Yves Meyer et la théorie des nombres

Jean-Paul Allouche[1]

Les théoriciens des nombres « officiels » ne reconnaîtraient peut-être pas Yves Meyer comme étant vraiment un des leurs. Et pourtant, la théorie des nombres est l'un des domaines auxquels il a apporté des contributions majeures d'après la notice de l'ICM [4]. Et pourtant encore, en se limitant aux titres de certains de ses articles, on trouve les mots : *nombres algébriques, nombres transcendants* [9], *adèles et séries trigonométriques spéciales* [11], *nombres premiers et vibrations* [12], *séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques* [14]...

Nous allons essayer de montrer les liens forts entre plusieurs travaux d'Yves et la théorie des nombres, en choisissant quatre articles (pas forcément les plus connus) où il présente soit des résultats en théorie des nombres, soit des résultats pour la démonstration desquels il utilise (ou démontre) des lemmes clairement arithmétiques.

1. Nombres transcendants et équirépartition modulo 1

Le premier théorème de [9] s'énonce ainsi.

Théorème 1. (cf. [9, Théorème 1]) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une suite* $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *de nombres réels telle que* $|\lambda_n - n| \leqslant \varepsilon$ *et que* $(x\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ *est équirépartie modulo* 1 *si et seulement si le nombre réel* x *est transcendant.*

Le sujet de cet article inspira beaucoup les théoriciens des nombres dans les années 1968-1970 (voir en particulier les travaux de M. Mendès France [7, 8], F. Dress [2, 3] et G. Rauzy [20]).

2. Vibrations des sphères

En 1973 si je me souviens bien, J. Giraud alors directeur des études de mathématiques à l'ÉNS de Saint-Cloud, recevant les élèves de première année pour les conseiller sur le choix d'un DEA (on dirait maintenant master de recherche), répondit sans hésitation à ma vague indication sur mon goût pour la théorie des nombres : allez voir Yves Meyer, il fait de jolies choses de théorie des nombres en faisant vibrer des sphères.

Si l'on se plonge dans les travaux correspondants d'Yves, par exemple en relisant son exposé au Séminaire Goulaouic-Schwartz [13], on voit que la question qui l'intéresse est l'étude des solutions de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

où u est une fonction de $S_{n-1} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (S_{n-1} est la sphère $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$).

Voici deux des théorèmes donnés par Y. Meyer dans cet article, et dont je ne présenterai volontairement que des énoncés « en français courant », donnés en commentaire dans [13], dans le style caractéristique d'explication bienveillante

[1] CNRS, Institut de Math., équipe C. et O., Université Pierre et Marie Curie.

qu'affectionne Yves. (Que le lecteur bourbachisant se rassure, des énoncés en bonne et due forme sont donnés dans l'article ; ils veulent d'ailleurs dire exactement la même chose.)

Théorème 2. (cf. [13, Commentaire sur le théorème 1]) *Si $u(\sigma, t_0)$ est très grand, cette forte vibration se répercutera au point antipodique $-\sigma$ au bout d'un temps ne dépassant pas 2π.*

Puis l'auteur se demande si durant ce laps de temps il va nécessairement y avoir de fortes vibrations aux points « intermédiaires ». La réponse est non.

Théorème 3. (cf. [13, Commentaire sur le théorème 1]) *Une vibration qui était restée négligeable « pendant des siècles » peut dans un voisinage arbitrairement petit du « pôle nord » et du « pôle sud » devenir très grande, tout en restant toujours négligeable sur le reste de la sphère.*

La lecture des démonstrations montre qu'Y. Meyer utilise (ou démontre) des lemmes de théorie des nombres dont voici quatre exemples cruciaux pour démontrer le théorème 2 et un exemple crucial pour démontrer le théorème 3.

Lemme 1. ([13, Lemmes 1, 3, 5, 6 et inégalité (19)])

– *(i) Soient $p, p_1, p_2, \dots, p_n$ $n+1$ nombres premiers distincts. Alors $\sqrt{p}$ n'appartient pas au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$.*

– *(ii) Soit $m \geqslant 1$ un entier, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ m nombres réels $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, et $s_1, s_2, \dots, s_m$ m fonctions continues et 2π-périodiques. Alors*

$$\limsup_{t\to\infty} (s_1(\omega_1 t) + s_2(\omega_2 t) \cdots + s_m(\omega_m t)) = \sup_{\mathbb{R}} s_1(t) + \sup_{\mathbb{R}} s_2(t) + \cdots + \sup_{\mathbb{R}} s_m(t).$$

– *(iii) Soit $q \geqslant 2$ un entier sans facteur carré, $a \geqslant 1$ un entier et $\theta_q > 1$ l'unité fondamentale du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$. Il existe un ensemble fini A de solutions $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ tel que Card $A \leqslant d^2$ et tel que toute solution $z = x + y\sqrt{q}$ de $x^2 - qy^2 = a$ s'écrive $z = \alpha\theta_q^j$ où $j \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in A$.*

