

# EN HOMMAGE À GÉRARD RAUZY

---

*Il y a tout juste un an Gérard Rauzy nous quittait. La Gazette publie ci-dessous trois textes qui lui sont consacrés. Le premier a été prononcé à ses obsèques par J.-C. Risset, le deuxième est une page de souvenirs personnels par Y. Meyer, et le dernier, par P. Liardet, est la traduction d'un texte à paraître dans la revue Uniform Distribution Theory.*

## Gérard Rauzy

Jean-Claude Risset<sup>1</sup>

---

Je voudrais évoquer Gérard Rauzy, unanimement regretté. Quelques amis proches qui ne peuvent être ici aujourd'hui m'ont témoigné de leur admiration à son œuvre scientifique, mais aussi de leur attachement à sa personnalité riche et passionnée.

Gérard était un mathématicien de haute volée, qui avait son propre cheminement, avec parfois des raccourcis saisissants. Les mathématiques étaient pour lui un défi et un plaisir. Son domaine de prédilection était la théorie des nombres, un domaine qui peut paraître théorique, spéculatif et éloigné de la réalité : mais, comme le dit son collègue et ami Yves Meyer, ses recherches ont explosé lorsqu'il a relié ses travaux à l'étude des systèmes dynamiques – tout ce qui évolue est un système dynamique, depuis le devenir des étoiles et des planètes jusqu'au temps qu'il fait. Pour son 60<sup>e</sup> anniversaire, ses collègues lui ont dédié une conférence au joli titre : « Systèmes dynamiques – du cristal au chaos ».

Gérard était friand d'une mathématique sensible, s'appliquant avec pertinence dans notre monde quotidien. Il voyait dans l'informatique une nouvelle frontière des mathématiques. Il a été un des grands promoteurs des mathématiques « discrètes » – terme distingué pour qualifier ce qui est discontinu : ce sont ces mathématiques discrètes qui sont à l'œuvre dans les disques compacts, sur lesquels les sons sont enregistrés sous forme d'une suite de nombres. Et Gérard avait des idées de structures mathématiques susceptibles de s'appliquer à toutes sortes de circonstances, depuis des automates, auxquels Tom Johnson et Jean-Paul Allouche ont fait composer de la musique, jusqu'à des idées d'emboîtement pouvant, qui sait, renouveler mosaïques et tomettes : sur Internet, on trouve de nombreuses références aux fractals de Rauzy, qui permettent de réaliser d'extraordinaires pavages, lesquels peuvent même occuper l'espace.

Mathématicien éminent, Gérard a été le directeur du premier Institut CNRS de mathématiques, créé à Luminy en 1992. Il est l'auteur d'une liste impressionnante

---

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, Marseille.

d'articles scientifiques, et ses contributions sont remarquables. Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les graphes de Rauzy, l'induction de Rauzy sont utilisés dans le monde entier. Gérard a été invité à enseigner au Japon et aux États-Unis, et il a inspiré de nombreux chercheurs en leur faisant aimer sa discipline.

Comme Yves Meyer et Yves Hellegouarch, j'ai connu et apprécié Gérard à l'École normale de la rue d'Ulm. Gérard ne se livrait pas tout de suite et pouvait paraître taciturne, mais il s'animait remarquablement suivant les circonstances. Lors d'un des premiers cours, Jean-Pierre Serre, mathématicien connu qui faisait son cours sans notes, a eu un trou lors d'une démonstration mathématique. Gérard est intervenu de sa voix posée pour proposer une démarche complètement originale vers la démonstration : Serre a été vivement impressionné, comme chacun d'entre nous.

Mais l'univers de Gérard n'était nullement limité aux mathématiques. Yves Meyer rappelle que dès 1957 il aimait à porter un blouson noir : il a peut-être inspiré les « rockers » mauvais garçons de Bandol ! Il pratiquait lui-même la pelote basque, mais il venait parfois en supporter enthousiaste aux matches de rugby des copains. À l'occasion, il était joyeux et plein d'humour.

Gérard avait une conscience politique personnelle, exigeante et généreuse. À l'École normale il prenait parti pour l'unité syndicale, pour le trotskysme et contre le stalinisme : il insistait qu'une révolution ou un système social ne pouvait aller jusqu'à la perfection du bonheur. Au moment de la guerre d'Algérie, il a contribué à protéger les scientifiques engagés pour la paix qui étaient menacés par l'OAS. Il a été proche de Cornelius Castoriadis, fondateur avec Claude Lefort du mouvement Socialisme et barbarie. Mai 1968 a compté pour lui – mais de cette période je ne puis témoigner, étant alors à l'étranger.

Gérard a grandi au vallon des Auffes. Homme libre, il a bien sûr chéri la mer. La cybernétique est l'art du timonier : avec Claire, Gérard a fait des croisières en Méditerranée sur un beau voilier.

