors la fonction constante 1 est intégrable sur I et on a

$$\int_I 1 = \ell(I).$$

On désignera de même par *intégrale bi-dimensionnelle* la donnée, pour chaque pavé $A \subseteq \mathbb{R}^2$, d'un espace $\mathscr{I}(A)$ (contenant l'espace $C(A)$ des fonctions continues sur A) de fonctions à valeurs réelles définies sur A et dites *intégrables sur* A ainsi que celle d'une fonctionnelle linéaire et positive

$$\iint_A : \mathscr{I}(A) \to \mathbb{R}, f \mapsto \iint_A f,$$

appelée *intégrale sur* A et vérifiant la condition suivante :

(A) si A et $A^1, \dots, A^m$ sont des rectangles deux à deux essentiellement disjoints vérifiant $A = \bigcup_{j=1}^m A^j$ et si f est intégrable sur A, alors la restriction (toujours notée f) de f à A^j est intégrable sur A^j pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$ et on a :

$$\iint_A f = \sum_{j=1}^m \iint_{A^j} f.$$

Définition 3.1. *Étant donnée une intégrale bi-dimensionnelle, nous dirons :*

(D) *qu'elle* intègre toutes les divergences *si, pour tout pavé $A \subseteq \mathbb{R}^2$ et tout champ de vecteurs différentiable $v : A \to \mathbb{R}^2$, la fonction* $\operatorname{div} v$ *est intégrable sur A ;*

(F) *qu'elle* vérifie la condition de Fubini (pour les sections verticales) *s'il existe une intégrale uni-dimensionnelle telle que, pour tout rectangle $A = I \times J$ (avec I, J des intervalles de $\mathbb{R}$) et toute fonction $f : A \to \mathbb{R}$ intégrable sur A, l'ensemble*

$$\{x \in I : f(x, \cdot) \text{ n'est pas intégrable sur } J\}$$

soit 1*-négligeable.*

Nous allons voir dans la suite que les conditions (D) et (F) sont incompatibles.

Pour ce faire, nous aurons besoin du bel exemple suivant, dû à W.F. Pfeffer [7, Section 11.1]

Théorème 3.2 (Pfeffer). *Il existe une fonction* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *et un pavé* $A = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ *(avec* I, J *des intervalles) jouissant des propriétés suivantes :*

(i) $h = \operatorname{div} v$ *pour un champ de vecteurs différentiable* $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *;*
(ii) *pour toute intégrale uni-dimensionnelle, l'ensemble*

$$\{x \in I : h(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } J\}$$

est 1*-négligeable.*

Démonstration. On commence par définir, pour tout $k \in \mathbb{N}$, des intervalles $J_k := \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]$. On choisit également, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, une fonction indéfiniment dérivable $g_k : \mathbb{R} \to [0,1]$ vérifiant $g_k(t) = 0$ pour $t \leqslant \frac{4}{3}\frac{1}{2^{k+1}}$ et $g_k(t) = 1$ pour $t > \frac{5}{3}\frac{1}{2^{k+1}}$.

On définit alors une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin x & \text{si } y \geqslant 1, \\ y^2\{g_k(y)\sin(8^k x) + [1 - g_k(y)]\sin(8^{k+1}x)\} & \text{si } y \in J_k, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0. \end{cases}$$

Il est clair par construction que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Fixons $a \in \mathbb{R}$ et vérifions que f est différentiable en $(a, 0)$. Pour ce faire, observons que l'on a, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|(u, v)|_\infty < 1$ et $v \in J_k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{|f(a+u, 0+v) - f(a,0)|}{|(u,v)|_\infty} = \frac{v^2|g_k(v)\sin[8^k(a+u)] + [1-g_k(v)]\sin[8^{k+1}(a+u)]|}{\max\{|u|,|v|\}} \leqslant |(u,v)|_\infty.$$

Comme on a par ailleurs $f(a+u, v) = 0$ si $v \leqslant 0$ et $f(a, 0) = 0$, il vient, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|(u, v)|_\infty < 1$:

$$\frac{|f(a+u, 0+v) - f(a,0)|}{|(u,v)|_\infty} \leqslant |(u,v)|_\infty.$$

Il s'ensuit que f est différentiable en $(a, 0)$ et que sa différentielle y est nulle.

Le champ de vecteurs $v = (f, 0)$ est donc un champ de vecteurs différentiable sur $A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Posons $h := \operatorname{div} v = \frac{\partial f}{\partial x}$ et, étant donnée une intégrale uni-dimensionnelle sur $[0, 1]$, posons

$$S := \{x \in [0, 2\pi] : h(x, \cdot) \text{ est intégrable sur } [0,1]\}.$$

Nous allons voir que S est 1-négligeable.

