À propos des champs radiaux, un aspect de l'œuvre mathématique de Marie-Hélène Schwartz

Jean-Paul Brasselet[1]

Introduction

Marie-Hélène Schwartz est décédée ce 5 janvier 2013 dans sa centième année.

Je tiens à remercier l'association *Femmes et Mathématiques* qui m'a permis de publier ici une version remaniée de l'article paru dans sa revue, suite à l'exposé que j'avais donné aux journées commémorant le 10ème anniversaire de l'association (IHP, Paris, 1er février 1997). Marie-Hélène Schwartz m'avait beaucoup aidé à préparer cet exposé. Je renvoie volontiers au livre de Laurent Schwartz [S], paru cette même année 1997, lequel complète naturellement mon propos sur plusieurs points.

De l'étude des fonctions d'une variable complexe aux classes caractéristiques des variétés singulières, le parcours mathématique de Marie-Hélène Schwartz a suivi une ligne directrice bien déterminée, bravant toutes les difficultés rencontrées en chemin. Cet exposé n'a pas pour but de décrire l'ensemble des travaux de Marie-Hélène Schwartz mais de montrer comment ses résultats suivent cette ligne directrice. On peut en fait distinguer dans son parcours mathématique quatre périodes dont les thèmes couvrent successivement les fonctions d'une variable complexe, la théorie d'Ahlfors, le théorème de Poincaré-Hopf pour les variétés singulières et les champs radiaux, enfin les classes caractéristiques des variétés singulières.

Marie-Hélène Schwartz donne une conférence sur les champs radiaux à l'université de Kyoto, mai 1984. Photo : M.-H. Schwartz.

[1] I.M.L., université d'Aix-Marseille.

1939-1944

Sur les fonctions d'une variable complexe

Au début de sa carrière, Marie-Hélène Schwartz a dû affronter la maladie, atteinte d'une tuberculose pulmonaire qui a impliqué plusieurs séjours en sanatorium ([S], p. 87-91).

Après avoir repris un bon contact avec les mathématiques, Marie-Hélène Schwartz s'est intéressée aux fonctions holomorphes et méromorphes. À cette époque, les mathématiciens se préoccupent beaucoup de fonctions d'une variable complexe. Ainsi, l'une des questions du jour était la suivante : existe-t-il des fonctions ayant des valeurs déficientes non asymptotiques ? Une valeur d'une fonction est dite déficiente si elle est prise « en moyenne » moins souvent que les autres. Une valeur ζ d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite asymptotique si on peut lui associer une courbe γ tendant vers l'infini sur laquelle $f(\gamma)$ tend vers ζ. Par exemple, pour la fonction $f(z) = e^z$, la valeur 0 est à la fois déficiente et asymptotique.

Marie-Hélène Schwartz publie une note aux CRAS le 10 mars 1941 : « Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques » [S1]. Il s'agit de la fonction

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{4^n}}{1 - \frac{z}{4^n}} \right)^{(-2)^n}.$$

La note de Marie-Hélène Schwartz a été très appréciée à Clermont-Ferrand où la faculté de Strasbourg s'était alors repliée ([S], p. 147). En fait, après la guerre, on a su que Teichmüller, tué en combattant dans les rangs de la Wechmacht, en avait trouvé un autre exemple.

Marie-Hélène Schwartz effectue alors « un travail remarquable sur le pavage du plan complexe en domaines fondamentaux pour une fonction méromorphe » ([S], p. 176). C'est André Weil, de passage à Clermont-Ferrand, qui lui a dit : « Allez donc voir dans le Japanese Journal of Maths ». Malheureusement, le résultat y avait déjà été montré par un japonais, Shimizu.

C'est dans cette période difficile de la guerre, et dans la clandestinité, que Marie-Hélène Schwartz montre ses talents d'ingéniosité, de travail fin et d'imagination dans un domaine tout autre que les mathématiques. On la voit ainsi fabriquer de fausses cartes d'identité destinées à sa famille, en transformant habilement le nom de « Schwartz » en « Sélimartin » ([S], page 200).

