# PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

## Sur la production des concepts en mathématiques

Vincent Gérard[1]

On a souvent reproché à la théorie traditionnelle de la formation des concepts de ne pas donner un décalque fidèle de la conceptualisation telle qu'elle est mise en œuvre dans les sciences, notamment en mathématiques. La critique est ancienne, mais nourrit encore les débats contemporains, entre autres dans la philosophie de tradition kantienne, trop souvent méconnue du public mathématique.

Au fond, ce que la philosophie aurait peut-être encore à apprendre de la mathématique, c'est une manière d'être général tout en étant concret. C'est l'universalité du concept, non pas en tant qu'il est générique, ni même en tant qu'il est spécifique, mais en tant qu'il est complet, c'est-à-dire, pour donner une définition des concepts complets qui sera précisée par la suite, en tant qu'il porte en lui-même la règle de variation permettant de subsumer le singulier sous l'universel, de lever les indéterminations. Ceci au sens où, par exemple, la donnée d'une équation dont les coefficients sont des variables va avec la spécification du domaine pour ces variables.

La question que je voudrais examiner est celle-ci : pourquoi les concepts mathématiques complets peuvent-ils constituer un objet d'analyses privilégié pour l'épistémologie des mathématiques ? Quel type d'épistémologie des mathématiques l'analyse du mode de production de concepts complets permet-elle de définir ?

Pour aborder cette question, je procéderai en trois étapes. Je rappellerai d'abord les grandes lignes de la théorie traditionnelle de la formation des concepts et les critiques qui lui ont été adressées. J'examinerai ensuite ce que la philosophie a tiré comme leçon concernant la production des concepts en se mettant à l'école de la mathématique. Enfin, j'indiquerai ce qui me semble être une tâche possible pour l'épistémologie des mathématiques aujourd'hui : non pas produire à son tour des concepts complets, mais prendre les concepts *complets* comme objets d'analyses privilégiés.

### La théorie traditionnelle de la formation des concepts et sa critique

Par « théorie traditionnelle de la formation des concepts », on entendra ici un corps de doctrine qui s'est constitué en Allemagne, au XVIII<sup>e</sup> siècle, dans la

[1] Université de Poitiers.

*Schulphilosophie* (Wolff est son école[2]) et qui s'est transmis jusqu'à Kant par l'intermédiaire de Reimarus, Crusius, Lambert et Tetens. Avant d'examiner dans ses grandes lignes cette théorie, et quelques-unes des critiques qui lui ont été adressées, commençons par répondre à une question préalable : qu'est-ce qu'un concept ? et plus précisément, qu'est-ce qu'un concept mathématique ?

### Qu'est-ce qu'un concept ?

Si l'on suit la classification des représentations qui est proposée par Kant au début de la *Dialectique transcendantale*, on dira qu'un concept est une représentation consciente, objective, générale et qui se rapporte à l'objet de manière médiate. Reprenons rapidement ces différents éléments.

Un concept est d'abord une représentation, c'est-à-dire une « détermination en nous que nous rapportons à quelque chose d'autre, dont elle tient pour ainsi dire lieu en nous », selon la définition de la représentation qu'on trouve dans la *Lettre à Beck* du 4 décembre 1792[3]. Et l'on sait que la représentation ne se rapporte pas au représenté comme un tableau figuratif à son objet, mais comme une relation à une autre relation, par exemple comme une relation entre des notes à une relation entre des sons.

Le concept est en outre une représentation consciente, c'est-à-dire dans le lexique kantien, une *perception (perceptio)* ; ce qui ne confère encore aucune spécificité au concept comme représentation, puisque Kant refuse, semble-t-il, l'hypothèse des représentations inconscientes : « Car comment pourrions-nous savoir que nous les avons, si nous n'en étions pas conscients ? » demande-t-il dans l'*Anthropologie d'un point de vue pragmatique*[4], en reprenant l'argument de Locke.

Cependant, il y a perception et perception. Le concept n'est pas une perception subjective (*sensation*), il ne se rapporte pas au sujet, comme une simple modification de son état. Quelqu'un me parle : j'ai une représentation objective, une connaissance ; quelqu'un crie si fort que j'en ai mal aux oreilles : j'ai la sensation de la douleur, j'éprouve mon état intérieur. Ici j'ai une sensation, là un concept, une perception objective, une connaissance (*cognitio*).

Le concept est donc une perception qui se rapporte à l'objet, mais il ne s'y rapporte que médiatement. Le concept se distingue par là de cette autre forme de perception objective qu'est l'intuition : celle-ci est une représentation qui se rapporte immédiatement à l'objet et elle est singulière ; celui-là est toujours général

---

[2] Christian Wolff, *Philosophia rationalis sive Logica*, Leipzig, 1728 (en particulier §716) ; Alexander Gottlieb Baumgarten, *Metaphysica*, Halle, 1739 (en particulier §631) ; Georg Friedrich Meier, *Auszug aus der Vernunftlehre*, Halle, 1752 (en particulier §259). Sur le contexte historique et systématique de la théorie kantienne de la formation des concepts, cf. Peter Reuter, *Kants Theorie der Reflexionsbegriffe. Eine Untersuchung zum Amphibologiekapiter der Kritik der reinen Vernunft*, Würzburg, Königshausen & Neumann, 1989 (en particulier chap. 2, pp. 47-56) ; Manfred Kugelstadt, *Synthetische Reflexion. Zur Stellung einer nach Kategorien reflktierenden Urteilskraft in Kants theoretischer Philosophie*, Walter de Gruyter, Berlin, New York,1998 (en particulier pp. 24-35, 35-84) ; Paul Natterer, *Systematischer Kommentar zur Kritik der reinen Vernunft. Interdisziplinäre Bilanz der Kantforschung seit 1945*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003 (en particulier pp. 201-213).

[3] *« Denn Vorstellung bedeutet eine Bestimmung in uns, die wir auf etwas Anderes beziehen (dessen Stelle sie gleichsam in uns vertritt) » (Kant's* Briefwechsel, Ak XI, p. 395).

[4] *Anthropologie in pragmatischer Hinsicht*, §5, Ak VII, p.135.

et se rapporte médiatement à l'objet, par l'intermédiaire d'une marque qui peut être commune à plusieurs choses.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser ce qu'est un concept *mathématique*, et ce qui le distingue du concept empirique, du concept pur de l'entendement et du concept de la raison. Il faut pour cela rapporter les concepts aux différentes sources de notre connaissance.

