MATHÉMATIQUES

Une construction de l'espace L^1 de Lebesgue

Jerôme Depauw[1]

1. Introduction

Dès la fin du XVII^e siècle, le système de notation que nous utilisons pour les intégrales, ainsi que les règles fondamentales de leurs calculs, sont mis en place. Leibniz invente notamment les symboles $\int$ et ∂x, et met en évidence, en même temps que Newton, la réciprocité des opérations d'intégration et de dérivation. Cela permet le calcul explicite des intégrales, qui se développe tout au long du XVIII^e siècle, notamment dans les travaux d'Euler. Mais il faut attendre la première moitié du XIX^e siècle pour trouver la première définition rigoureuse d'intégrale, énoncée par Cauchy. Considérant les subdivisions $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle d'intégration $[a, b]$, l'intégrale d'une fonction f réelle continue par morceaux sur $[a, b]$ est définie comme étant la limite des sommes

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

lorsque le pas $\delta = \max_i(x_{i+1} - x_i)$ tend vers zéro. À partir de là, une question essentielle est celle de l'extension du champ d'application de l'intégrale. En 1866 Riemann étend l'intégrale aux fonctions bornées dont l'ensemble des points de discontinuité peut être, pour tout $\varepsilon > 0$, recouvert par une famille dénombrable d'intervalles $(I_i)_{i\geqslant 1}$ dont la somme des longueurs vérifie $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i| < \varepsilon$ (on reconnaît sans peine la future notion d'ensemble de mesure nulle). Mais surtout il démontre que cette condition détermine, parmi les fonctions bornées, la classe de fonctions la plus large pour laquelle la définition de Cauchy est valide.

Au tout début du XX^e siècle, en 1901, Lebesgue abandonne le découpage de Cauchy de l'intervalle d'intégration, et utilise un découpage adapté à la fonction. Il partitionne l'intervalle $[a, b]$ selon les valeurs de la fonction f, par des ensembles de la forme $E_{y,z} = \{x; y \leqslant f(x) < z\}$. S'inspirant des travaux de Borel, il détermine d'abord à quelle condition on peut attribuer une longueur à ces ensembles. La mesure extérieure $m_e(E)$ d'un ensemble $E \subset [a, b]$ est définie comme étant la borne inférieure, prise sur toutes les familles dénombrables d'intervalles $(I_i)_{i\geqslant 1}$ formant un recouvrement de E, de la somme $\sum_{i=1}^{+\infty} |I_i|$ des longueurs de ces intervalles. Or, de la propriété de Borel sur la compacité de l'intervalle $[a, b]$, découle l'inégalité suivante liant la mesure extérieure de E et de son complémentaire $[a, b] \setminus E$:

$$m_e(E) + m_e([a, b] \setminus E) \geqslant b - a$$

[1] Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, Université François-Rabelais de Tours.

Lorsque cette inégalité est une égalité, l'ensemble E est dit mesurable au sens de Lebesgue, de mesure $m_e(E)$, notée alors $m(E)$. Considérant donc une fonction f à valeurs dans un intervalle borné $[m, M]$ et mesurable (c'est-à-dire telle que pour tous $y < z$, l'ensemble $E_{y,z}$ défini ci-dessus est mesurable) et une subdivision $m = y_0 < \cdots < y_n = M$ de l'intervalle des valeurs de f, Lebesgue démontre que la somme

$$m(E_{y_0,y_1})y_0 + m(E_{y_1,y_2})y_1 + \cdots + m(E_{y_{n-1},y_n})y_{n-1}.$$

tend, lorsque le pas $\eta = \max_i(y_{i+1} - y_i)$ tend vers zéro, vers une quantité qui définit l'intégrale de f. L'intégrale ainsi définie s'applique à plus de fonctions que l'intégrale de Riemann. Surtout, grâce au théorème de convergence dominée, elle est un outil remarquable pour traiter l'intégration terme à terme des séries de fonctions simplement convergentes, problème pour lequel l'intégrale de Riemann demandait la convergence uniforme, nécessitant souvent de complexes découpages préalables.