Théorie de Ahlfors

La théorie de Ahlfors (déduite de celle de son maître Nevanlinna, également finlandais) permet de montrer que, pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to S^2$, la caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = 2$ est égale à la somme du « défaut transcendant » (déterminé par les valeurs déficientes de f) et du « défaut algébrique » (attaché aux valeurs critiques de f). La caractéristique d'Euler subsistera dans les généralisations de cette formule que donnera Marie-Hélène Schwartz, par exemple dans la seconde partie de sa thèse [S2] (il s'agit, à l'époque, de la thèse d'état, équivalente à l'habilitation actuelle). Il faut noter que ces généralisations sont une conséquence de la première partie de sa thèse [S3], laquelle est le prélude à ses travaux ultérieurs.

L'idée de Marie-Hélène Schwartz était de généraliser les travaux d'Ahlfors aux variétés analytiques complexes de dimensions supérieures. En fait, elle travaillait déjà, à cette époque, dans le cadre des applications triangulables, ce qui reviendra par la suite.

1945-1953

Formules de Chern

Quand les Schwartz viennent à Paris, Marie-Hélène montre son travail sur une généralisation d'une formule d'Ahlfors. Celui-ci fut trouvé original, mais « trop plein de triangulations et de décompositions de simplexes ». Heureusement, la méthode de Shiing-Shen-Chern, alors professeur à Chicago, venait d'être connue. Le travail de Chern ([Ch1], paru en 1944) va apporter à Marie-Hélène Schwartz les ingrédients utiles pour la généralisation cherchée, exerçant une influence primordiale dans la seconde partie de son parcours.

Chern définit, pour une variété riemannienne (compacte) orientée M de dimension $n+1$, des formes différentielles de courbure Ω (de degré $n+1$) sur M et de transgression Π (de degré n) sur le fibré tangent TM, telles que si $\pi : TM \to M$ désigne la projection canonique et si S^n_x désigne la sphère unité orientée dans une fibre $T_xM \cong \mathbb{R}^{n+1}$, alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de M, est égale à

$$\chi(M) = \int_M \Omega,$$

et on a

$$d\Pi = -\pi^*\Omega \quad \text{et} \quad \int_{S^n_x} \Pi = 1.$$

Ainsi, si γ est un n-cycle d'une fibre T_xM, d'indice $I(\gamma)$ dans $H_n(T_xM \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, il vient $\int_\gamma \Pi = I(\gamma)$.

Chern a d'abord établi ces formules pour remplacer une lourde généralisation du théorème classique de Gauss-Bonnet (d'où le titre de la thèse de Marie-Hélène Schwartz, parue dans Acta Mathematica [S3]) par une formule de Stokes. Sa méthode eut beaucoup d'applications.

Poincaré-Hopf

Pour comprendre la suite des travaux de Marie-Hélène Schwartz, il faut se rappeler la définition de l'indice d'un champ de vecteurs tangent à une variété (lisse) M en un point singulier isolé : localement, la variété s'identifie à un ouvert U de $\mathbb{R}^{n+1}$ et le fibré tangent $TM|_U$ à $U \times \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi tout champ de vecteurs tangents est une section

$$v : M \to TM, \qquad v : x \mapsto v(x) \in T_xM \cong \mathbb{R}^{n+1}$$

du fibré tangent. Si v désigne un champ de vecteurs différentiable, admettant une singularité isolée en $a \in U$, on note S^n le bord d'une (petite) boule $B \subset U$ centrée en a et dans laquelle v n'a pas d'autre singularité que a. L'indice $I(v, a)$ est le degré de l'application (dite de Gauss) :

$$\frac{v}{|v|} : S^n \to S^n.$$

Considérons une variété M à bord ∂M. Étant donné un champ de vecteurs différentiable v, sortant de M le long de son bord ∂M et admettant des points singuliers isolés en nombre fini $(a_i)_{i\in I}$, le relèvement de M par v dans TM est une variété orientée à bord $\partial(v(M)) = v(\partial M)\bigcup \cup_i \gamma_i$ où γ_i est un n-cycle de la fibre $T_{a_i}M$, son indice est l'indice du champ de vecteurs v au point a_i :

$$I(v, a_i) = \int_{\gamma_i} \Pi.$$

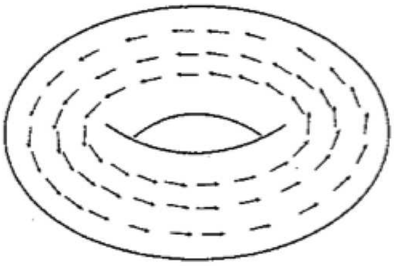
Chern applique la formule de Stokes à la sous-variété à bord de TM définie par le champ de vecteurs v et aux formes différentielles Ω et Π :

$$\int_M \Omega = \int_{\pi(v(M))} \Omega = \int_{v(M)} \pi^*\Omega = \int_{\partial(v(M))} -\Pi = \int_{v(\partial M)} -\Pi + \sum_{i\in I} I(v, a_i).$$