Gérard faisait tout de manière généreuse, voire excessive. Il avait le goût des bonnes choses, de la cuisine ayant un accent – comme était celle du restaurant Arnoult. À ma première venue à Marseille, il m'a convié à déjeuner dans son jardin sous les pins du Roy d'Espagne : j'y habite depuis. Gérard était convivial, préparant parfois lui-même des plats comme les supions à l'encre pour des réunions amicales chaleureuses. Il a accueilli beaucoup d'amis : en ont témoigné notamment Yves Hellegouarch et Yves Meyer, lequel narre une anecdote :

« Anne et moi avons fait avec lui de merveilleuses promenades. Une fois, Claire, Gérard, Antoine, Stéphane, Anne et moi étions partis à l'aventure dans les calanques, sans emporter de quoi manger. Nous avons commencé cette excursion à midi. Nous nous perdîmes. À deux heures de l'après-midi tout le monde mourait de faim et nous étions toujours là-haut, dans un désert de pierre inondé de lumière. Nous avions à nos pieds du thym à profusion et nous rêvions d'une côtelette de mouton grillée avec ce thym. Et soudain, tout en bas, minuscule, presque invisible, dans le fond d'une sorte de gorge, une fumée, un restaurant. La seule façon de descendre était un éboulis. Qu'à cela ne tienne ! Nous avons dévalé avec les pierres et, une demi-heure plus tard, nous étions attablés et commençons le repas par un pastis. Aujourd'hui je soupçonne Gérard d'avoir tout réglé à l'avance. »

Depuis deux ans, Gérard était atteint d'un mal implacable auquel se sont ajoutées de malencontreuses fractures. Geneviève et Evelyne l'ont aidé et accompagné jusqu'au bout dans cette période difficile, mais pendant laquelle, heureusement, Gérard n'a pas paru souffrir ni perdre le moral.

À ses fils, Antoine et Stéphane, qui ont tous deux accompli de brillants travaux scientifiques (Antoine en mathématique et informatique, Stéphane en astrophysique – il travaille aujourd'hui en informatique), à Geneviève, à Evelyne, j'exprime toute la sympathie des amis de Gérard, dont bien sûr celle de Rozenn et la mienne, et je tiens à dire que nous garderons de lui le vif souvenir d'une personne intense, créative et cordiale.

## Souvenirs de Rauzy

Yves Meyer

---

Rauzy et moi étions déjà des bons camarades à l'École. Il portait alors un blouson noir : il aimait ainsi avoir l'air d'un mauvais garçon. À l'époque les voyous parisiens portaient des blousons noirs et s'appelaient, pour cette raison, « les blousons noirs ». Un jour, dans l'un de ces restaurants bon marché que nous aimions, Rauzy interpella le serveur et, lui montrant le pot de moutarde, lui dit : « Garçon, votre yaourt n'est pas frais ». J'étais bon public et j'admirais sans réserve l'humour de Rauzy. Nous sommes devenus de vrais amis dans les années qui suivirent. Nous faisons tous les deux de la théorie des nombres. À cette époque mes travaux de recherche s'orientaient vers ce qui deviendrait la théorie des quasi-cristaux. Chemin faisant j'avais réussi à démontrer l'existence d'une suite croissante d'entiers  $n_k$  telle que pour tout nombre réel  $\alpha$ , la suite  $\alpha n_k$  soit équirépartie modulo 1 si et seulement si  $\alpha$  est transcendant. En 1970 Rauzy pulvérisa ce résultat en caractérisant les ensembles normaux. J'étais émerveillé. J'ai ensuite abandonné mes recherches sur la répartition modulo 1 alors que les découvertes de Rauzy explosèrent quand il relia ses travaux en théorie des nombres à l'étude des systèmes dynamiques (suites automatiques, itérations). Rauzy avait épousé Claire qui était merveilleusement frondeuse, anarchique et généreuse. Claire et Gérard aimaient séduire, vivre follement et intensément ; ils étaient libres et irrespectueux. J'étais subjugué. Gérard et Claire eurent deux garçons, Antoine et Stéphane. Rauzy s'était installé à Marseille. Je l'y ai souvent revu. Anne et moi avons fait avec lui de merveilleuses promenades. Une fois, Claire, Gérard, Antoine, Stéphane, Anne et moi étions partis à l'aventure dans les calanques, sans emporter de quoi manger. Nous avons commencé cette excursion à midi. Nous nous perdîmes. À deux heures de l'après-midi tout le monde mourait de faim et nous étions toujours là-haut, dans un désert de pierre inondé de lumière. Nous avons à nos pieds du thym à profusion et nous rêvions d'une côtelette de mouton grillée avec ce thym. Et soudain, tout en bas, minuscule, presque invisible, dans le fond d'une sorte de gorge, une fumée, un restaurant. La seule façon de descendre était un éboulis. Qu'à cela ne tienne ! Nous avons dévalé, dégringolant avec les pierres et, une demi-heure plus tard, nous étions attablés et commençons le repas par un pastis. Aujourd'hui je soupçonne Gérard d'avoir tout

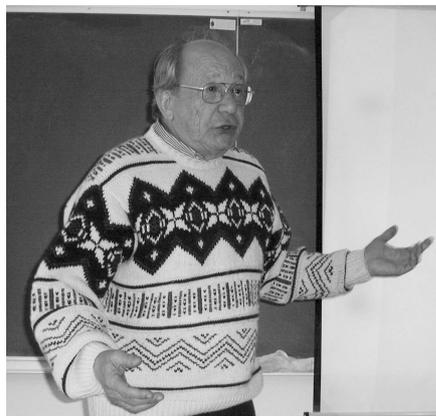
réglé à l'avance. Un autre souvenir merveilleux m'a été raconté par Yvette Amice qui fut une grande amie de Rauzy. Elle était invitée chez eux, au Roy d'Espagne, une belle résidence dans les pins, tout près des calanques. Rauzy avait bien bu au dîner et s'était lancé dans un long discours politique. Mais Yvette, Claire et les enfants épuisés étaient allés se coucher. Rauzy qui avait besoin d'un interlocuteur s'est alors adressé au cochon d'Inde des enfants et a continué devant ce public, réduit à un hamster, sa démonstration des bienfaits du trotskisme. J'ai gardé une lettre de Rauzy qu'il termina en s'amusant à faire une traduction automatique de l'anglais au français, ce qui donnait : « mes meilleurs regards sur ta femme ». Rauzy faisait tout de façon généreuse et excessive. Il buvait avec passion. Il fumait sans cesse. Rauzy et Claire avaient acheté un beau voilier et faisaient des croisières en Méditerranée. Claire est morte en 1996 d'un arrêt cardiaque à bord de ce voilier, en pleine traversée. J'ai tant aimé Claire et Gérard. Ils vivent en moi.