Mais ce n'est qu'à partir de 1907 que l'intégrale de Lebesgue prend sa pleine dimension, grâce à Fischer et Riesz qui mettent en lumière la notion de convergence en moyenne, et la complétude de l'espace L^2. Dès lors, la théorie de Lebesgue s'impose rapidement comme le cadre idéal pour de nombreuses questions d'analyse. Citons, sans vouloir être exhaustif, la convergence des séries de Fourier, la représentation des fonctionnelles linéaires et ses liens avec la théorie de Stieltjes (théorie passée inaperçue lors de sa publication par Stieltjes en 1894), les équations intégrales et l'expression de leurs solutions grâce à des familles de fonctions orthogonales...

Non seulement l'espace fonctionnel L^p donne son envergure à l'intégrale de Lebesgue, mais il a aussi un intérêt heuristique. Il permet de reposer en termes algébriques la question initiale de l'extension de l'intégrale. Le point de départ n'est plus la fonction f à intégrer, mais l'opérateur d'intégration

$$\Lambda : f \mapsto \int f.$$

La question prend la forme : sur quel espace cet opérateur Λ doit-il être défini ? Cette démarche, qui donne des constructions élégantes et nettes, a été suivie par de nombreux auteurs, comme Riesz, Daniell, Stone, ou encore Bourbaki. Nous adoptons ici ce point de vue, et proposons une construction de l'intégrale de Lebesgue consistant à étendre simultanément l'opérateur d'intégration et l'espace sur lequel il est défini, grâce à la notion classique d'espace complété.

Plus précisément, l'espace C_0 des fonctions en escalier, nulles en dehors d'un intervalle borné et continues à droite, muni de la distance d définie par $d(\varphi, \psi) = \int |\varphi - \psi|$, est un espace métrique sur lequel l'application $\Lambda : \varphi \to \int \varphi$ est uniformément continue. L'intégrale de Lebesgue sur la droite réelle peut donc être définie comme étant le prolongement de Λ à l'espace complété de C_0 pour la distance d. Il reste à identifier cet espace complété comme espace de fonctions. C'est l'objet de cette note. La démarche est la suivante. Le complété abstrait d'un espace métrique est construit à partir des suites de Cauchy de ce dernier. Dans le cas d'un espace vectoriel normé, les suites de Cauchy peuvent être remplacées par les séries normalement convergentes (au sens où la série des normes converge). Or nous disposons du résultat préliminaire suivant lequel « une série de fonctions en escalier normalement convergente converge presque partout ». Cela permet d'associer à toute suite de Cauchy de C_0 une fonction définie presque partout.

Cette démarche nous obligera à introduire la convergence presque partout avant d'avoir défini l'intégrale de Lebesgue. Il n'y a évidement aucune contradiction dans cette progression logique, qui suit au fond la chronologie historique. En effet, comme cela a été mentionné ci-dessus, la notion d'ensemble négligeable a été introduite par Riemann, pour caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann, avant que Lebesgue ne construise sa mesure. Signalons d'ailleurs que Riesz et Sz.-Nagy proposent, dans leur livre [1], une construction de l'intégrale de Lebesgue reposant sur les ensembles négligeables et les fonctions en escalier.

La construction de l'espace L^1 est faite dans tout traité d'intégration. La démonstration de sa complétude passe en général par le théorème de convergence monotone de Beppo Levi. C'est aussi le cas dans le livre de Riesz et Sz.-Nagy mentionné ci-dessus. Notre démarche est différente. Elle est motivée par le fait que la complétude de L^1 est un résultat central de la théorie de Lebesgue et qu'il est donc naturel d'en faire le but premier d'une construction de l'intégrale.

2. Séries de fonctions en escalier

Cet exposé s'appuie sur la notion d'intégrale d'une fonction en escalier, que nous considérons comme connue. On utilisera notamment le fait que l'application $\Lambda : \varphi \to \int \varphi$ définit sur l'espace C_0 une forme linéaire positive (ce qui relève du calcul algébrique).

Rappelons la définition d'un ensemble négligeable, et les propriétés élémentaires de ces ensembles.