– *(iv) L'unité fondamentale $\theta_q > 1$ d'un corps quadratique réel vérifie l'inégalité $\theta_q \geqslant (1+\sqrt{5})/2$.*

– *(v) Il existe une suite $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ de ± 1 telle que pour tout réel t et tout entier $n \geqslant 1$, on ait*

$$\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant N} \varepsilon_k e^{ikt}\right| \leqslant 16\sqrt{N}.$$

3. Nombres de Pisot, analyse harmonique et quasicristaux

Au début des années 1970, Yves Meyer s'intéressa à des liens entre nombres de Pisot et de Salem et analyse harmonique. Il écrivit en particulier les livres [10, 15]. Un peu moins de quinze ans plus tard, la découverte des *quasicristaux* [21], ces corps intermédiaires entre l'ordre des *cristaux* et le désordre des *verres*, donna lieu à une intense recherche en mathématiques et en physique. Je me souviens de M. Mendès France (probablement aux Houches en 1986, mais sans doute aussi ailleurs) me disant ainsi qu'à d'autres collègues que les physiciens devraient aller voir les travaux d'Y. Meyer dans les deux livres cités ci-dessus. Et ce sont finalement M. Duneau et A. Katz qui en parlèrent à Yves (voir [16]). C'est alors aux Houches en 1994 qu'Yves rappela ses travaux des années 1970 [16]. Nous allons voir que la théorie des nombres y joue un rôle particulier, en nous limitant à deux définitions et un théorème.

Définition

– (i) Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^n$ est appelé ensemble de Delone (ou Delaunay) s'il existe deux rayons R_1 et R_2, tels que $R_2 > R_1 > 0$, ayant la propriété que les boules de rayon R_1 et de centre quelconque contiennent chacune au plus un point de Λ et que les boules de rayon R_2 et de centre quelconque contiennent chacune au moins un point de Λ.

– (ii) Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{R}^n$ est appelé quasicristal si c'est un ensemble de Delone et s'il existe un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.

Bien sûr on peut faire le lien avec d'autres définitions comme l'engendrement par « coupe et projection ». Pour en savoir plus (mais aussi pour savoir ce que sont les *ensembles harmonieux*, les *ensembles modèles*, les *quasicristaux duaux*, les *ensembles... de Meyer*), on pourra lire par exemple les articles de R. V. Moody [18] et J. C. Lagarias [6], et bien sûr les deux livres d'Y. Meyer cités ci-dessus [10, 15]. Nous nous contenterons d'énoncer un joli théorème, avec un fort parfum d'arithmétique.

Théorème 4. (cf. [16, Théorème 6]) *Soit Λ un quasicristal, et soit θ un nombre réel > 1. Si $\theta\Lambda \subset \Lambda$, alors θ est soit un nombre de Pisot soit un nombre de Salem.*

À rebours, pour chaque entier $n \geqslant 1$ et chaque nombre θ qui soit Pisot ou Salem, on peut trouver un quasicristal Λ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\theta\Lambda \subset \Lambda$.

En conclusion de l'article [16], Y. Meyer indique son admiration pour les quasicristaux exhibés par J. Patera [19] et explique qu'une raison pour laquelle son travail n'a pas été reconnu par les physiciens est peut-être que, pour résoudre le problème qu'il avait attaqué, il avait besoin de la recherche systématique de tous les quasicristaux alors que les quasicristaux spécifiques considérés par J. Patera lui auraient été de peu d'utilité : ils sont fondés sur un nombre de Pisot particulier (le nombre d'or) alors que lui avait besoin de tous les nombres de Pisot. Je cite cette conclusion car elle fait écho pour moi à ce que dit le compositeur (minimaliste) T. Johnson ; là où le mathématicien est intéressé par tous les objets ayant une propriété donnée, le musicien (le compositeur) s'intéressera seulement à un petit nombre d'entre eux, des « joyaux » : *Mathematicians always look for things that are generally true. The fact that something happened once in some particular situation doesn't mean much for them. For me, however, and for other composers who work with mathematical models, it is great to find some crazy beautiful automaton, or the shortest possible something, or some immense perfect number that happens to be a perfect palindrome, or other oddball mathematical models. A composer doesn't have to generalize or prove anything. It's sufficient that the idea is interesting and the music works* [5].