Pour ce faire, fixons $x \in S$ et observons que l'on a alors, en utilisant successivement les conditions (H) et (A) :

$$\int_{[0,1]} h(x,\cdot) = \lim_{N\to\infty} \int_{[2^{-N-1},1]} h(x,\cdot) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{k} \int_{J_k} h(x,\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x),$$

où l'on a posé, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k(x) := \int_{J_k} h(x,\cdot) = 8^k \cos(8^k x) \int_{J_k} y^2 g_k(y)\, dy + 8^{k+1} \cos(8^{k+1}x) \int_{J_k} y^2[1-g_k(y)]\, dy.$$

Nous avons donc montré l'affirmation suivante.

Affirmation 1. *Pour tout $x \in S$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(x)$ est convergente.*

Rappelons à présent qu'il existe un ensemble 1-négligeable $N \subseteq [0,2\pi]$ tel que la suite $\{(8^k x) \bmod 2\pi\}$ soit *équirépartie dans* $[0,2\pi]$ pour tout $x \in [0,2\pi] \setminus N$ (le lecteur intéressé pourra trouver une preuve de ce résultat dans le beau livre de L. Kuipers et H. Niederreiter [3, Theorem 4.1, p.32]) ; en particulier, il s'ensuit que la suite $\{(8^k x) \bmod 2\pi\}_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,2\pi]$ pour tout $x \in [0,2\pi] \setminus N$. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers, notée $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, telle que, pour chaque $l \in \mathbb{N}$, on ait :

$$0 \leqslant (8^{k_l} x) \bmod 2\pi \leqslant \frac{\pi}{24}.$$

Il vient donc, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \max\{(8^{k_l} x) \bmod 2\pi, (8^{k_l+1} x) \bmod 2\pi\} \leqslant \frac{\pi}{3},$$

ainsi que

$$\min\{\cos(8^{k_l} x), \cos(8^{k_l+1} x)\} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{9}$$

L'estimation précédente va permettre de conclure à la divergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(x)$ pour $x \notin N$.

Affirmation 2. *Pour tout $x \in [0,2\pi] \setminus N$, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(x)$ diverge.*

Pour démontrer l'affirmation précédente, fixons $x \in [0,2\pi] \setminus N$ et notons (k_l) une suite strictement croissante d'entiers vérifiant l'inégalité (9). Il vient alors, pour $l \in \mathbb{N}$, en utilisant la définition de $c_{k_l}(x)$, la positivité, la linéarité de l'intégrale uni-dimensionnelle et la propriété (N) :

$$c_{k_l}(x) \geqslant \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2 g_{k_l}(y)\, dy + \frac{8^{k_l+1}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2[1 - g_{k_l}(y)]\, dy$$

$$\geqslant \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2[g_{k_l}(y)+1-g_{k_l}(y)]\, dy = \frac{8^{k_l}}{2} \int_{J_{k_l}} y^2\, dy \geqslant \frac{8^{k_l}}{2} \left(\frac{1}{2^{k_l+1}}\right)^2 \ell(J_{k_l}) = \frac{1}{16}.$$

La suite $\{c_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger vers 0, et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(x)$ est divergente.

La preuve du théorème est complète, si l'on observe que les Affirmations 1 et 2 montrent que l'on a $S \subseteq N$, et que par conséquent S est 1-négligeable. □

La fonction construite dans le Théorème 3.2 permet de montrer que les conditions (D) – *i.e.* l'intégrabilité de toute divergence d'un champ de vecteurs différentiables – et (F) – condition préalable à l'obtention d'un théorème de Fubini – sont incompatibles pour une intégrale bi-dimensionnelle donnée.

Supposons en effet qu'une intégrale bi-dimensionnelle vérifie la condition (D) ; il est clair, alors, que la fonction h construite dans le Théorème 3.2, est intégrable sur A pour cette intégrale bi-dimensionnelle ; en revanche, la condition (ii) du Théorème 3.2 montre que la condition de Fubini (F) n'a aucune chance d'être vérifiée.

Si, au contraire, on suppose qu'une intégrale bi-dimensionnelle vérifie la condition de Fubini (F), alors il est exclu, par la condition (ii) du Théorème 3.2, que la fonction h que l'on y construit, soit intégrable sur A pour cette intégrale bi-dimensionnelle.