## Gérard Rauzy

(1938 – 2010)

Pierre Liardet<sup>1</sup>

Gérard Rauzy est né le 29 mai 1938 à Paris. Professeur émérite de l'université Aix-Marseille II, il est décédé à Marseille le 4 mai 2010. Mathématicien inventif et subtil, connu pour ses travaux en équirépartition modulo un et en théorie ergodique des nombres, notamment sur les systèmes dynamiques associés à des substitutions ou encore à des numérations généralisées, les unes issues de certains nombres algébriques et d'échange de morceaux (structures fractales dites de Rauzy), les autres provenant de substitutions ou de systèmes induits. La photo ci-contre a été prise par C. Radoux au colloque *Nombres et suites*. . . organisé par l'équipe de théorie des nombres de Saint-Étienne (22-24 avril 2001). Le texte qui suit est la traduction de celui qui accompagne le volume spécial édité par le journal *Uniform Distribution Theory*<sup>2</sup> (Vol. 7, fasc. 1 et 2 (2012)) en hommage à G. Rauzy. Il évoque sa jeunesse et retrace son œuvre.



Gérard débute ses études primaires à Paris, puis sa famille se déplace à Marseille. Le jeune garçon est alors admis en cinquième avec deux ans d'avance dans le célèbre Lycée Thiers de la cité phocéenne. Il est brillant en mathématiques,

<sup>1</sup> Université d'Aix-Marseille.

<sup>2</sup> Journal en accès libre à l'url <http://udt.mat.savba.sk/>

en physique, en sciences naturelles, enfin dans toutes les matières à l'exception de l'histoire et la géographie avec des notes catastrophiques. Il a tout juste 16 ans lorsqu'il passe son Baccalauréat Math'élé. Après ses classes préparatoires à Thiers, il réussit le concours d'entrée à l'École Normale Supérieure de Paris, rue d'Ulm (promotion 1957). Le jeune normalien consacre sa troisième année à préparer et passer l'agrégation de mathématiques (1960). Il obtient dans la foulée son diplôme de mathématiques approfondies en théorie des nombres, avec un remarquable mémoire sur les approximations diophantiennes [1], sous la direction de C. Pisot et R. Salem. Dans le même temps, il participe au *Séminaire de théorie des nombres* de Paris, créé en 1959 par Charles Pisot, Hubert Delange et Georges Pólya. Son premier exposé [2] de séminaire prépare le terrain pour un second, consacré aux séries  $L$  et le théorème de Dirichlet sur la densité des nombres premiers en progressions arithmétiques [3]. Il fréquente activement les séminaires parisiens avec des exposés sur l'approximation diophantienne [4], les équations diophantiennes exponentielles [5] et la transcendance [6].

En 1963, G. Rauzy s'intéresse aux suites d'entiers satisfaisant à des récurrences linéaires dont il étudie la périodicité modulo un entier [7]. Il concentre ensuite son attention sur le problème général suivant : lorsqu'une propriété  $P(n)$  vérifiée par tous les nombres entiers naturels implique une autre propriété, cette dernière est-elle encore vraie si  $P(n)$  n'est vérifiée que pour les entiers  $n$  d'un sous-ensemble strict, mais relativement conséquent, de l'ensemble  $\mathbf{N}$  des entiers naturels ? Pour aborder ce programme, G. Rauzy introduit la notion de *fréquence*  $\alpha(J)$  pour toute partie  $J$  de  $\mathbf{N}$ . Par définition,  $\alpha(J)$  est la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des nombres réels  $A \geq 1$  tels que, pour tout  $x_0 > 0$ , il existe un entier  $x$ ,  $x > x_0$ , pour lequel tous les entiers de l'intervalle  $[x, Ax[$  appartiennent à  $J$ . Il obtient un nombre impressionnant de résultats liés à cette définition [8, 9, 10, 11] et rassemblés dans sa thèse d'État [12] écrite sous la direction de Charles Pisot et soutenue en 1965. Donnons deux retombées significatives de ce travail.

– Généralisation d'un résultat classique de G. Pólya : supposons que  $f$  soit une fonction entière telle que  $\sup_{0 \leq \theta < 2\pi} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log |f(re^{i\theta})| < \log 2$ . Si  $f(J) \subset \mathbf{N}$  pour un sous-ensemble  $J$  de  $\mathbf{N}$  tel que  $\alpha(J) = \infty$ , alors  $f$  est un polynôme.