Rappelons aussi que si M est une variété compacte, sans bord, triangulée, de dimension $n+1$, et si k_j désigne le nombre de simplexes de dimension j, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est définie par la somme alternée

$$\chi(M) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j k_j.$$

Par exemple, pour le tore T de dimension 2, on a $\chi(T) = 0$, pour la sphère S^2, on a $\chi(S^2) = +2$ (Figure 1).



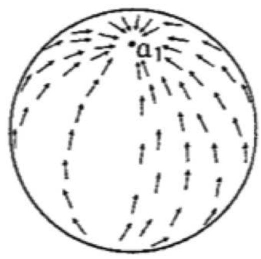


FIGURE 1

Sur une variété lisse (compacte et sans bord), si v désigne un champ de vecteurs différentiable à singularités isolées a_i, la méthode de Chern permet de donner une preuve alternative à la formule de Poincaré-Hopf :

$$\chi(M) = \sum I(v, a_i).$$

Ainsi, sur le tore de dimension 2, on sait construire un champ de vecteurs sans singularité, tangent aux « parallèles ». De même, sur la sphère S^2, on sait construire un champ ayant deux points singuliers aux pôles, chacun d'indice $+1$. Comme on le verra, la méthode de démonstration et les ingrédients introduits par Chern joueront un rôle important dans la suite de travaux de Marie-Hélène Schwartz et lui permettront de définir ses propres outils et méthodes.

C'est en utilisant les techniques de Chern que Marie-Hélène Schwartz généralise alors la formule de Nevanlinna-Ahlfors. Elle obtient une formule du type suivant : si $f : V \to W$ est une application différentiable entre variétés différentiables pour laquelle on a une stratification $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de V, telle que la restriction de f à chaque strate V_α soit une immersion, alors on a

$$\chi(W) = \text{« défaut de transcendance total »} + \text{« défaut algébrique »},$$

où le premier terme de la somme s'exprime par intégrale de la forme différentielle Π et le second terme s'exprime en fonction des degrés topologiques locaux de f, constants le long des strates V_α. Ces travaux se concrétisent dans sa thèse, en 1953. Elle est alors assistante à l'université de Paris, puis nommée à Reims.

1953-1960

Théorème de Poincaré-Hopf et champs radiaux

Pour une variété singulière X, la notion de champ de vecteurs tangents n'est pas bien définie, puisque le fibré tangent n'est défini que sur la partie lisse de X ; le théorème de Poincaré-Hopf n'est alors plus valable, s'il est utilisé tel quel. Prenons l'exemple du tore pincé : on peut construire des champs de vecteurs tangents avec une singularité au point singulier a de X. Le tore pincé étant plongé dans $\mathbb{R}^3$, on peut faire en sorte que, au moins au voisinage de a, le champ soit restriction au tore pincé d'un champ défini dans une boule B^3 de $\mathbb{R}^3$ centrée en a, et ayant un point singulier en a ; alors l'indice du champ en a est bien défini. Si l'on considère sur le tore pincé le champ induit par le champ précédemment défini sur le tore (tangent aux parallèles), alors, la formule de Poincaré-Hopf n'est pas vérifiée. En effet, $\chi(T) = +1$ et on a $\sum_i I(v, a_i) = I(v, a) = 0$ (Figure 2.a). En revanche, si l'on considère le champ sortant de la boule B^3, champ que l'on peut prolonger sur le tore pincé sans singularité, alors on obtient (Figure 2.b)

$$\chi(T) = +1 = \sum_i I(v, a_i) = I(v, a).$$

Cet exemple est le premier exemple de champ radial, notion introduite par Marie-Hélène Schwartz et qui va marquer la suite de ses travaux.