Définition 1 (Ensembles négligeables). *Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille dénombrable d'intervalles $(I_n)_{n\geqslant 1}$ recouvrant A et telle que la somme des longueurs $\sum_{n=1}^{+\infty} |I_n|$ soit inférieure à ε.*

Dans la suite l'expression « presque partout » qualifiera une propriété vérifiée en dehors d'un ensemble négligeable. On a :

– quitte à rallonger chaque intervalle I_n d'une longueur inférieure à $\varepsilon/2^n$, on peut choisir ces intervalles ouverts ;

– la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable ;

– tout ensemble dénombrable est négligeable.

On notera $\|\varphi\|_0$ la norme $\int |\varphi|$ d'une fonction $\varphi \in C_0$. Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, notre construction repose sur un résultat préliminaire, précisé dans le lemme ci-dessous. Ce lemme, relativement élémentaire dans son énoncé, est une conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$ pour le premier alinéa, et de sa compacité locale pour le second. Sa démonstration est exposée dans le dernier paragraphe (paragraphe 6).

Lemme 1 (Séries de fonctions en escalier)**.** *Soit $(\psi_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions en escalier dans C_0 .*

– Si la série des normes $\sum_{k=1}^{+\infty} \|\psi_k\|_0$ est bornée alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x)$ ne converge pas est négligeable.

– *Supposons de plus qu'il existe une fonction $\varphi \in C_0$ et un ensemble négligeable $\mathcal{N}$ tels que $\sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(x) = \varphi(x)$ pour $x \notin \mathcal{N}$. Alors la convergence a lieu en norme dans C_0 : $\| \sum_{k=1}^{n} \psi_k - \varphi\|_0 \to 0$ pour n tendant vers l'infini.*

Notons que par continuité de $\Lambda : \varphi \mapsto \int \varphi$, on en déduit, toujours sous les hypothèses du deuxième alinéa du lemme, que $\int \varphi = \lim_n \int \sum_{k=1}^{n} \psi_k$, ce qui s'écrit par linéarité

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi_k. \tag{1}$$

3. Intégrale de Lebesgue

Les sommes partielles d'une série normalement convergente forment une suite de Cauchy. Les sommes de telles séries sont donc des points du complété. Le lemme précédent nous indique comment les identifier comme fonctions. L'objet de ce paragraphe est d'étendre la notion d'intégrale aux fonctions qui sont la somme presque partout des séries considérées dans le lemme 1, et de donner quelques propriétés élémentaires de cette intégrale.

Définition 2 (Intégrale de Lebesgue). *Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est intégrable au sens de Lebesgue s'il existe une suite $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions en escalier de C_0 telle que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int |\psi_n|$ soit bornée, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n = f$ presque partout. L'intégrale de f est $\int f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int \psi_n$.*

La définition ci-dessus a bien un sens, puisque la série des intégrales ne dépend pas de la suite $(\psi_n)_n$. En effet si $(\psi'_n)_n$ est une autre suite comme dans la définition ci-dessus, la suite $(\psi_n - \psi'_n)_n$, vérifie les hypothèses du second alinéa du lemme 1 avec $\varphi = 0$. De l'égalité (1) on déduit bien $\sum_n \int \psi_n = \sum_n \int \psi'_n$.

Une fonction en escalier $\varphi \in C_0$ est intégrable et les deux notions d'intégrales coïncident. Cela se voit en prenant $\psi_1 = \varphi$ et $\psi_n = 0$ pour $n \geqslant 2$.

Enfin, il découle immédiatement de la définition ci-dessus que si l'on modifie une fonction intégrable sur un ensemble négligeable, on ne modifie ni son caractère intégrable, si son intégrale.