D'abord, un concept mathématique est un concept pur. Il n'a pas source dans l'expérience et, de ce point de vue, il se distingue de concepts empiriques comme les concepts de métal, de couleur, etc[5]. Mais le concept mathématique n'a pas non plus sa source dans l'entendement ; et de ce point de vue, il se distingue de cette autre espèce de concept pur qu'est la notion (concepts de possibilité, de nécessité, de causalité, etc.) : « Le concept pur, en tant qu'il a sa source uniquement dans l'entendement (non dans une image pure de la sensibilité) s'appelle notion » (A 320, B 377).

Le concept mathématique, au XVIII^e, est encore majoritairement compris, en philosophie, à partir de la géométrie et de l'arithmétique. Il n'est pas une notion, puisqu'il a sa source dans l'imagination pure, non dans l'entendement ; et pourtant ce n'est pas non plus un concept empirique, puisque l'imagination dont il s'agit n'est pas l'imagination reproductive, mais l'imagination productive qui présente originairement le concept dans l'intuition pure et qui précède l'expérience. Enfin, le concept mathématique se distingue de l'idée ou concept de la raison qui dépasse toute expérience possible et qui a sa source dans la raison pure (l'idée de la liberté par exemple).

On a donc défini ce qu'est un concept : c'est une représentation générale qui se rapporte médiatement à l'objet, par l'intermédiaire d'une marque qui peut être commune à plusieurs choses ; et on a déterminé ce qu'est un concept mathématique : c'est un concept pur qui a sa source dans une image pure de la sensibilité. Mais comment, de nos représentations, faisons-nous des concepts ? Comment nos représentations deviennent-elles des concepts ?

## Comment produit-on des concepts ?

Pour répondre à cette question, voyons ce que Kant explique dans la *Logique* de Jäsche concernant la formation des concepts. Qu'ils soient purs ou empiriques, donnés ou factices, les concepts ont, quant à leur forme, tous la même origine. Ils proviennent de l'entendement : « Le concept est ou bien un concept empirique ou un concept pur (*vel empiricus vel intellectualis*). Un concept pur est un concept qui n'est pas tiré de l'expérience, mais qui provient de l'entendement également *selon son contenu* » [6]. En disant que le concept pur provient de l'entendement également selon son contenu, Kant laisse entendre que tel n'est pas le cas du contenu du concept empirique, mais que tous les deux proviennent néanmoins de l'entendement quant à la forme. En effet, tous les concepts doivent provenir de l'entendement *quant à leur forme*, faute de quoi ils ne seraient plus des représentations générales, précisément des concepts. La forme d'un concept, comme représentation discursive, est toujours factice.

---

[5] Toutefois l'expérience ne produit par elle-même aucun concept, même empirique : « elle se trouve seulement au fondement, dit Kant, elle livre les représentations dont nous faisons des concepts » *Logik Pölitz*, Ak XXIV/1, p. 568.

[6] *Logik Jäsche*, §3, Ak IX, p. 92.

Or comment l'entendement s'y prend-il pour produire des concepts, et leur conférer la forme de la généralité ? L'entendement met pour cela en œuvre une triple opération : 1) *la comparaison (Vergleichung)* qui permet de remarquer des différences ; 2) la réflexion (*Reflexion*) qui permet de se représenter les marques communes ; et 3) l'abstraction (*Abstraktion*) ou la séparation (*Absonderung*) qui permet d'écarter les différences pour ne retenir que les éléments communs. Ces trois opérations logiques permettant de produire la forme d'un concept (son extension), Kant les illustre à l'aide de trois représentations d'arbres, celle d'un épicéa, celle d'un saule et celle d'un tilleul : « En comparant tout d'abord ces objets entre eux, je remarque qu'ils diffèrent les uns des autres au point de vue du tronc, des branches, des feuilles, etc. ; mais si ensuite je réfléchis uniquement à ce qu'ils ont de commun entre eux, le tronc, les branches et les feuilles-mêmes, et si je fais abstraction de leur taille, de leur configuration, etc. j'obtiens un concept d'arbre » [7].

À quoi aboutit cette théorie traditionnelle de la formation des concepts ? Chaque série d'objets possède un concept générique suprême qui réunit en lui toutes les déterminations dans lesquelles s'accordent ces objets, tandis que d'autre part, à l'intérieur de ce genre suprême, les propriétés appartenant à une partie des éléments comparés permettent de définir des concepts spécifiques situés à des niveaux de hauteur variables. On s'élève donc d'une espèce au genre prochain d'un plus haut niveau, en éliminant tel indice donné qui avait été retenu jusque-là et en ouvrant ainsi le champ de la réflexion à un domaine plus étendu d'objets ; et ce mouvement a pour symétrique un mouvement en sens inverse, caractérisé par la spécification du genre, obtenue en ajoutant progressivement de nouveaux traits qui enrichissent le contenu.

Appelons grandeur du contenu du concept le nombre d'indices qui caractérisent un concept ; cette grandeur va croître à mesure qu'on passera d'un concept de niveau plus élevé à un concept situé plus bas, ce mouvement entraînant du même coup la réduction du nombre des espèces subordonnées ; et cette grandeur diminuera avec l'augmentation du nombre des espèces qui résulte de la progression ascendante vers un genre de niveau plus élevé.

À l'extension croissante correspond ainsi une réduction progressive du contenu, en sorte que, au bout du compte, les concepts les plus généraux susceptibles d'être atteints ne possèdent plus aucun caractère déterminant ni aucune marque distinctive. La pyramide conceptuelle débouche vers le haut sur la représentation abstraite du « quelque chose », représentation qui, rendant compte d'un être complètement englobant qui lui permet de revendiquer toutes les variétés possibles de contenus de pensée, se trouve être, du même coup, dépouillée de toute spécificité.

### La critique cassirerienne de la théorie traditionnelle de la formation des concepts

Cette doctrine traditionnelle de la formation des concepts a fait l'objet d'un certain nombre de critiques, notamment de la part de Lotze, Frege, Cassirer, etc. Je me limiterai ici à l'examen et à la discussion des critiques de Cassirer[8]. J'en retiendrai trois.

[8] E. Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik*, 1910, Gesammelte Werke, Band 6, Hamburg, Meiner, 2000 ; tr. fr. par P. Caussat, *Substance et fonction. Éléments pour une théorie du concept*, Paris, éd. de Minuit, 1977.

D'abord, cette théorie traditionnelle du concept tombe dans le vide, elle déçoit ce qu'on est en droit d'attendre d'une conceptualisation féconde et scientifique. On attend en effet d'abord d'un concept scientifique qu'il substitue à l'indétermination (*Unbestimmtheit*) originaire et au caractère plurivalent (*Vieldeutigkeit*) de notre représentation une détermination rigoureuse et univoque. Or c'est exactement l'inverse qui se produit : les délimitations rigoureuses paraissent s'effacer à mesure que se déroule la conceptualisation[9].