Avant de donner une idée de ce que sont les champs radiaux, il est important de se rappeler que Marie-Hélène Schwartz les a définis (en 1960, voir [S4]) avant même que H. Whitney n'introduise la notion de « stratification de Whitney » ce qui permet de se faire une idée des difficultés qu'elle a dû surmonter pour en donner la définition. Considérons donc une variété analytique complexe X munie d'une stratification de Whitney et plongée dans une variété lisse M, un champ de vecteurs stratifié défini sur une partie de M est un champ tangent en chaque point à la strate contenant ce point.

Le champ radial est un champ stratifié défini comme suit : le champ admet des singularités isolées en les strates de dimension 0, il est sortant de boules voisinages de ces points (dans l'espace ambiant M), il est donc d'indice $+1$ en ces points. Le champ est alors défini dans un voisinage du bord des strates V_1 de dimension (complexe) 1, on le prolonge à l'intérieur de ces strates avec des points singuliers

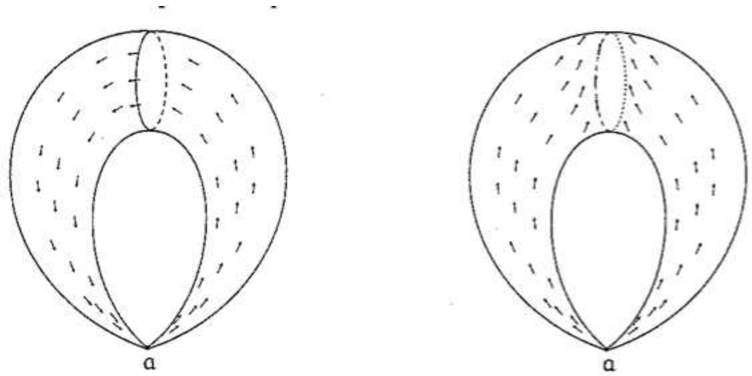


FIGURE 2.a : $I(v, a) = 0$ FIGURE 2.b : $I(v, a) = 1$

isolés a_i d'indices $I(v, a_i)$. La méthode de prolongement radial, inventée par Marie-Hélène Schwartz consiste à étendre le champ ainsi défini sur V_1 dans un tube $\mathcal{T}_1$, voisinage de la strate V_1 par parallélisme et à lui ajouter un champ « transversal » nul le long de la strate, et dont la longueur augmente avec la distance à la strate (Figure 3) [2].

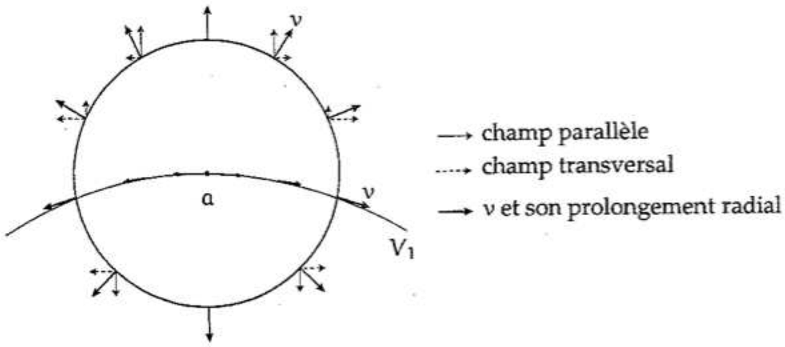


FIGURE 3

Le champ v obtenu a cette jolie propriété d'avoir les mêmes points singuliers a_i dans le tube $\mathcal{T}_1$ et d'avoir même indice en a_i, que ce soit comme champ tangent à M ou que ce soit comme champ tangent à V_1, autrement dit :

$$I(v, a_i; V_1) = I(v, a_i; M).$$

On note $I(v, a_i)$ cet indice. L'une des principales difficultés surmontées par Marie-Hélène Schwartz est de montrer que l'on peut procéder à cette construction dans

[2] Il est remarquable que Milnor, dans sa preuve du Théorème 1 de [Mi], (December 1963 in lectures in University of Virginia) publiée à la même époque, et indépendamment, utilise une construction similaire. Mais Milnor ne l'applique pas aux variétés singulières.

le tube $\mathcal{T}_1$ autour de la strate V_1, de façon à obtenir un champ stratifié, c'est-à-dire tangent aux strates et « sortant » du tube $\mathcal{T}_1$ le long de son bord. Le champ est alors défini dans un voisinage du bord des strates de dimension (complexe) 2. On peut le prolonger à l'intérieur de ces strates avec de points singuliers isolés et on continue la procédure par strates de dimensions croissantes comme à l'étape précédente, jusqu'à la dimension de X.