– Généralisation de résultats de C. Pisot et de R. Salem : soit  $\theta$  un nombre algébrique réel strictement plus grand que 1. Il existe un sous-ensemble  $J$  de  $\mathbf{N}$  avec  $\alpha(J) = \infty$  et un nombre réel  $\lambda \neq 0$  tels que

$$\overline{\lim}_{n \in J} \|\lambda \theta^n\| = 0$$

(où  $\|x\| = \min_{k \in \mathbf{Z}} |x - k|$ ) si, et seulement si,  $\theta$  est un nombre de Pisot ou de Salem. Le cas où  $\alpha(J) > 1$  mais avec  $\lambda$  algébrique implique que  $\theta$  est un nombre de Pisot et  $\lambda \in \mathbf{Q}(\theta)$ .

De 1965 à 1967, G. Rauzy occupe un poste de « Maître de Conférences » (cette dénomination était à l'époque l'équivalent de la notion actuelle de Professeur de deuxième classe) à la Faculté des Sciences de Lille. Il est ensuite recruté comme Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille puis rejoint, à partir de 1971, l'université Aix-Marseille II qui vient tout juste d'être créée. Par la suite il jouera un rôle important dans le processus de création du *Centre International de Rencontres Mathématiques* (1981) et un peu plus tard dans la mise en place de l'unité propre

du CNRS en mathématiques discrètes (1992) dont il sera le premier directeur. Après 1995, cette unité élargira considérablement ses domaines de recherche pour devenir l'*Institut de Mathématiques de Luminy*.

Arrivé à Marseille en 1967, G. Rauzy donne immédiatement une forte impulsion à la recherche par l'intermédiaire du *Séminaire de Théorie des Nombres local*, créé par André et Christiane Blanchard. C'est à cette époque qu'il s'intéresse plus particulièrement à deux nouveaux sujets de recherche. Le premier concerne une classe de fonctions méromorphes stables sur certains ensembles de nombres algébriques [14, 15, 18]. Plus précisément, il s'agit de déterminer des ensembles de nombres algébriques  $E$  tels que, si une fonction  $f$  méromorphe à l'infini est telle que  $f(n)$  soit dans  $E$  pour tout entier  $n$  assez grand alors elle est algébrique et même mieux, appartient à une classe pré-désignée de fonctions algébriques. Lorsque  $f$  est déjà algébrique, un exemple typique de résultat<sup>3</sup> est le suivant : si  $P(X, Y)$  est un polynôme en deux variables à coefficients rationnels tel que pour tout nombre de Pisot  $\alpha$  une des racines du polynôme  $P(\alpha, Y)$  est aussi un nombre de Pisot alors, soit  $P(X, \theta) = 0$  pour un nombre de Pisot  $\theta$ , soit il existe un entier  $m \geq 1$  tel que  $X^m - Y$  divise  $P(X, Y)$ . Le second sujet de recherche porte sur l'équirépartition, un domaine de recherche où les contributions de G. Rauzy sont particulièrement originales et profondes, mettant en œuvre des constructions ingénieuses ainsi que des outils mathématiques variés, ouvrant de nouveaux champs d'investigations. Voyons quelques-uns de ses résultats. Pour cela, nous ferons usage de définitions et théorèmes classiques en équirépartition modulo un. Le lecteur intéressé, mais peu familiarisé avec cette théorie, est invité à consulter les trois principales monographies sur le sujet<sup>4</sup>. Nous recommandons aussi la lecture du petit livre de G. Rauzy, tout aussi original que fascinant [29], publié en 1976, qui expose les résultats classiques sur l'équirépartition modulo un et dresse un cadre général pour de futurs développements.

En 1968, Michel Mendès France introduit la notion d'*ensemble normal*<sup>5</sup> et pose le problème de caractériser naturellement ces ensembles. Rappelons qu'un ensemble  $E$  de nombres réels est dit normal s'il existe une suite de nombres réels  $\Lambda = (\lambda_k)_k$  telle que  $x$  appartient à  $E$  si, et seulement si, la suite  $x\Lambda$  est équirépartie modulo un. Le cas où  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbf{Z}$  est rapidement résolu par F. Dress et M. Mendès France<sup>6</sup>. En introduisant une construction ingénieuse par blocs, G. Rauzy montre tout d'abord que  $\mathbf{Q}^*$  est normal [17] et presque en même temps (voir [16]) montre qu'un ensemble normal  $E$  est caractérisé par les deux conditions suivantes :

- (i)  $0 \notin E$  et  $qE \subset E$  pour tout entier rationnel  $q$  non nul ;
- (ii) il existe une suite d'applications continues  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $E = \{x \in \mathbf{R} ; \lim_n f_n(x) = 0\}$ .

<sup>3</sup> Exposé au *Séminaire de théorie des nombres* de Bordeaux, 1968-69, non publié.

<sup>4</sup> *Uniform Distribution of Sequences* par L. Kuipers and H. Niederreiter, John Wiley and Sons Inc. (1974) ; *Sequences, Discrepancies and Applications* par M. Drmota et R. Tichy, Springer-Verlag Berlin (1997) ; *Distribution of Sequences: A Sampler* par O. Strauch et S. Porubsky, Peter Lang Pub. Inc. (2005).

<sup>5</sup> *Séminaire DPP, Théorie des Nombres*, t. 9, N° 2 (1967-1968), exp. N° 16, p. 1-4.

<sup>6</sup> *Séminaire DPP, Théorie des Nombres*, t. 10, N° 2 (1968-1969), exp. N° 17 p. 1-5.