Théorème 1 (Linéarité)**.** *L'ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue forme un espace vectoriel sur lequel l'application $f \mapsto \int f$ est une forme linéaire.*

Démonstration.— Ce théorème découle directement de la définition précédente et des propriétés analogues de l'intégrale sur C_0. □

Proposition 1 (Sommabilité, positivité)**.** *Si une fonction f est intégrable au sens de Lebesgue, alors sa valeur absolue $|f|$ l'est aussi et on a $|\int f| \leqslant \int |f|$. Notamment, si $f \geqslant 0$ presque partout, alors $\int f \geqslant 0$.*

Démonstration.— Soit une fonction intégrable f. Soit une série normalement convergente de C_0 telle que $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k$ presque partout comme dans la définition 2. Posons $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_k$ et $\psi'_n = |\varphi_n| - |\varphi_{n-1}|$ (où $\varphi_0 = 0$). On a $|f| = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi'_k$ presque partout et $|\psi'_n| \leqslant |\psi_n|$. D'après la définition 2 cela montre que la fonction $|f|$ est intégrable et $\int |f| = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi'_k$. D'autre part d'après la définition 2 appliquée cette fois à f on a aussi $\int f = \sum_{k=1}^{+\infty} \int \psi_k$. Ces deux dernières égalités s'écrivent

$$(2) \qquad \int |f| = \lim_n \int |\varphi_n| \qquad \text{et} \qquad \int f = \lim_n \int \varphi_n.$$

L'inégalité $|\int f| \leqslant \int |f|$ découle alors de la propriété analogue vérifiée par l'intégrale des fonctions en escalier. Enfin, si $f \geqslant 0$ presque partout, alors $f = |f|$ presque partout, d'où l'on déduit $\int f \geqslant |\int f| \geqslant 0$. □

Le théorème suivant est la généralisation du lemme 1 au cas d'une série de fonctions intégrables.

Théorème 2 (Convergence des séries). *Soit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions intégrables telle que la série des intégrales $\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|$ soit bornée. Alors la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque partout vers une fonction intégrable g et on a $\lim_{\ell\to+\infty} \int |\sum_{n=1}^{\ell} f_n - g| = 0$.*

Démonstration.— Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. *Soient une fonction intégrable f et un nombre $\alpha > 0$. Parmi les séries normalement convergentes de C_0 telles que $f = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_\ell$ presque partout il en existe qui vérifient $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int |\psi_\ell| < \int |f| + \alpha$.*

Démonstration du lemme 2.— Soient une fonction intégrable f et, suivant la définition 2, une série normalement convergente de C_0 telle que $f = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_\ell$ presque partout. Considérons $\varphi_n = \sum_{\ell=1}^{n} \psi_\ell$. D'après (2) il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\int |\varphi_n| < \int |f| + \alpha/2$. D'autre part il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $\sum_{\ell=n_1}^{+\infty} \int |\psi_\ell| < \alpha/2$. Soit $N = \max(n_0, n_1)$. Alors la suite $(\psi'_\ell)_\ell$ définie par $\psi'_1 = \varphi_N$ et $\psi'_\ell = \psi_{N+\ell-1}$ si $\ell \geqslant 2$ convient. □

Revenons à la démonstration du théorème 2. Soit $n \geqslant 1$. D'après le lemme 2 ci-dessus avec $\alpha = 2^{-n}$, il existe une suite $(\psi_{n,\ell})_{\ell\geqslant 1}$ de fonctions en escalier de C_0 telle que $\sum_\ell \int |\psi_{n,\ell}| \leqslant \int |f_n| + 2^{-n}$, et telle que $\sum_\ell \psi_{n,\ell}(x) = f_n(x)$ pour x en dehors d'un ensemble négligeable noté $\mathcal{N}_n$. Posons $\psi'_i = \sum_{j=1}^{i} |\psi_{j,i-j+1}|$. Comme on peut changer l'ordre de sommation dans une série double à termes positifs (sur la théorie des séries doubles, on renvoie au livre de Titchmarsh [2], paragraphe 1.6), on a

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \int \psi'_i = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int |\psi_{n,\ell}| \Big).$$

Cela est majoré par $\sum_{n=1}^{+\infty} (\int |f_n| + 2^{-n})$, d'où l'on déduit que la série $\sum_i \int \psi'_i$ est bornée. D'après le lemme 1, la série $\sum_i \psi'_i(x)$ converge pour x en dehors d'un ensemble négligeable, noté $\mathcal{N}_0$. Il s'en suit que la série double de terme général $\psi_{n,\ell}(x)$ est absolument convergente, et que l'on peut à nouveau changer l'ordre de sommation. On a donc pour $x \notin \mathcal{N}_0$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} \psi''_i(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \psi_{n,\ell}(x) \Big),$$

où l'on a posé $\psi''_i(x) = \sum_{j=1}^{i} \psi_{j,i-j+1}(x)$. Comme $|\psi''_i| \leqslant \psi'_i$, il découle de la définition 2 que la fonction g définie pour $x \notin \mathcal{N}_0$ par $g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \psi''_i(x)$, et