Les tubes sont des voisinages tubulaires des strates sur lesquelles on construit le champ par prolongement radial de façon à rester tangent aux strates. Le champ radial est non nul et sortant le long de ces tubes.

Pour un tel champ, Marie-Hélène Schwartz montre qu'ainsi, on retrouve la formule de Poincaré-Hopf dans le cas de variétés singulières :

$$\chi(X) = \sum_i I(v, a_i).$$

La méthode utilisée par Marie-Hélène Schwartz exige des techniques très fines et minutieuses d'extension, de recollement et de suivi des propriétés souhaitées (telles que l'obtention d'un champ stratifié). Nous avons déjà signalé que Marie-Hélène Schwartz avait, dans un premier temps, écrit cette construction sans utiliser les conditions de stratification de Whitney. C'est Bernard Morin qui fait part à Marie-Hélène Schwartz de la prépublication de Hassler Whitney sur ce qu'il est convenu maintenant d'appeler les « stratifications de Whitney ». Celles-ci ont certes simplifié sa construction.

1963-2013

Classes caractéristiques des variétés singulières

La période suivante est encore marquée par les travaux de Chern. Celui-ci a publié en 1946 deux articles où il définit les classes de « Chern » des variétés analytiques complexes. Il en donne plusieurs définitions différentes dont on retiendra la théorie de l'obstruction.

Marie-Hélène Schwartz est nommée professeur à Lille en 1963 ([S], p. 331). L'utilisation des stratifications de Whitney lui donne l'idée d'étendre la définition de ses champs de vecteurs radiaux aux champs de r-repères. Il lui est ainsi naturel de penser à la définition des classes de Chern par obstruction et de vouloir définir de telles classes caractéristiques pour les variétés singulières, par obstruction à la construction de champs de r-repères « radiaux ».

On sait que, dans une variété lisse M de dimension complexe n, l'obstruction à la construction d'un champ de r-repères se situe en dimension $2p = 2(n - r + 1)$. cela veut dire qu'étant donnée une triangulation de M, on sait définir le champ sans singularité au-dessus des simplexes de dimension $2p - 1$ et avec des singularités isolées au-dessus des simplexes de dimension $2p$. Le champ étant défini sur le bord du simplexe, on peut l'étendre à l'intérieur, par exemple par une homothétie dont le centre est le barycentre du simplexe. Ce point sera donc un point singulier du champ de r-repères.

Dans le cas d'une variété singulière X plongée dans une variété lisse M, une stratification de M sera donnée par une stratification de X à laquelle on ajoute la strate $M \setminus X$. L'idée fondamentale de Marie-Hélène Schwartz est de travailler non pas avec une triangulation (K) de M compatible avec la stratification, ce qui fournit des dimensions d'obstruction différentes sur chaque strate, mais avec une décomposition cellulaire (D) duale de (K) dans M. Dans ce cas, les cellules sont transverses aux strates et l'intersection d'une cellule de dimension $2p$ avec une strate V_α est une cellule dont la dimension correspond justement à la dimension d'obstruction à la construction d'un champ de r-repères le long de la strate.

On définit alors les classes en construisant un champ de r-repères v_r radial dans un voisinage tubulaire de X, strate par strate comme cela a été fait pour les champs radiaux. Le champ de r-repères a des singularités a_i situées dans les cellules de (D) de dimension $2p$. L'indice $I(v_r, a_i)$ du r-repère en son point singulier a_i s'obtient par généralisation naturelle de la définition précédente. Marie-Hélène Schwartz obtient un cocycle obstructeur γ dont la valeur sur une cellule $(D)^{2p}$ est égale à $\sum_{a_i \in D^{2p}} I(v_r, a_i)$. En notant $\mathcal{D}$ l'ensemble des cellules duales des simplexes de X, lequel forme un voisinage tubulaire de X dans M, la classe de γ définit ainsi une classe de cohomologie dans $H^{2p}(\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}) = H^{2p}(\mathcal{D}, \mathcal{D} \setminus X) = H^{2p}(M, M \setminus X)$. La définition de ces classes fait l'objet d'une pré-publication en 1964 à l'Université de Lille et de deux notes aux CRAS (22 et 29 Mars 1965) [S5].