À cette première critique de Cassirer, on pourrait objecter, avec Gerard Heymans, qu'elle repose sur une confusion entre deux sens de la détermination[10]. La détermination peut d'abord signifier l'intuitivité (*Anschaulichkeit*), comme lorsqu'on dit par exemple qu'on a conservé une représentation indéterminée d'un homme qu'on a aperçu autrefois ; et c'est *en ce sens* que Cassirer entend l'indétermination, lorsqu'il attribue aux concepts supérieurs une détermination moindre qu'aux concepts inférieurs. Or personne n'a jamais exigé des concepts qu'ils soient déterminés en ce sens, puisqu'on a constamment insisté sur le fait qu'ils ne peuvent pas être représentés intuitivement. La détermination que l'on attend des concepts, et que l'on doit en attendre, désigne tout autre chose : la possibilité de rendre compte de leur composition et, par conséquent, de les distinguer avec certitude de tout autre concept ; mais cette possibilité se retrouve aussi bien dans le concept supérieur que dans le concept inférieur. Lorsqu'on passe du concept de triangle rectangle isocèle, à ceux de triangle, de figure plane, etc. ou que l'on s'élève du concept de cheval au concept de mammifère, de vertébré, d'animal en général, plus le contenu du concept s'appauvrit, plus il devient difficile de se le représenter intuitivement ; mais la possibilité de décomposer le concept en ses marques, de reconnaître exactement son rapport avec d'autres concepts, de distinguer avec certitude ce qui tombe sous le concept et ce qui ne tombe pas dessous, cette possibilité n'a pas disparu le moins du monde ; et c'est en ce sens précisément que la détermination est nécessaire et suffisante pour permettre au concept de remplir sa tâche première et essentielle, celle de prémunir la pensée contre les confusions et les malentendus.

Mais la théorie traditionnelle du concept recèle une deuxième difficulté, qui pour les mathématiques, renvoie aux modalités mêmes de leur développement et de la création ; c'est qu'elle ne donne aucune règle valable, aucun critère fiable de sélection des marques. Pourquoi choisir celles-ci plutôt que celles-là ? Toutes les propriétés communes ne font pas également des marques : comment trier parmi ces propriétés celles qui sont pertinentes et celles qui ne le sont pas ? La simple comparaison selon la ressemblance ne nous donne aucune garantie que les marques sélectionnées constituent effectivement le contenu d'un concept. Elle ne nous donne pas davantage l'assurance que la liaison des marques entre elles dans le contenu du concept soit autre chose qu'une simple agrégation. Or une simple agrégation de marques suffit-elle à définir le contenu d'un concept ? : « Le concept de niveau supérieur doit rendre intelligible le concept de niveau inférieur, en dévoilant ce qui fonde sa configuration particulière. Mais ce que la tradition philosophique prescrit

---

9 Sur cette question de la détermination du concept, cf. déjà les critiques de H. Rickert, in *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung*, chap. 1,§2 : *« Die Bestimmtheit des Begriffes »* , pp. 47-61.

10 Cf. Gerard Heymans, « Zur Cassirerschen Reform der Begriffslehre », in *Kant-Studien*, n° 33, 1928, pp. 118-119.

pour la formation du concept générique ne contient en soi aucune garantie qu'on atteigne effectivement ce but. En effet, rien ne nous assure que les indices communs que nous prélevons sur un ensemble d'objets, quels qu'ils soient, contiennent aussi les traits caractéristiques réglant et déterminant la structure globale des membres de l'ensemble » [11]. Pour illustrer sa critique, Cassirer emprunte à Lotze l'exemple suivant : « Si pour prendre un exemple topique de Lotze, nous subsumons des cerises et de la viande sous un ensemble d'objets dont les caractéristiques seraient d'être rouges, juteux, mangeables, nous ne parvenons pas avec cette procédure à un concept logiquement valable, mais seulement à une combinaison verbale dépourvue de signification et qui ne permet pas d'appréhender les cas particuliers. »

On pourrait ici remarquer que cet exemple est un peu détourné de son sens par Cassirer, puisqu'il est forgé par Lotze dans le cadre d'une concession à la théorie traditionnelle du concept. L'argument consiste à dire qu'il ne faudrait pas croire que la sélection des marques ait toujours aussi peu de sens que dans cet exemple de mauvais goût. Bien au contraire : « Elle sert à démontrer que différents sujets, si étrangers qu'ils puissent être par ailleurs l'un pour l'autre, et impossibles à subsumer sous un même concept générique, tombent néanmoins également, en raison d'une marque commune, ou de quelques unes, sous certaines conséquences impérieuses » [12].

Cet exemple mérite qu'on s'y attarde un peu, puisqu'il a donné lieu à une célèbre controverse entre Cassirer et Moritz Schlick. Dans son *Allgemeine Erkenntnislehre*, celui-ci adresse à Cassirer une double objection. D'abord cet exemple n'est pas si absurde qu'il y paraît. Le concept d'un objet rouge, juteux et comestible pourrait même être très utile, par exemple dans le cadre d'une recherche sur la faculté de discrimination visuelle des animaux[13] ; mais accordons à Cassirer qu'un tel concept soit scientifiquement inutile ; s'ensuit-il qu'il soit logiquement absurde ?

Selon Schlick, les recherches de Cassirer n'ont rien à voir avec l'essence ou la formation des concepts, au sens de la logique traditionnelle ; elles concernent en réalité le rôle que le concept joue dans la connaissance et les motifs qui conduisent à sa formation. Elles reposent sur une confusion entre le point de vue logique et le point de vue épistémologique. Admettons en effet avec Cassirer qu'on ne parvienne, en suivant la procédure indiquée, qu'à une simple combinaison verbale dépourvue de signification pour l'appréhension des cas particuliers. S'agit-il pour autant d'un concept logique non valable ? Il a un sens, et cela seul décide de sa validité en logique formelle. La question de savoir s'il peut jouer ou non un rôle dans la connaissance tombe entièrement en dehors de sa sphère de compétence ; et lorsque Cassirer conclut que « les règles formelles générales sont inopérantes, réduites à elles seules, et que, chaque fois qu'il s'agit de les compléter, on est amené à se référer tacitement à un autre *critérium* intellectuel », on ne saurait en faire le reproche à la logique formelle ; car celle-ci a-t-elle jamais prétendu nous donner des prescriptions au sujet des concepts que nous devons former ? Elle veut seulement nous enseigner comment nous pouvons les former, ou comment nous devons le faire, si nous en avons besoin dans un but quelconque et pour une raison

[11] E. Cassirer, *Substance et fonction*, chap. 1, p. 17.
[13] Moritz Schlick, *Allgemeine Erkenntnislehre, Gesamtausgabe*, Abteilung I, Band 1, Springer, Wien, New York, 2009, p. 196.

quelconque ; mais elle ne livre pas ces buts eux-mêmes, ni ces raisons. Elle ne nous livre donc aucun critère pour parvenir à des concepts *utiles*.