La méthode de construction de suites par blocs est aussi la pierre angulaire utilisée dans [27] pour construire une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels, complètement équirépartie modulo un avec la surprenante propriété d'être de basse discrédance. Plus précisément

$$\limsup_N ND_N^*(u) / \log N \leq 1 / \log 2$$

où  $D_N^*(u) := \sup_{0 \leq a < 1} \left| \frac{1}{N} \text{card}\{0 \leq n < N; 0 \leq u_n < a\} - a \right|$  est la discrédance à l'origine au rang  $N$  de la suite  $u$ .

Revenons aux ensembles normaux. Il est facile de démontrer que  $\mathbf{R}^*$  est normal, par exemple avec une suite  $(k^c)_k$  ( $c > 0$  distinct d'un entier). Un problème intéressant est alors de considérer des suites *naturelles* qui croissent plus vite que tout polynôme mais plus lentement que toute exponentielle. Dans [19, 20, 21, 23, 24], G. Rauzy étudie les suites de type  $(f(n))_n$  où  $f$  est une fonction entière de croissance lente. Par exemple, il prouve dans [21] que si  $f$  n'est pas un polynôme et si  $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$  avec

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log \log r} < 5/4$$

où  $M(r) := \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ , alors les suites  $(\lambda f(k))_k$  ( $\lambda \in \mathbf{R}^*$ ) sont complètement équiréparties modulo un. La démonstration met en jeu les méthodes de Vinogradov pour estimer des sommes de Weyl rattachées à certaines approximations polynomiales de  $f$ .

Avec l'organisation à Marseille d'une conférence internationale sur la répartition uniforme [24], G. Rauzy commence l'étude de problèmes de stabilité en relation avec la distribution des suites et la notion d'indépendance statistique [22, 25, 26, 28]. Rappelons que deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  dans un espace métrisable compact  $X$  sont dites (statistiquement) *indépendantes* si pour toutes applications continues  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  et  $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ , on a

$$\lim_N \left( \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_n)g(u_n) - \left( \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_n) \right) \left( \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(u_n) \right) \right) = 0.$$

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer un joli résultat qui met en évidence l'esprit créatif de G. Rauzy pour résoudre une question de M. Mendès France.<sup>7</sup> Soit un entier  $r$  supérieur ou égal à 2 et soit  $B(r)$  l'ensemble des nombres réels normaux en base  $r$ . Après l'introduction de la notion de *bruit supérieur* d'un nombre réel  $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n / r^{n+1}$  en base  $r$  comme étant la quantité

$$\beta(x) = \limsup_{s \rightarrow \infty} \left( \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \inf_{\varphi \in E_s} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \inf\{1, |c_n - \varphi(c_{n+1}, \dots, c_{n+s})|\} \right) \right)$$

où  $E_s$  désigne l'ensemble des applications de  $\mathbf{R}^s$  dans  $\mathbf{R}$ , G. Rauzy montre dans [28] que  $\gamma \in \mathbf{R}$  vérifie  $\gamma + B(r) \subset B(r)$  si, et seulement si, le bruit supérieur de  $\gamma$  est nul. Un tel  $\gamma$  est aussi caractérisé en termes de systèmes dynamiques. Plus en détails, soit  $K_c$  la fermeture de l'orbite de  $c := (c_0, c_1, c_2, \dots)$  suivant le décalage défini sur l'ensemble  $\{0, 1, \dots, r-1\}^{\mathbf{N}}$  muni de la topologie produit. Alors,  $\beta(\gamma) = 0$  signifie que l'entropie de toute mesure invariante par le décalage et de support dans  $K_c$  est nulle. En bref,  $c$  est déterministe pour le décalage. La notion de *bruit inférieur* est aussi introduite et les nombres normaux en base  $r$  sont alors exactement ceux

<sup>7</sup> Séminaire DPP, Théorie des nombres (1973–74), exp. N° 7, 6 p.

ayant un bruit inférieur maximal (dans ce cas, bruit inférieur et bruit supérieur sont égaux à  $(r - 1)/r$ ).

Partant d'une substitution particulière  $\pi$  sur quatre lettres (explicitement  $\pi(1) = 142$ ,  $\pi(2) = 1422$ ,  $\pi(3) = 143342$  et  $\pi(4) = 14342$ ), G. Rauzy met en place dans un exposé au séminaire DPP [30], les idées et les principaux outils pour étudier les suites symboliques provenant de substitutions convenables  $\sigma$  sur un alphabet fini, ou de systèmes dynamiques en théorie des nombres. Cette approche implique des interactions entre : l'analyse combinatoire du langage d'un point fixe  $u = u_0u_1u_2 \cdots$  de  $\sigma$  ; la distribution des fréquences des lettres apparaissant dans  $u$  ; l'ergodicité stricte du système dynamique construit à partir de  $u$  et le décalage ; l'identification d'un tel système à un échange d'intervalles  $T$  ou à une transformation géométrique semblable ; la reconstruction de  $u$  par le codage symbolique d'une orbite suivant  $T$  et une partition appropriée ; le processus de renormalisation issu de transformations induites, etc.

Ce programme de recherche, stimulé par les travaux de J.-P. Conze, T. Kamae, M. Keane, M. Mendès France et W. Veech, conduit G. Rauzy à produire une série d'articles et de documents en rapport avec la théorie ergodique [27, 30, 31, 33, 35, 36, 44, 48, 52] ou impliquant des suites symboliques substitutives et leur complexité [37, 38, 40, 41, 43, 45, 50, 51, 52]. Voir aussi [47].