En 1969, Deligne et Grothendieck conjecturent l'existence de classes caractéristiques pour les variétés algébriques complexes, mais en homologie $H_*(X)$. Ces classes sont définies pour toute fonction constructible α sur X et doivent vérifier un système d'axiomes, en particulier donner la classe de Chern classique si X est lisse et si α est la fonction caractéristique 1_X. En fait, si X est une variété analytique singulière de dimension complexe k, le morphisme de Poincaré $H^{2k-i}(X) \to H_i(X)$, cap-produit par la classe fondamentale, n'est plus un isomorphisme. Il est possible de montrer qu'il n'existe pas, en général, de classe de Chern en cohomologie (absolue) et la conjecture de Deligne et Grothendieck consiste à dire qu'il en existe en homologie.

Cette conjecture sera démontrée en 1974 par Robert MacPherson, par des méthodes de géométrie algébrique (en utilisant l'obstruction d'Euler locale et le transformé de Nash).

Connaissant ce résultat, Guelfand, de passage chez les Schwartz en 1976, propose à Marie-Hélène Schwartz de joindre MacPherson (alors à l'IHÉS) au téléphone, mais ne réussit pas. C'est quelques jours plus tard qu'elle rencontrera Guelfand et MacPherson par hasard dans une petite boutique du Boulevard Saint Michel. Marie-Hélène Schwartz y était rentrée pour acheter une chemise pour son mari. La conversation s'engage dans la boutique exiguë et l'impression commune est bien que les deux constructions (de Marie-Hélène Schwartz et de Robert MacPherson) sont « la même chose ».

Ce résultat sera en fait démontré en 1979 par Marie-Hélène Schwartz et moi-même : les classes de MacPherson sont images des classes de Marie-Hélène Schwartz par isomorphisme d'Alexander

$$H^{2p}(M, M \setminus X) \to H_{2(r-1)}(X).$$

Ceci prouve donc que Marie-Hélène Schwartz avait, sinon démontré, au moins eu l'idée de la conjecture de Deligne et Grothendieck quatre ans avant que celle-ci ne soit émise ! Les classes de Chern des variétés singulières sont maintenant appelées classes de Schwartz-MacPherson.

L'un des éléments de la construction de MacPherson est l'obstruction d'Euler locale (définie par MacPherson, on en donne ici la définition équivalente due à Marie-Hélène Schwartz et moi-même [BS]) : étant donnée une variété algébrique complexe X, on définit le transformé de Nash $\widetilde{X}$ en remplaçant chaque point a de X par l'ensemble de toutes les limites d'espaces tangents pour des suites de points de la partie régulière de X tendant vers a. On définit une application naturelle $\nu : \widetilde{X} \to X$. Le transformé de Nash est muni d'un fibré « tautologique » ξ (ensemble des vecteurs des espaces considérés). Si a est un point d'une strate V_α, singularité isolée du champ radial v, notons b une boule dans M suffisamment petite pour que le champ soit sans autre singularité dans b (et donc sur le bord ∂b). La restriction de v à ∂b se relève en une section $\widetilde{v}$ de ξ au-dessus de $\nu^{-1}(\partial b)$. L'obstruction d'Euler locale de X en a, notée $\mathrm{Eu}_a(X)$, est l'obstruction à étendre la section $\widetilde{v}$ de ξ au-dessus de $\nu^{-1}(b)$.