On pourrait toutefois répondre à cette objection de Schlick que la logique traditionnelle fait bien une différence, parmi les caractères, entre ceux qui sont importants ou féconds (*fruchtbare*) et ceux qui sont vides ou insignifiants : « Un caractère est important et fécond, écrit Kant, s'il est le principe de connaissance de grandes et nombreuses conséquences » [14]. La fécondité du concept se décline même sur deux plans différents ; car un concept peut être fécond du point de vue de son usage interne, dans la dérivation des caractères subordonnés ; mais il peut être aussi fécond du point de vue de son usage externe, dans la comparaison, lorsqu'il nous sert à connaître les relations de similitude et de différence d'une chose relativement à beaucoup d'autres ; et c'est précisément cet usage externe des caractères qui est à l'œuvre dans la formation des concepts. Cette idée traditionnelle de l'importance ou de la fécondité *logique* des caractères, distincte des formes *pratiques* de l'utilité (*Nützlichkeit*) et de la commodité (*Brauchbarkeit*), ne montre peut-être pas que Cassirer a raison d'attendre de la théorie de la formation des concepts qu'elle nous permette de sélectionner des caractères utiles. Elle montre en tout cas que la confusion entre le point de vue logique et celui de la théorie de la connaissance est d'abord à l'œuvre dans la logique traditionnelle elle-même, puisque Kant reconnaît lui-même que l'*importance* des caractères, tout comme leur suffisance, ne peut être déterminée que relativement aux buts qu'on se propose d'atteindre par une connaissance.

Il reste cependant une troisième difficulté signalée par Cassirer : c'est que cette théorie, au lieu de nous expliquer comment se forment les concepts, présuppose qu'ils sont toujours déjà formés. Le concept produit est en fait déjà présupposé. Ce qui se trouve présupposé par la théorie traditionnelle de l'abstraction, c'est la spécificité de la règle qui institue la relation entre les termes d'une série : « L'unité du contenu conceptuel ne peut être dite abstraite des éléments particuliers de l'ensemble où ils sont compris que dans la mesure où ils nous servent à prendre conscience de la spécificité de la règle qui institue leur relation ; mais cela ne veut pas dire que nous obtiendrions cette règle à partir d'eux, par une simple sommation ou composition de parties. Si la théorie du concept présente une certaine consistance, elle le doit en réalité au fait que les contenus porteurs des virtualités du concept sont soustraits au statut de particularités amorphes et sont déjà tacitement pensés sous la forme d'une multiplicité ordonnée. Ce qui signifie que le concept n'est pas dérivé (*abgeleitet*), mais présumé (*vorweggenommen*). Car attribuer à une multiplicité donnée un ordre et un enchaînement des éléments qui la composent, c'est déjà *présupposer le concept*, sinon sous sa forme achevée, du moins selon sa fonction fondamentale » [15].

Ainsi donc, la critique cassirerienne de la théorie traditionnelle de la formation des concepts mérite sans doute d'être révisée et nuancée, en tenant compte notamment des objections venues du sein même de la tradition néokantienne (Gerard Heymans était l'élève de Windelband) ou du cercle de Vienne (Moritz Schlick) : au fond Cassirer attendait peut-être de la logique traditionnelle ce qu'elle ne pouvait

[14] Kant, *Logik Jäsche*, Introduction, Ak IX, p. 60 ; tr. fr. p. 66.

[15] E. Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff, Gesammelte Werke*, Band VI, Hamburg, Meiner, 2000, p. 16 ; tr. fr. p. 29.

lui offrir : de la détermination au sens de l'intuition et des critères de sélection des marques. Cependant, le nerf de la critique semble toujours valable. Preuve en est, le problème du passage de l'intuition au concept est aujourd'hui considéré comme « l'un des points les plus controversés, les plus aporétiques des études kantiennes actuelles » [16]. Or d'après le bilan de la *Kantforschung* depuis 1945 dressé par Paul Natterer, les termes même du débat actuel sont fixés en 1989 par Peter Reuter, dans son étude intitulée *La théorie kantienne des concepts de la réflexion*[17] ; et cette étude précisément débouche sur le constat que « la clarification kantienne de l'origine logique des concepts demeure circulaire » [18]. Elle présuppose, plus qu'elle n'explique, qu'on puisse utiliser les « notae identitatis », respectivement les « notae diversitatis », comme des éléments pour des complexes d'unités conceptuelles. On pourrait dire que les termes du débat actuel, tels qu'ils sont fixés par Reuter en 1989, sont en réalité largement déterminés par la critique de Cassirer. De fait, cette critique est toujours d'actualité.

## La réforme de la théorie de la formation des concepts

En se mettant à l'école de la mathématique, certains philosophes se rattachant à la tradition leibnizienne ont essayé, dès la fin du XVIII$^{e}$ siècle, de renouveler entièrement leur manière d'envisager la conceptualisation. Qu'ont-ils appris de la mathématique ?

### La généralité des formules mathématiques : le binôme de Newton

À bien des égards, on pourrait considérer que Lambert n'apporte pas grand chose de nouveau au concept de réflexion et qu'il reste attaché à une conception très traditionnelle de la formation des concepts[19]. Au §8 de la *Dianoiologie*, ou doctrine des lois de la pensée, on peut ainsi lire que les concepts naissent de l'attention que nous portons aux sensations : « Les premières voies par lesquelles nous parvenons aux concepts sont les sensations (*Empfindungen*) et l'attention (*Aufmerksamkeit*) que nous utilisons pour nous représenter ou pour prendre conscience de tout ce que les sens nous font sentir d'une chose. Si cette conscience va jusqu'à nous permettre de reconnaître chaque fois la chose, le concept est clair, dans le cas contraire, il est obscur » [20].

Et pourtant, la doctrine traditionnelle n'est pas véhiculée par Lambert sans subir de transformation. Dans l'*Anlage zur Architektonik*, Lambert souligne l'écart entre l'abstraction telle qu'elle est pratiquée et pensée par les philosophes et la généralisation telle qu'elle est mise en œuvre par les mathématiciens. Cet écart n'a

---

[16] Paul Natterer, *Systematischer Kommentar zur Kritik der reinen Vernunft. Interdisziplinäre Bilanz der Kantforschung seit* 1945, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2003, p. 206.