4. Bruissements

En 2001 paraissait un article intitulé *Noiselets* [1]. Ce terme ne semble pas avoir été traduit et nous proposons ici *Bruissements*. Pour « faire court » indiquons seulement ici comme Y. Meyer dans [17] que « la base orthonormée des bruissements est la base la plus décorrélée des bases de paquets d'ondelettes ». Ce qui nous a poussé à citer cet article [1] dans le paragraphe *Théorie des nombres* est qu'il y est fait un usage essentiel des suites de Thue-Morse, du dragon (pliage de papier) et de Shapiro-Rudin. Ces suites sont des prototypes classiques de suites engendrées par automate fini (on dit *suites automatiques*), et, sans prêcher exagérément pour sa propre paroisse, l'auteur note que dans la classification par sujets des *Mathematical Reviews* et de *Zentralblatt* on peut lire : 11B85 Automata sequences. (Au passage on remarquera que la propriété essentielle de la suite de Shapiro-Rudin est de satisfaire à l'inégalité donnée dans le (v) du lemme 1).

5. La théorie des nombres a des applications ?

Ce bref tour d'horizon nous semble montrer à l'envi qu'Y. Meyer est (entre autres) un théoricien des nombres. Mais aussi, en regardant en particulier les deux paragraphes précédents, que la théorie des nombres peut, comme toutes les mathématiques d'ailleurs, avoir des applications imprévues, et ce bien après la publication de résultats théoriques fondamentaux. Pour Yves nous avons déjà cité les quasicristaux, mais l'histoire ne s'arrête pas là. En effet les *bruissements* (noiselets) sont utilisés dans le *compressed sensing* dont la philosophie est que l'échantillonnage d'images est plus économique dans la base la plus distante de la base de Haar où ces images sont comprimées de manière *parcimonieuse* : J.-L. Starck a amélioré la méthode d'échantillonnage découverte par E. Candès et D. Donoho et connue sous le nom de *compressed sensing*, fournissant en particulier un nouvel algorithme de transmission de données entre Herschel (mission spatiale de l'agence spatiale européenne) et la terre, à base de *bruissements*. Au passage j'indiquerai que si je me suis permis de proposer une traduction en français du mot *noiselet*, il existe déjà pour *compressed sensing* l'équivalent *acquisition comprimée*, voir par exemple l'article de la Recherche (volume 445, septembre 2010) cité dans la revue de presse :

`http://images.math.cnrs.fr/Revue-de-presse-septembre-2010.html`
voir aussi [17].

6. Références

[1] R . Coifman, F. Geshwind, Y. Meyer, Noiselets, *Appl. Comput. Harmonic Anal.* **10** (2001) 27–44.

[2] F. Dress, Sur l'équirépartition de certaines suites, *Acta Arith.* **14** (1968) 169–175.

[3] F. Dress, Intersections d'ensembles normaux, *J. Number Theory* **2** (1970) 352–362.

[4] `http://www.icm2010.org.in/prize-winners-2010/carl-friedrich-gauss-prize-yves-meyer`

[5] T. Johnson, communication personnelle.

[6] J. C. Lagarias, Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996) 365–376.

[7] M. Mendès France, Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, *Acta Arith.* **14** (1968) 163–167.

[8] M. Mendès France, Nombres transcendants et ensembles normaux, *Acta Arith.* **15** (1969) 189–192.
[9] Y. Meyer, Nombres algébriques, nombres transcendants et équirépartition modulo 1, *Acta Arith.* **16** (1970) 347–350.
[10] Y. Meyer, Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique, *Lect. Notes. Math.* **117**, Springer Verlag, 1970.
[11] Y. Meyer, Adèles et séries trigonométriques spéciales, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres* **13** (1971-1972), Exp. No. 11, 16 p.
[12] Y. Meyer, Nombres premiers et vibrations, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres* **13** (1971-1972), Exp. No. 15, 5 p.
[13] Y. Meyer, Étude asymptotique des vibrations des sphères, *Séminaire équations aux dérivées partielles (dit « Goulaouic-Schwartz »)* (1971-1972), Exp. No. 28, 9 p.
[14] Y. Meyer, Séries trigonométriques spéciales et corps quadratiques, *Studia Math.* **44** (1972) 321–333.
[15] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North Holland, 1972.
[16] Y. Meyer, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers in *Beyond Quasicrystals* (Les Houches, 1994), Springer, pp. 3–16, 1995.
[17] Y. Meyer, Les mathématiques embarquées dans la mission Herschel, disponible à l'URL `http://www.cmla.ens-cachan.fr/fileadmin/Groupes/Seminaire/slides20092010/Mission.pdf`
[18] R. V. Moody, Meyer sets and their duals, in *The Mathematics of Aperiodic Order*, NATO ASI Series C489, pp. 403–441, 1997.
[19] J. Patera, The pentacrystals, in *Beyond Quasicrystals* (Les Houches, 1994), Springer, pp. 17–31, 1995.
[20] G. Rauzy, Caractérisation des ensembles normaux, *Bull. Soc. Math. France* **98** (1970) 401–414.
[21] D. Shechtman, I. A. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Letters* **53** (1984) 1951–1953.