Avec Marie-Hélène Schwartz, nous avons montré la propriété fondamentale suivante (théorème de proportionnalité) : si maintenant v est un champ stratifié et non plus nécessairement radial, avec une singularité isolée en $a \in b$, d'indice $I(v, a)$ au point a, et avec les mêmes autres hypothèses, alors v se relève en une section $\widetilde{v}$ de ξ au-dessus de $\nu^{-1}(\partial b)$. L'obstruction à étendre la section $\widetilde{v}$ en une section de ξ au-dessus de $\nu^{-1}(b)$ est égale à

$$\mathrm{Obs}(\nu^{-1}(b), \widetilde{v}, \widetilde{X}) = \mathrm{Eu}_a(X) \cdot I(v, a).$$

Ces résultats, et surtout les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, ont été repris dans le livre sur les classes caractéristiques, que Marie-Hélène Schwartz a publié chez Hermann en 2000.

Les applications et généralisations

Je cite ici quelques applications des techniques et des résultats de Marie-Hélène Schwartz parmi les plus fameux.

La définition des champs radiaux de Marie-Hélène Schwartz a fait l'objet de plusieurs généralisations, par elle-même d'abord : la propriété de proportionnalité énoncée ci-dessus peut servir de définition même à ce qu'elle appelle les champs « préradiaux » [S7, S9]. Ceux-ci semblent être la bonne généralité pour avoir un théorème de Poincaré-Hopf.

Dans le cas de stratifications abstraites, H. King et D. Trotman [KT], puis S. Simon [Si] ont donné des généralisations de champs radiaux et d'indices de champs de vecteurs permettant d'obtenir des théorèmes de Poincaré-Hopf dans le cas de variétés singulières plus générales.

Les classes de Chern des variétés singulières ont fait l'objet de définitions équivalentes, par exemple par Lê D. T. et B. Teissier en utilisant les variétés polaires [LT]. La méthode de Marie-Hélène Schwartz m'a permis de définir des classes de Chern en théorie bivariante de Fulton et MacPherson [FM, B], Claude Sabbah en a donné une autre définition [Sa1, Sa2] et Jianyi Zhou a montré que nos deux définitions sont équivalentes [Z].

D'autres généralisations de classes de Chern ont été données par plusieurs auteurs, dont S. Yokura [Y], lequel montre que les classes se relèvent en homologie d'intersection, dans le cas de singularités isolées. Le relèvement des classes de

Schwartz-MacPherson, dans le cas général, a fait l'objet d'un article de G. Barthel, K.H. Fieseler, O. Gabber, L. Kaup et moi-même [BBFGK].

Les classes de Schwartz-MacPherson ont fait l'objet et/ou ont été utilisées dans de nombreux articles, entre autres de P. Aluffi, L Ernström, B. F. Jones, P. Judson III Stryker, L. C. Mihalcea, T. Ohmoto, A. Paruciński, P. Pragacz, A. Weber, S. Yokura, etc.

L'obstruction d'Euler locale et la définition qu'en a donnée Marie-Hélène Schwartz intervient également dans l'étude des feuilletages singuliers, dans des travaux de plusieurs auteurs tels que X. Gomez-Mont, J. Seade, T. Suwa, A. Verjovsky, etc.

En travaillant sur les champs radiaux et les classes caractéristiques, Marie-Hélène Schwartz a également fait une étude systématique des espaces linéaires (dans un premier temps elle les a appelés pseudo-fibrés [S4]). Ceux-ci sont une généralisation de l'espace réunion des espaces tangents aux strates, c'est-à-dire, avec les notations antérieures $\bigcup T(V_\alpha) \subset TM$. La notion de transformé de Nash pour de tels espaces lui a permis de définir des classes de Mather et un caractère de Chern [S6]. Michał Kwieciński [K] a montré que ce caractère est relié à celui précédemment défini par Baum-Fulton-MacPherson.

Bibliographie de Marie-Hélène Schwartz

Marie-Hélène Schwartz a publié 36 articles et deux livres. Hormis deux articles publiés avec moi-même, elle est seule auteur de ses articles. Dans la bibliographie ci-dessous, seuls sont cités les articles de Marie-Hélène Schwartz en rapport direct avec le présent article.

Dans son premier livre, « Champs radiaux sur une stratification analytique complexe », publié en 1991, Marie-Hélène Schwartz introduit son point de vue sur les stratifications de Whitney d'une variété analytique complexe, sur les triangulations compatibles avec une stratification donnée (résultat de S. Lojasiewicz) et sur les champs radiaux.