[17] Peter Reuter, *Kants Theorie der Reflexionsbegriffe. Eine Untersuchung zum Amphibologiekapiter der Kritik der reinen Vernunft*, Würzburg, Königshausen & Neumann, 1989.

[18] Peter Reuter, *op. cit.*, chap. 5, p. 175.

[19] Cf. P. Reuter, [1989], p. 62 : *« Vergleichbares gilt auch für Lambert, der den Begriff der Reflexion, wenn ich recht sehe, nirgends ausführlicher behandelt und dessen Theorie der Begriffsbildung durchaus traditionell konzipiert ist (Begriffe entstehen durch "Aufmerksamkeit" auf "Empfindungen") ».*

[20] J. H. Lambert, *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrtum und Schein*, 1764, tome 1 : *Dianoiologie*, §8, *Philosophische Schriften*, tome I, Olms, Hildesheim, 1965, p. 6.

rien de « naturel », il ne correspond pas à une divergence de méthode entre philosophie et mathématique ; car le philosophe doit prendre modèle sur le mathématicien, il doit suivre son exemple.

Mathématiciens et philosophes poursuivent un même objectif : ils cherchent à rendre leurs concepts, leurs propositions et leurs problèmes plus généraux ; le mathématicien n'est pas plus concerné par le particulier que le philosophe : lui aussi cherche à rendre ses concepts, ses propositions et ses problèmes plus généraux. Mais pour atteindre cet objectif, ils ne mettent pas en œuvre la même méthode. Comment le philosophe s'y prend-il pour généraliser ses concepts ? Il pratique l'abstraction philosophique, c'est-à-dire qu'il retranche des marques, il simplifie des concepts spécifiques en évidant leur contenu ; et comme il ne peut pas tout enlever, il enlève « presque tout » (*bald alles*).

La méthode suivie par le mathématicien est très différente. Elle ne consiste pas à enlever des marques au contenu du concept, mais à ajouter des circonstances (*Umstände*) et à conserver des variétés (*Varietäten*). Relisons le §193 de l'*Anlage zur Architektonik* où Lambert décrit la méthode de généralisation des concepts en mathématique :

> *« Les mathématiciens cherchent en effet, eux aussi, à rendre leurs concepts, leurs propositions et leurs problèmes plus généraux ; toutefois, ils ne le font pas en retranchant presque tout par abstraction, mais ils ajoutent encore plus de conditions (Umstände), si bien que leurs formules générales apparaissent beaucoup plus complexes que les formules spéciales, parce qu'ils conservent dans celles-là toutes les variétés (Varietäten) qu'on rencontre dans les cas particuliers, qui sont souvent en partie exclues dans celles-ci. On peut prendre comme exemple les équations générales des lignes courbes du deuxième, troisième, quatrième degré, la formule du binôme de Newton. »* [21]

Toute la difficulté est ici de comprendre ce que désignent ces « circonstances » ajoutées par le mathématicien dans ses formules, par lesquelles celles-ci deviennent plus générales. Le mathématicien ne retranche rien : il ajoute des circonstances ou des conditions ; il conserve des variétés. Mais en quel sens les formules mathématiques générales conservent-elles des variétés qui sont précisément exclues dans les formules particulières ?

Soit par exemple la formule du binôme de Newton, qui généralise les formules de développement du carré ou du cube d'une somme et permet de trouver le développement d'une puissance entière quelconque d'un binôme :

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$ où les $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sont les coefficients du binôme.

La formule générale ($n$ quelconque, mais entier) est plus compliquée que la formule donnant le développement dans le cas particulier où $n = 2$ :
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Mais c'est cette plus grande complexité précisément qui permet de retenir dans la formule générale l'ensemble des cas particuliers et de déterminer la forme de la solution pour chacun d'eux.
Pour $n = 3$, par exemple : $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

La formule générale conserve la variété des cas particuliers, car elle n'en choisit aucun, elle est vraie pour $n$ quelconque.

[21] J.H. Lambert, *Anlage zur Architektonik*, Riga, 1771, §193, p. 154.

**Généralité concrète et généralité abstraite**

La deuxième chose que la philosophie a apprise et retenue des mathématiques, c'est la différence entre l'universalité abstraite du concept et l'universalité concrète de la fonction mathématique. Le premier à avoir repris cette terminologie hégélienne pour exprimer la différence entre le type de généralité qui revient au concept philosophique traditionnel et celui qui caractérise la fonction mathématique, fut Moritz Wilhelm Drobisch[22]. Au §19 de la *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen*, Drobisch écrit ceci : « Tous les concepts abstraits sont généraux, mais la réciproque n'est pas vraie : tout ce qui est général n'est pas un concept. Le concept du général est plus large que celui de l'abstrait » [23].

Prenons d'abord la première partie de la proposition : tous les concepts abstraits sont généraux. Pourquoi ? Les concepts, non pas généraux, mais génériques, sont dits abstraits, eu égard à leur mode de production : ils sont abstraits parce qu'ils sont obtenus au moyen de l'opération intellectuelle d'abstraction, qui consiste à séparer des objets comparés les marques qui leur sont communes. Elle *supprime* ce qui précisément est posé dans l'opération inverse, celle de *détermination*. L'abstrait est produit par abstraction, le concret l'est par détermination. Mais ces concepts génériques, qu'on peut dire abstraits, on peut aussi bien les dire généraux dans la mesure précisément où ils sont *communs* à toutes leurs espèces : ils sont *allgemein*, parce qu'ils sont *gemein*. Leur *Allgemeinheit* résulte de leur caractère gemein.

Prenons maintenant la deuxième partie de la proposition : *« Der Begriff der Allgemeinen ist weiter als der des Abstracten »*. Pourquoi le concept du général est-il plus large que celui de l'abstrait ? Pourquoi l'abstrait n'est-il qu'une modalité du général, pas forcément la plus intéressante ? En quel sens la mathématique peut-elle nous enseigner une manière concrète d'être général ? Et en quel sens peut-elle aussi éclairer le philosophe sur les contours à donner à ces distinctions ? Nous verrons en effet plus loin que les illustrations mathématiques de phénomènes comme l'abstraction ou la généralité conduisent assez rapidement à mettre en évidence la contextualité de ces distinctions, ce qui rejoint l'idée post-frégéenne qu'un même concept mathématique – disons celui de groupe – est par exemple considéré selon des modalités distinctes selon qu'on l'aborde du point de vue de la théorie des ensembles ou d'un point de vue catégoriel.