Une partie  $A$  d'un espace compact métrisable  $X$  est dite un ensemble à reste borné pour une suite donnée  $(u_n)_{n \geq 0}$  de  $X$  si  $\sup_N (\text{card}\{0 \leq n < N; u_n \in A\} - aN) < +\infty$  pour un certain  $a$ . Le problème de trouver des ensembles à reste borné pour une suite telle que  $n \mapsto n\alpha$  dans  $\mathbf{T}^d$  ( $d \geq 2$ ) est étudié dans [44], mais l'idée maîtresse de ce travail était déjà en germe dans un article fondateur [40] qui met en évidence une relation essentielle entre le point fixe  $\omega$  de la substitution  $1 \rightarrow 12$ ,  $2 \rightarrow 13$  et  $3 \rightarrow 1$  et la distribution de suites  $(m\eta)_n$  modulo  $\mathbf{Z}^2$  où  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  est un vecteur dans  $\mathbf{R}^2$  tel que  $\{1, \eta_1, \eta_2\}$  forme une base du  $\mathbf{Z}$ -module des entiers algébriques du corps cubique engendré par le nombre tribonacci  $\theta$  (nombre de Pisot racine du polynôme  $X^3 - X^2 - X - 1$ ).

Les fractals de Rauzy apparaissent pour la première fois dans cet article. Ils sont constitués de trois ensembles,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$ , formant un morcellement  $\mathcal{M}$  de  $\mathbf{R}^2$  modulo  $\mathbf{Z}^2$ , c'est-à-dire qu'ils vérifient les propriétés suivantes : (i) chaque  $\Omega_i$  est ouvert, borné et connexe ; (ii) les ensembles  $\Omega_i + \mathbf{Z}^2$  sont mutuellement disjoints et leur union est dense dans  $\mathbf{R}^2$  ; (iii) chaque  $\Omega_i$  est disjoint de toute translation  $\Omega_i + g$  par un vecteur  $g \neq 0$  à coefficients entiers. Le principal résultat de [40] affirme l'existence d'un tel morcellement. Celui-ci permet d'identifier la translation  $T : x \rightarrow x + \xi \pmod{\mathbf{Z}^2}$  (avec  $\xi = (1/\theta, 1/\theta^2)$ ) à un échange de morceaux construit à partir des  $\Omega_i$  (voir la figure 1, extraite de [40]). De plus, par construction, les  $\Omega_i$  sont des ensembles à reste borné pour la suite  $(T^n(0))_n$  et  $\omega_n = k$  si, et seulement si,  $T^n(0) \in \Omega_k$ . En outre, le nombre de mots de longueur  $n$  apparaissant dans le point fixe  $\omega$  est égal à  $p(n) = 2n + 1$ . Ce type de complexité du langage d'une suite symbolique ayant une dynamique associée minimale est exploré dans [41, 52]. Prévoyant des développements ultérieurs, G. Rauzy écrit dans l'introduction de [40] : *le lecteur pourra constater que beaucoup de raisonnements s'étendent à des situations plus générales*. Remarque qui pourrait s'appliquer à bien d'autres de ses résultats.

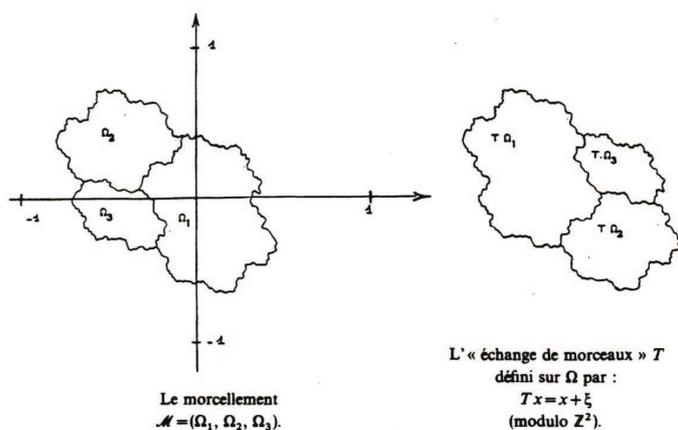


FIG. 1: Morcellement associé au nombre tribonacci  $\theta$  et la translation  $T$  par  $\xi = (1/\theta, 1/\theta^2)$  modulo  $\mathbb{Z}^2$  qui réalise un échange de trois morceaux  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  aux frontières près.

G. Rauzy était attiré par les problèmes dans l'esprit de P. Erdős. L'article [54] traite d'ensembles de nombres entiers positifs qui ne contiennent pas trois termes en progression arithmétique. À l'opposé, l'article [55] construit une large famille de suites croissantes  $(a_n)_{n \geq 1}$  d'entiers positifs pour chacune desquelles l'ensemble des sommes finies  $\sum_{n \in F} \varepsilon_n a_n$ , avec  $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ , contient une progression arithmétique infinie.

Nous terminons ce court survol par la liste, en suivant l'ordre chronologique, des étudiants de Rauzy qui ont soutenu leur thèse sous sa direction : P. Liardet, A. Thomas, A. Cissé, E. Pouspourikas, C. Mauduit, Th. Tapsoba, P. Martinez, S. Fabre, P. Gonzalez, M.-L. Santini, P. Alessandri, L. Vuillon, N. Tchekhovaya, A. Messaoudi, and V. Canterini. Tous ont contribué à prolonger les travaux de leur Directeur dans diverses directions.

Nous remercions chaudement Evelyne Rauzy pour nous avoir communiqué des informations sur la vie privée de son frère, Jean-Paul Allouche pour ses encouragements et Jeffrey Shallit pour son aimable assistance dans la rédaction de la version anglaise.