Marie-Hélène Schwartz a publié en 2000 le livre « Classes de Chern des ensembles analytiques » dans lequel elle reprend la construction de ses classes de façon systématique. Les théorèmes de proportionnalité, théorèmes clés de la théorie, y sont exposés en détails. Dans ce second livre, Marie-Hélène Schwartz expose en détails l'architecture de sa théorie et la relie à celle de MacPherson. Elle étend cette technique et ses résultats aux champs de repères (en particulier les importants théorèmes de proportionnalité). Ce livre fournit une confrontation explicite entre l'approche axiomatique et l'approche constructive des classes de Chern.

Références

Articles de M.-H. Schwartz en lien direct avec cet article (ordre chronologique).

[S1] M.-H. Schwartz, *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques,* CRAS t. 212 (1941), 382-384.

[S2] M.-H. Schwartz, *Formules apparentées à la formule de Nevanlinna-Ahlfors pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre,* Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), 317-360.

[S3] M.-H. Schwartz, *Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet pour certaines applications d'une variété à n dimensions dans une autre,* Acta Math. 91 (1954), 189-244.

[S4] M.-H. Schwartz, *Espaces pseudo-fibrés et systèmes obstructeurs*, Bull. Soc. Math. France, 88 (1960), 1-55.

[S5] M.-H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe,* CRAS t. 260 (1965) 3262-3264 et 3535-3537.

[S6] M.-H. Schwartz, *Classes et caractères de Chern des espaces linéaires*, CRAS Paris Sér. I. Math. 295 (1982), 399–402.

[S7] M.-H. Schwartz, *Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification,* CRAS t. 303 (1986), n° 6.

[S8] M.-H. Schwartz, *Une généralisation du théorème de Hopf pour les champs sortants,* CRAS t. 303 (1986), n° 7.

[BS] J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe,* Astérisque 82-83, exposé 6.

[S9] M.-H. Schwartz, Champs radiaux sur une stratification analytique, Travaux en cours, 39 (1991), Hermann, Paris.

[S10] M.-H. Schwartz, Classes de Chern des ensembles analytiques, Actualités Mathématiques, 2000, Hermann, Paris. ISBN : 2 7056 6393 2.

Autres articles (ordre alphabétique).

[BBFGK] G. Barthel, J.-P. Brasselet, K.-H. Fieseler, O. Gabber and L. Kaup, *Relèvement de cycles algébriques et homomorphismes associés en homologie d'intersection*, Ann. of Math. 141, 1995, 147–179.

[B] J.P. Brasselet *Existence des classes de Chern en théorie bivariante,* Astérisque 101-102, (1983).

[Ch1] S.S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. Math. **45** (1944), 747-752.

[Ch2] S.S. Chern, *Characteristic classes of hermitian manifold*, Ann. Math. **47** (1946), 85-121.

[FM] W. Fulton and R. MacPherson *Categorical framework for the study of Singular spaces* Mem. Amer. Math. Soc., 243 (1981).

[KT] H. King and D. Trotman, *Poincaré-Hopf Theorems on Singular Spaces* , www.cmi.univ-mrs.fr/ trotman/hopf2007.pdf

[K] M. Kwieciński, *Sur le transformé de Nash et la construction du graphe de MacPherson*, In Thèse, université de Provence, 1994.

[LT] Lê D. T. et B. Teissier. *Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*, Ann. of Math 114 1981, 457-491.

[Mi] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint* , Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[Sa1] C. Sabbah, *Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux,* Astérisque **130** (1986), 239–241.

[Sa2] C. Sabbah *Espaces conormaux bivariants* Thèse, École polytechnique, Paris, 1986.

[S] L. Schwartz, Un mathématicien aux prises avec le siècle, Odile Jacob, 1997.

[Si] S. Simon, *A theorem of Poincaré-Hopf type*, arXiv :0905.4559, May 2009.

[Wh3] H. Whitney *Tangents to an analytic variety,* Ann of Math 81, 496 – 549 (1965).

[Wh4] H. Whitney. *Local properties of Analytic Varieties*, Symposium in honor of M. Morse, Princeton Univ. Press, edited by S. Cairns (1965).

[Y] S. Yokura *Algebraic Cycles and Intersection Homology* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 103, n° 1, 1988.

[Z] J. Zhou, *Classes de Chern pour les variétés singulières, classes de Chern en théorie bivariante,* Thèse Marseille (1995).