Pour ce qui est de l'universalité, elle peut s'entendre de plusieurs manières. Elle peut être abstraite ou concrète. L'universalité abstraite (le parallélogramme), c'est celle du concept de genre, « pour autant que, pensé en lui-même et par lui-même, il écarte toutes les différences spécifiques » (rectangle, carré...). Contrairement à Trendelenburg[24], Drobisch refuse de considérer que dans le concept de genre, où toutes les différences spécifiques *déterminées* ont été écartées, la place

[22] Moritz Wilhelm Drobisch (1802-1896) était un mathématicien, logicien et philosophe allemand, disciple de Herbart. D'abord professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Leipzig à partir de 1826, puis Professeur de mathématiques et de philosophie (à partir de 1842), enfin professeur de philosophie seulement, à partir de 1868, date à laquelle il se consacre entièrement à la philosophie. Le rôle de Drobisch dans la mise en évidence de la généralité concrète en mathématiques a été signalé par Emil Lask, *Fichtes Idealismus und die Geschichte*, Berlin, 1902, p. 207 et analysé par Cassirer, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*, 1910.

[23] M. W. Drobisch, *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen*, Leipzig, Leopold Voss, 1re éd. 1836, 2e éd. 1851, 3e éd. 1863, §19, p. 22.

[24] Adolf Trendelenburg, *Logische Untersuchungen*, tome II, Berlin, 1840, chap. 13 : « Der Begriff », p. 161.

de ces différences serait cependant pensée de manière oblique, de telle manière qu'on laisse seulement *indéterminée* la question de savoir si cette place vide sera occupée par telle ou telle différence spécifique. Dans le concept de genre, les différences spécifiques ne sont pas pensées du tout : « Le concept de genre est aussi sans rapport avec ses espèces, après qu'il a été formé, c'est un concept indépendant (*selbstständiger Begriff*), auquel peuvent, mais ne doivent pas, s'ajouter des différences spécifiques » [25]. Ainsi, pour reprendre encore l'exemple de Trendelenburg, le parallélogramme en tant que figure délimitée par deux paires de droites parallèles peut sans doute être rectangle ou non, équilatère ou non, mais son concept ne comprend ni la longueur des côtés, ni la mesure des angles qu'ils délimitent, ni même en général la représentation de l'angle.

À l'universalité abstraite du genre s'oppose l'universalité concrète, qui peut elle-même s'entendre en deux sens différents : l'universalité concrète du concept spécifique et l'universalité concrète du « concept complet ». La première est une universalité abstraite *limitée*, elle résulte d'une limitation de l'universalité du genre par l'introduction d'une différence spécifique déterminée (le parallélogramme rectangle) : l'universalité concrète revient à l'espèce, « pour autant qu'elle contient, en tant que telle, le général du genre (*das Allgemeine der Gattung*) bien que limité par la différence spécifique ». L'universalité n'est ici concrète que par défaut ou limitation de généralité, elle gagne en concrétude ce qu'elle perd en généralité. L'exemple du parallélogramme montre bien au passage le caractère délicat de ces distinctions où les niveaux d'abstraction et de généralité sont toujours *relatifs*.

Il y a une autre manière encore d'entendre l'universalité concrète ; et pour expliciter cette forme particulière d'universalité concrète, irréductible à celle de l'espèce, Drobisch introduit en 1863, dans la troisième édition de la *Neue Darstellung der Logik*, le terme de *Gesammtbegriff* ou « concept complet » [26] :

> *« On peut tout d'abord, écrit Drobisch, (en reprenant du moins la terminologie de Hegel) distinguer* l'universalité concrète et l'universalité abstraite. *Celle-ci revient au genre pour autant que, pensé en lui-même et pour lui-même, il écarte toutes les différences spécifiques ; celle-là revient à l'espèce, pour autant qu'elle contient, en tant que telle, la généralité du genre, bien que limitée par la différence spécifique. Mais le concept de l'universalité concrète va encore plus loin. Si l'on ne relie en effet au genre aucune différence spécifique déterminée, et si on ne laisse pas non plus celle-ci complètement indéterminée, mais qu'on la pense comme une variable qui peut prendre successivement les propriétés présentées par les différences spécifiques de toutes les espèces du genre* (die Artunterschiede sämmtlicher Arten der Gattung), *on peut nommer cela le* concept complet (Gesammtbegriff) *de toute la série des espèces ; et à ce concept revient l'universalité concrète. Car on pense ici le particulier de toutes les espèces au moyen de la généralité du genre et d'une série de différences spécifiques déterminées mais variables.*[27] »

[25] Drobisch, *Neue Darstellung der Logik*, §18, p. 20.

[26] Dans la première édition de 1836, cette question de l'universalité concrète n'est pas abordée dans le chapitre sur le concept, dans la deuxième édition de 1851, Drobisch assigne l'universalité concrète à la « représentation générale » (*Gesammtvorstellung*) ou au « schème » (*Schema*). Il prend l'exemple de l'équation du cercle.

[27] M. W. Drobisch, *Neue Darstellung der Logik*, §19, p. 22.

Le concept concret serait donc celui qui spécifie les règles et modalités de variation de ses instanciations spécifiques. Or cette universalité concrète du concept complet est précisément celle qui revient à l'équation algébrique. Drobisch donne l'exemple suivant au §19 de la Logique :

> *« Ayant par exemple à trouver deux nombres entiers dont la somme est égale à* 25*, et dont l'un est divisible par* 2*, l'autre par* 3*, l'algèbre résout le problème en exprimant le deuxième nombre sous la forme* $6z + 3$*, où* $z$ *ne peut avoir que les valeurs* $0, 1, 2, 3$*, d'où il suit immédiatement que le premier nombre prendra la forme* $22 - 6z$ *; ce sont là des formes dotées d'une universalité concrète. Elles sont universelles, parce qu'elles exposent la loi de formation commune à tous les nombres cherchés ; et elles sont en même temps concrètes, car lorsqu'on donne à z successivement les quatre valeurs indiquées, les nombres cherchés en découlent à leur tour comme autant d'espèces de ces formes.*[28] »

Il en va de même de toute fonction mathématique d'une ou plusieurs variables. Car toute fonction représente une loi générale qui, au moyen des valeurs successives que peut prendre la variable, comprend en même temps sous elle tous les cas particuliers auxquels elle s'applique.

**Concept et fonction**

Ainsi donc, la voie est ouverte par Drobisch à une compréhension du concept comme généralisation du concept mathématique de fonction. Dans *Funktion und Begriff* (1891), Frege mettra ce mouvement de généralisation en œuvre dans deux directions : 1) élargissement des valeurs d'une fonction pour un argument donné aux valeurs de vérité (le vrai, le faux) ; 2) élargissement du cercle des arguments possibles d'une fonction aux objets en général (y compris les personnes) au lieu de le limiter aux nombres : « On voit combien, écrit Frege, ce que l'on appelle concept en logique est étroitement lié à ce que nous appelons fonction. On pourra même dire simplement : un concept est une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité » [29].