## Références

- [1] RAUZY, G. : *Approximation diophantienne des nombres algébriques*, Faculté des Sciences de l'Université de Paris. Mathématiques approfondies. Théorie des nombres. 1960/61 Secrétariat mathématique, Paris, 60 p., 1961.
- [2] RAUZY, G. : *Caractères sur les groupes abéliens finis. Caractères sur les classes de restes*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 2 (1960-1961), Exposé N° 3, 7 p.
- [3] RAUZY, G. : *Les séries L et le théorème de Dirichlet*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 2 (1960-1961), Exposé N° 4, 9 p.
- [4] RAUZY, G. : *Approximations diophantiennes linéaires homogènes*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 3 (1961-1962), Exposé N° 1, 18 p.

- [5] RAUZY, G. : *Équations de la forme  $\lambda\alpha^x - \mu\beta^y = \nu$  aux inconnues  $x, y$  (entiers  $\geq 0$ )*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, **4** (1962-1963), Exposé N° 9, 13 p.
- [6] RAUZY, G. : *Points transcendants sur les variétés de groupe*. Séminaire Bourbaki, **16** (1963-1964), Exposé N° 276, 8 p.
- [7] RAUZY, G. : *Relations de récurrence modulo  $m$* . Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, **5** (1963-1964), Exposé N° 2, 10 p.
- [8] RAUZY, G. : *Fonctions entières prenant des valeurs entières*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, **6** n° 1 (1964-1965), Exposé N° 8, 10 p.
- [9] RAUZY, G. : *Répartition modulo 1 pour des suites partielles d'entiers. Développements en série de Taylor donnés sur des suites partielles*. C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4881-4884.
- [10] RAUZY, G. : *Fonctions entières prenant des valeurs entières sur des ensembles partiels d'entiers*. C. R. Acad. Sci. Paris, **259** (1964), 19-21.
- [11] RAUZY, G. : *Suites partiellement récurrentes. Ensembles partiels d'entiers*. Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, **18** n° 1 (1964-1965), Exposé N° 13, 11 p.
- [12] RAUZY, G. : *Suites partiellement récurrentes (applications à la répartition modulo 1 et aux propriétés arithmétiques des fonctions analytiques)*. Annales de l'institut Fourier, **16** n° 1 (1966), 159-234
- [13] RAUZY, G. : *Ensembles arithmétiquement denses*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **265** (1967), A37-A38.
- [14] RAUZY, G. : *Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques*. Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 197-208.
- [15] RAUZY, G. : *Transformations rationnelles pour lesquelles l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan est stable*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **268** (1969), A305-A307.
- [16] RAUZY, G. : *Caractérisation des ensembles normaux*. Bull. Soc. Math. France, **98** (1970), 401-414.
- [17] RAUZY, G. : *Normalité de  $\mathbf{Q}^*$* . Acta Arith. **19** (1971), 43-47.
- [18] RAUZY, G. : *Ensembles de nombres algébriques et transformations rationnelles*. Colloque de Th. Nombres (1969, Bordeaux), Bull. Soc. math. France, Mémoire **25** (1971), 165-168.
- [19] RAUZY, G. : *Croissance et répartition modulo 1*. Séminaire de Théorie des Nombres 1971-1972, Univ. Bordeaux I, Talence (1972), Exp. N° 28, 9 p.
- [20] RAUZY, G. : *Fonctions entières et répartition modulo 1*. Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 409-415.
- [21] RAUZY, G. : *Fonctions entières et répartition modulo un. II*. Bull. Soc. Math. France, **101** (1973), 185-192.
- [22] RAUZY, G. : *Étude de quelques ensembles de fonctions définis par des propriétés de moyenne*. Séminaire de Théorie des Nombres, 1972-1973, Univ. Bordeaux I, Talence (1973), Exp. N° 20, 18 p.
- [23] RAUZY, G. : *Fonctions entières et répartition modulo 1*. Journées arithmétiques (1973, Grenoble), Bull. Soc. math. France, Mémoires **37** (1974), 137-138.
- [24] RAUZY, G. : *Répartition modulo 1*. Actes du Colloque de Marseille-Luminy, 4-7 Juin, 1974, G. Rauzy Edit. in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 475. Springer-Verlag, Berlin-New York, iv+258 p. (1975).
- [25] RAUZY, G. : *Équirépartition et entropie*, in [24], 155-175.
- [26] RAUZY, G. : *Nombres normaux et processus déterministes*. Journées Arithmétiques de Bordeaux (1974, Bordeaux), Soc. math. France, Astérisque, **24-25** (1975), 263-265.
- [27] RAUZY, G. : *Sur une suite liée à la discrédance de la suite  $(n\alpha)_{n \in \mathbf{N}}$* . C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **282** (1976), A1323-A1325.
- [28] RAUZY, G. : *Nombres normaux et processus déterministes*. Acta Arith. **29**, n° 3 (1976), 211-225.
- [29] RAUZY, G. : *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*. Le Mathématicien, N° 15. Collection SUP. Presses Universitaires de France, Paris (1976), 133 p.
- [30] RAUZY, G. : *Une généralisation du développement en fraction continue*. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, **18** n° 1 (1976-1977), Exposé N° 15, 16 p.
- [31] RAUZY, G. : *Répartition modulo 1*. Journées Arithmétiques de Caen (Univ. Caen, Caen, 1976), in Astérisque **41-42**, Soc. Math. France, Paris (1977), 81-101.
- [32] RAUZY, G. : *Les zéros entiers des fonctions entières de type exponentiel*. Séminaire de Théorie des Nombres 1976-1977, Univ. Bordeaux I, Talence (1977), Exp. N° 6, 10 p.