On retiendra de ceci qu'une version suffisamment générale du théorème de la divergence, assurant l'intégrabilité sur un rectangle de la divergence de tout champ de vecteurs différentiable sur ce rectangle, est incompatible avec l'obtention d'un énoncé général de type Fubini pour cette intégrale bi-dimensionnelle.

4. Conclusion

Nous avons tâché de montrer, dans ce petit exposé, qu'une modification formellement simple de la définition de l'intégrale de Riemann pouvait donner lieu à une intégrale aisément manipulable – l'intégrale de Kurzweil et Henstock – qui étende l'intégrale de Lebesgue et qui soit susceptible d'intégrer toutes les dérivées en donnant lieu, pour ces dernières, à une formule de Newton-Leibniz.

Nous avons ensuite essayé, en présentant une théorie de l'intégrale elle aussi élémentaire à mettre en œuvre – l'intégrale de Mawhin – de montrer que l'on pouvait suivre une méthode semblable pour obtenir une théorie de l'intégrale adaptée, en dimension $n > 1$, à l'obtention d'un théorème de Gauß-Green pour les champs de vecteurs différentiables. Cette théorie de l'intégrale, qui ne s'identifie pas à la généralisation la plus simple, en plusieurs dimensions, de l'intégrale de Kurzweil et Henstock, ne donne cependant, à l'inverse de cette dernière, pas lieu à un théorème de Fubini général. Nous avons tâché de montrer que la raison en était l'*incompatibilité foncière entre un énoncé général du théorème de Fubini et une formule de Gauß-Green générale*.

Nous espérons avoir suscité, par notre propos, l'intérêt d'un large public d'amateurs d'analyse pour les théories « riemanniennes » de l'intégration, dont celles de Kurzweil et Henstock ou de Mawhin sont des exemples.

Il nous reste à noter qu'à la suite des travaux que nous avons présentés, le cadre de travail s'est progressivement étendu de la collection des pavés aux *ensembles à périmètre fini*, candidats naturels à donner lieu à une formule de Gauss-Green, puisqu'il s'agit, par définition, des parties (bornées) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ pour lesquelles on a :

$$\sup\left\{\int_A \operatorname{div} v\, dx : v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |v(x)|_\infty \leqslant 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\right\} < +\infty,$$

et que cette condition est remplie dès que l'on peut écrire $\int_A \operatorname{div} v\, dx = \int_{\partial A} v \cdot n$, où $\int_{\partial A} v \cdot n$ est une intégrale de flux convenable. L'étude de l'intégrale obtenue est, pour l'essentiel, l'œuvre de W.F. Pfeffer, que l'on trouvera résumée dans son ouvrage consacré à la question [8] et vers lequel nous renvoyons tout lecteur intéressé, ainsi qu'au bel article de T. De Pauw [1].

Nous avons voulu, pour notre part, montrer à quel point la découverte de J. Mawhin a constitué le chaînon manquant aux spécialistes pour l'obtention d'un théorème de la divergence général.

5. Références

[1] Thierry De Pauw. Autour du théorème de la divergence. dans *Autour du centenaire Lebesgue*, volume 18 de *Panor. Synthèses*, pages 85–121. Soc. Math. France, Paris, 2004.

[2] Jean-Pierre Demailly. *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock*. Université Joseph Fourier. Grenoble, 2011.

[3] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974.

[4] Jean Mawhin. Generalized multiple Perron integrals and the Green-Goursat theorem for differentiable vector fields. *Czechoslovak Math. J.*, 31(106)(4) :614–632, 1981.

[5] Jean Mawhin. *Introduction à l'analyse*. Cabay Libraire-Éditeur S.A., Louvain, deuxième édition, 1981.

[6] Jean Mawhin. *Analyse. Fondements, techniques, évolution*. Accès Sciences. De Boeck Université, Bruxelles, 1997.

[7] Washek F. Pfeffer. *The Riemann approach to integration*, volume 109 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] Washek F. Pfeffer. *Derivation and integration*, volume 140 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

Remerciements : *les auteurs tiennent à remercier très chaleureusement le Professeur J. Mawhin pour son aimable accueil lors de leur visite à l'université de Louvain en août 2013. Ils remercient également M. Antoine Bera, qui a eu la gentillesse de se prêter à l'exercice ingrat de la relecture du manuscrit dont ce texte est issu. Merci, finalement, aux relecteurs de la* Gazette *qui ont permis, par leur lecture attentive et leurs suggestions judicieuses, son amélioration.*