Ce point de vue fonctionnel a des conséquences importantes. La philosophie des débuts du XX^e^ en tirera des enseignements multiples et parfois (au moins superficiellement) antagonistes. Pour Cassirer, par exemple, le concept de fonction est contradictoire avec le concept de substance. Contre la logique traditionnelle, il argumente que dans le cas du concept de fonction, la vieille règle disant qu'à un contenu plus riche correspond une extension moindre ne serait plus valable ; que dans ce cas, le concept plus général s'avèrerait aussi être en même temps le plus riche. Mais, selon Moritz Schlick, « le concept de fonction ne contredit pas le concept de substance, mais si l'on y regarde de près, il s'ordonne parfaitement à son schéma » [30]. Une fonction mathématique devrait en réalité être conçue comme un objet avec des propriétés déterminées (ces mots étant pris au sens large), et le fait que la définition revête une forme mathématique ne change rien

---

[28] M. W. Drobisch, Neue Darstellung der Logik, §19, p. 22.
[29] G. Frege, « Funktion und Begriff », in Kleine Schriften, Olms Verlag, Hildesheim, Zürich, New York, 1990, p. 133 ; tr. fr. par C. Imbert, « Concept et fonction », in *Écrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, 1971, p. 90.
[30] M. Schlick, *Allgemeine Erkenntnislehre*, §5, p. 194.

à la chose. L'exemple choisi par Cassirer du rapport entre le concept de la section conique et ses différentes formes (ellipse, parabole, hyperbole) illustre bien cette polémique. La logique aristotélicienne regarde le concept de l'ellipse, qui est bien plus étroit que le concept de conique, comme celui dont le contenu est le plus riche, puisqu'il provient du concept de conique par adjonction d'une nouvelle marque. Dans l'écriture fonctionnelle on retrouve ce schéma ; le contenu du concept de « courbe du deuxième degré » doit y être enrichi par la nouvelle marque « avec tels ou tels coefficients déterminés ». Les règles de la logique traditionnelle resteraient donc en vigueur. Dans la notation habituelle, l'équation de la courbe générale du deuxième degré contient plus de coefficients que, par exemple, celle du cercle ; mais ce serait une grossière erreur que de vouloir la considérer de ce fait comme plus riche quant au contenu au sens de la logique traditionnelle ; car ces coefficients ne sont nullement des marques ou des caractères au sens de la logique, mais se trouvent là uniquement comme représentants de nombres (*Vertreter von Zahlen*), ils indiquent simplement les places où des marques particulières ont à s'introduire.

Cet argument de Schlick contre Cassirer me paraît étrange. Considérons en effet l'équation du deuxième degré.
Elle peut se mettre sous la forme : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ sinon ce ne serait plus du deuxième degré.

Considérons d'autre part l'équation du cercle : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

La marque qu'il faudrait ajouter pour passer du concept de courbe du deuxième degré au concept de cercle serait « avec tel ou tel coefficient déterminé ». Pour être certes compatible avec la logique aristotélicienne, l'argument selon lequel cette spécialisation des variables constituerait un enrichissement du contenu est aujourd'hui (i.e. après Frege) assez contre-intuitif et, en cela, le raisonnement de Cassirer semble mieux en accord avec l'esprit des mathématiques modernes (disons post-hilbertiennes).

L'argument de Cassirer ne consiste pas à dire naïvement que, comme il y a plus de coefficients dans l'équation de la courbe du second degré que dans celle du cercle, il s'ensuit que le contenu du concept du cercle est plus pauvre que celui du concept de courbe du second degré ; car les contenus des concepts de cercle, d'ellipse, etc., ne sont pas réductibles au nombre des coefficients qui figurent dans leur équation. Par contre, la règle de passage du concept de conique à ceux d'ellipse, hyperbole, parabole... est comme inscrite dans la représentation fonctionnelle, dès lors qu'elle se déduit pour l'essentiel de l'analyse de la signature de la forme quadratique associée.

On peut cependant se demander si cette notion de « concept complet », introduite par Drobisch dans sa *Nouvelle présentation de la logique*, et célébrée par Cassirer comme une avancée notable dans la théorie de la conceptualisation, est si novatrice qu'on l'a dit. Ne s'agit-il pas en réalité de la reprise de la notion de *conceptus completus* qu'on trouve dans la logique traditionnelle ? On sait que pour Meier, la première règle à laquelle doit obéir une définition est l'exhaustivité (*Weitläuftigkeit*), ce qui implique qu'elle soit un concept complet (*ausführlicher Begriff*)[31].

Pour Kant, la complétude constitue, avec la précision du concept, l'un des deux critères de la connaissance adéquate. Elle désigne la clarté totale des caractères

[31] Meier, *Auszug aus der Vernunftlehre*, §270, p. 75.

coordonnés, c'est-à-dire la distinction logique suffisante du concept du point de vue de la totalité de ses caractères coordonnés. Un concept complet est d'abord un concept distinct. La distinction est la clarté des caractères. Rendre distinct le concept du beau, c'est démêler les différents caractères du beau, à savoir quelque chose qui tombe sous le sens et qui plaît universellement. Mais la distinction peut-être logique ou esthétique : la première est une clarté des caractères par concepts, la seconde une clarté par intuition ; celle-ci consiste à exposer et expliquer *in concreto* un concept pensé abstraitement au moyen d'exemples. La distinction logique est complète ou totale si tous les caractères qui, pris ensemble, constituent le concept total sont parvenus à la clarté.

La complétude du concept n'est pas la profondeur (*Profundität*). Un concept peut être rendu complètement distinct, soit du point de vue de la totalité de ses caractères coordonnés, soit du point de vue de la totalité de ses caractères subordonnés. La clarté totale des caractères coordonnés constitue la distinction logique complète ou suffisante d'un concept de façon extensive. C'est ce que Kant appelle la complétude du concept. La totale clarté des caractères subordonnés constitue la distinction complète de façon intensive : la profondeur. Complétude et précision conjointes constituent l'adéquation. La précision est la réduction du concept aux plus petits termes (*reductio ad minimos terminos*). Elle ne s'obtient pas par soustraction de caractères coordonnés, mais par élimination de caractères subordonnés redondants.