- [33] RAUZY, G. : *Répartition de suites et équations fonctionnelles associées*. Monatsh. Math. **83** (1977), n° 4, 315–329.
- [34] PARENT, D. P. (coauteurs : BARSKY, D. – BERTRANDIAS, F. – CHRISTOL, G. – DECOMPS, A. – DELANGE, H. – DESHOUILLERS, J.-M. – LAMÈCHE-GÉRARDIN, K. – LAGRANGE, J. – NICOLAS, J.-L. – PATHIAUX, M. – RAUZY, G. – WALDSCHMIDT, M., avec une préface de Ch. Pisot et des remarques préliminaires de J.-L. Nicolas). *Exercices de théorie des nombres*. Gauthier-Villars, Paris, (1978) v+307 p.
- [35] RAUZY, G. : *Échanges d'intervalles et transformations induites*. Acta Arith. **34** (1979), n° 4, 315–328.
- [36] KEANE, M. S. – RAUZY, G. : *Stricte ergodicité des échanges d'intervalles*. Math. Z. **174** (1980), n° 3, 203–212.
- [37] CHRISTOL, G. – KAMAE, T. – MENDÈS FRANCE, M. – RAUZY, G. : *Suites algébriques, automates et substitutions*. Bull. Soc. Math. France, **108** (1980), 401–419.
- [38] RAUZY, G. : *Mots circulaires et réseaux électriques*. Primaths, **4** (1981), 35–42.
- [39] RAUZY, G. : *Discrépance d'une suite complètement équirépartie*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, 5<sup>e</sup> série, **3**, n° 2 (1981), 105–112.
- [40] RAUZY, G. : *Nombres algébriques et substitutions*. Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 147–178.
- [41] RAUZY, G. : *Suites à termes dans un alphabet fini*. Séminaire de Théorie des Nombres, 1982–1983, Univ. Bordeaux I, Talence (1983), Exp. N° 25, 16 p.
- [42] DABOUSSI, H. – LIARDET, P. – RAUZY, G. éditeurs : *Colloque de théorie analytique et élémentaire des nombres*, Marseille, 30 mai – 3 juin (1983) in Publications Mathématiques d'Orsay **86-1**. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay (1986).
- [43] RAUZY, G. : *Des mots en arithmétique*. Avignon Conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983) in Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. B, **84-6** (1984), Univ. Claude-Bernard, Lyon, 103–113.
- [44] RAUZY, G. : *Ensembles à restes bornés*. Séminaire de Théorie des Nombres, 1983–1984, Univ. Bordeaux I, Talence (1984), Exp. N° 24, 12 p.
- [45] RAUZY, G. : *Mots infinis en arithmétique*. Automata on infinite words (Le Mont-Dore, 1984), Lecture Notes in Comput. Sci., **194**, Springer, Berlin, (1985), 165–171.
- [46] KANEMITSU, S. – NAGASAKA, K. – RAUZY, G. – SHIUE, J.-S. : *On Benford's law : the first digit problem*. Probability theory and mathematical statistics (Kyoto, 1986), in Lecture Notes in Math., **1299** (1988), Springer, Berlin-New York, 158–169.
- [47] LIARDET, P. – RAUZY, G. (Guest-Editors) : *Conference on Arithmetics and Coding Systems, Marseille – Luminy, France, 9-13 June 1987*, in Theoretical Comp. Sci., Fundamental Studies, Vol. 65, n° 2 (1989), ii + 150 p.
- [48] RAUZY, G. : *Rotations sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions*. Séminaire de Théorie des Nombres 1987–1988, Univ. Bordeaux I, Talence (1988), Exp. N° 21, 12 p.
- [49] AMICE, Y. – BERTIN, M.-J. – BERTRANDIAS, F. – DECOMPS, A. – DRESS, F. – GRANDET, M. – MENDÈS FRANCE, M. – RAUZY, G. : *Charles Pisot*. Acta Arith. **51** (1988), n° 1, 1–4.
- [50] RAUZY, G. : *Numbers and automata*. Formal properties of finite automata and applications (Ramatuelle, 1988) in Lecture Notes in Comput. Sci., **386**, Springer, Berlin (1989), 176–185.
- [51] RAUZY, G. : *Sequences defined by iterated morphisms*. Sequences (Naples/Positano, 1988), Springer, New York (1990), 275–286.
- [52] ARNOUX, P. – RAUZY, G. : *Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$* . Bull. Soc. Math. France, **119** n° 2 (1991), 199–215.
- [53] RAUZY, G. : *Low complexity and geometry*. Dynamics of complex interacting systems (Santiago, 1994), 147–177 in Nonlinear Phenom. Complex Systems, 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1996).
- [54] ERDÖS, P. – LEV, V. – RAUZY, G. – SÁNDOR, C. – SÁRKÖZY, A. : *Greedy algorithm, arithmetic progressions, subset sums and divisibility*. Paul Erdős memorial collection. Discrete Math. **200**, n° 1-3 (1999), 119–135.
- [55] HEGYVÁRI, N. – RAUZY, G. : *On the completeness of certain sequences*. Publ. Math. Debrecen **55** (1999), n° 3-4, 245–252.