Dans la *Logique* de Bauch, Kant définit le *conceptus completus* ainsi : « Le concept est complet lorsqu'il a ni plus ni moins de marques coordonnées qu'il y en a dans la chose même » : *« wenn der Begriff complet sein soll, so muss er nicht mehr und nicht weniger coordinirte Merkmale enthalten, als in der Sache selbst sind. Wenn mehr Merkmale da sind, als nöthig ist, so ist der Bergriff über complet »* [32]. Et Kant remarquait déjà qu'on ne trouve pas toujours en mathématiques des concepts complets, non pas par défaut de complétude, mais par excès. Il arrive en effet que le concept mathématique ne soit pas complet, non pas parce qu'il serait incomplet, mais parce qu'il est « surcomplet » (*über complet*). Ainsi par exemple, lorsque les mathématiciens définissent le cercle comme « la ligne courbe dont tous les points sont équidistants du centre du cercle », ils donnent un concept surcomplet, car il n'y a pas besoin de dire du cercle qu'il est une ligne *courbe*.

Qu'est-ce que le philosophe peut faire avec les concepts complets ? Est-ce qu'il doit mettre la philosophie en formules mathématiques pour atteindre à l'universalité concrète ? Est-ce qu'il doit s'efforcer de produire à son tour des concepts complets ?

## L'épistémologie et l'analyse des modes de production des concepts complets

Nous nous proposions de montrer en quel sens l'analyse du mode de production des concepts complets peut constituer une tâche pour l'épistémologie. Commençons par redéfinir et « moderniser » l'expression de « concept complet ». Si

[32] Kant, *Logik Bauch*, Meiner, Hamburg, 1998, p. 119.

l'on suit la typologie des concepts proposée par Desanti dans *La philosophie silencieuse*, et mise en œuvre dans *Les idéalités mathématiques*, on dira qu'un concept complet est un concept catégorial désignant une classe d'objets[33].

Le mot « concept » ne désigne plus ici une « représentation » ou une « détermination en nous » ; mais il garde bien quelque chose de son sens traditionnel : il désigne un objet dont le nom dénote une classe d'objets possédant en commun un système de propriétés capable de délimiter les critères d'appartenance de ces objets à la classe ; ainsi pour la théorie des ensembles, « L'objet noté 2 est un concept en ce que la notation désigne l'unité d'une classe d'objets et d'un système de propriétés » [34].

Mais les expressions « nombre entier », « groupe », « espace métrique », « limite », « fonction continue » désignent à leur tour des concepts. Il se manifeste cependant une grande différence entre 2 et par exemple, nombre entier. Elle tient à ceci que la production de 2 renvoie à un système d'opérations et de principes qui caractérisent les nombres entiers. On distinguera alors des « concepts-objets » (par exemple : 2, $\sin(X)$, $\pi$, etc.) et des « concepts catégoriaux » (par exemple : continuité, limite, nombre entier, nombre réel, groupe, espace compact, anneau, corps, etc.).

Dans la classe des concepts catégoriaux, il nous faut encore introduire une séparation : « limite », « continuité », par exemple, désignent une autre espèce de concept que « nombre réel » ou « groupe ». Dans le premier cas, le concept signifie une *classe de propriétés* convenant, sous certains conditions, à des suites, à des ensembles de points, etc. Dans le second cas, le concept désigne une *classe d'objets* dont les propriétés sont données dans des axiomes. Nous appellerons les premiers, qui désignent des classes de propriétés, *« concepts incomplets »*, pour marquer cette exigence qui les caractérise de ne pouvoir être effectués que relativement à un champ d'objets. En regard, nous appellerons *« concepts complets »* les concepts de seconde espèce, pour retenir ce qui les caractérise : délimiter sans ambiguïté et d'une manière suffisante le champ de possibilités dans lequel un système de propriétés est attribuable à un ensemble d'objets, conformément aux lois qui définissent l'engendrement opératoire des objets eux-mêmes et ferment leur domaine.

Enfin, au sein de la classe des « concepts complets », une dernière distinction est nécessaire. Le concept désigné par l'expression « nombre entier » est d'une autre espèce que le concept désigné par l'expression « groupe ». L'ensemble des entiers constitue un groupe commutatif par rapport à l'addition. Mais il existe d'autres groupes commutatifs que les entiers. Le concept d'entier peut être considéré de ce point de vue comme une exemplification du concept plus général « groupe commutatif ». Et les théorèmes qu'on aurait démontrés pour les groupes les plus généraux resteraient vrais pour le groupe additif des entiers. On pourrait dire la même chose pour les concepts « nombre réel » et « corps topologique », pour les concepts « intervalle borné de la droite réelle » et « espace compact ». Dans chaque cas, les concepts nommés en seconde position désignent les structures générales auxquelles les premiers concepts se conforment. Nous conviendrons donc

[33] J.-T. Desanti, *Les Idéalités mathématiques*, Paris, Seuil, 1968, Préliminaires, §4 : « Classes de concepts. Principes de méthode », pp. 25-31.
[34] Desanti, *La philosophie silencieuse*, Paris, Seuil, 1976, p. 174.

d'appeler les premiers concepts, « concepts naturels » et les seconds « concepts structuraux ».

Deux remarques sur cette classification. D'abord, le statut des concepts n'est pas fixé de toute éternité. Il arrive qu'un concept catégorial complet passe en situation de concept-objet, pour peu qu'il soit intégré dans un champ opératoire plus vaste et explicitement thématisé. Dans ce champ, il peut être reproduit à la manière dont le concept 2 est reproduit dans le système des entiers. Le système des entiers lui-même peut être manié comme objet et devenir terme pour un calcul dans le champ des cardinaux transfinis. Ce déplacement n'affecte en rien le caractère catégorial du concept, qui demeure ce qu'il était en son contexte premier. Les distinctions proposées sont donc toujours *relatives aux contextes théoriques* dans lesquels sont effectués les concepts définis.

En dépit des déplacements, le tableau se lit selon un ordre hiérarchique qui n'est pas sans rappeler la théorie des types de Russell. Cela veut dire que, dans le cas où un concept catégorial passe en situation de concept-objet, ce déplacement ne peut être effectué qu'à la condition qu'on dispose d'un nouveau concept catégorial complet, au sein duquel le premier puisse être engendré et reproduit comme objet. La référence du concept objet au concept catégorial s'opère toujours dans le même sens : le premier trouve toujours dans le second les principes propres à assurer sa reproduction réglée. D'où il suit que, dès qu'on parle de concept en mathématiques, il importe, si l'on entend donner au mot concept son sens plein et premier, de s'attacher de préférence à l'espèce de concepts appelée « concepts catégoriaux complets ». C'est à leur propos qu'il peut être utile de poser la question du mode de production des concepts en mathématique.