$g(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}_0$, est une fonction intégrable, d'intégrale $\int g = \sum_{i=1}^{+\infty} \int \psi_i''$. Comme de plus la série double des intégrales $\int \psi_{n,\ell}$ est aussi absolument convergente, cette dernière égalité s'écrit aussi

$$\int g = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=1}^{+\infty} \int \psi_{n,\ell} \Big). \tag{4}$$

D'une part on peut calculer (3) grâce au fait que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{N}_n$ est négligeable, et d'autre part on peut appliquer la définition 2 à chaque somme en ℓ dans (4). On obtient ainsi :

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \qquad \text{presque partout, et} \qquad \int g = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n.$$

Ce raisonnement peut aussi s'appliquer à la série des valeurs absolues $|f_n|$, et montre l'existence d'une fonction intégrable h telle que

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \qquad \text{presque partout, et} \qquad \int h = \sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|.$$

Or on a clairement $|g| \leqslant h$ presque partout. Par positivité de l'intégrale, on en déduit $\int |g| \leqslant \int h$. En revenant aux fonctions f_n, cela s'écrit $\int |g| \leqslant \sum_n \int |f_n|$. Cela restant vrai pour les sommes à partir du rang $\ell + 1$, on a $\int |g - \sum_{n=1}^{\ell} f_n| \leqslant \sum_{n=\ell+1}^{+\infty} \int |f_n|$, qui tend bien vers 0 pour ℓ tendant vers l'infini. □

Ce théorème a le corollaire immédiat suivant.

Lemme 3 (Fonctions négligeables). *Soit une fonction intégrable f. On a $\int |f| = 0$ ssi $f = 0$ presque partout.*

Démonstration.— Le sens direct découle de l'application du théorème ci-dessus à la série de terme général $f_n = |f|$. Le sens réciproque se lit sur la définition 2. □

4. Complétude de L^1

Il découle du paragraphe précédent que la fonctionnelle définie sur l'espace des fonctions intégrables par $N(f) = \int |f|$ est une semi-norme, qui identifie deux fonctions égales presque partout. Dans la suite, on note $\tilde{f}$ la classe d'équivalence des fonctions égales presque partout à la fonction intégrable f. L'espace de Lebesgue L^1 est défini comme étant l'espace de ces classes d'équivalences. Les propriétés rapidement énumérées dans la proposition suivante se vérifient sans difficulté.

Proposition 2. *L'intégrale, l'addition, la multiplication par un scalaire, la valeur absolue, définies sur les fonctions intégrables, sont des opérations qui se factorisent sur L^1, et en font un espace vectoriel, admettant la fonctionnelle $\tilde{f} \to N(f)$ pour norme. La forme linéaire positive $\tilde{f} \mapsto \int f$ est uniformément continue.*

On notera $\|\tilde{f}\|_1$ la quantité $N(f)$. Soit $\tilde{C}_0 \subset L^1$ l'espace des classes $\tilde{\varphi}$ des fonctions $\varphi \in C_0$. Notons que l'injection canonique $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ est une isométrie de $(C_0, \|\cdot\|_0)$ sur $(\tilde{C}_0, \|\cdot\|_1)$. De plus, d'après la définition 2 et le théorème 2, l'espace $\tilde{C}_0$ est dense dans L^1.

Théorème 3. *L'espace L^1 s'identifie au complété de C_0.*

Démonstration.— On vient de remarquer que C_0 s'identifie à un sous-espace dense de L^1. Il suffit donc de vérifier que L^1 est complet. Or le théorème 2, traduit en termes de classes de fonction modulo l'égalité presque partout, signifie « toute série normalement convergente de L^1 converge dans L^1 ». On sait qu'un espace vectoriel normé vérifiant une telle propriété est complet. □

5. Théorie de Lebesgue classique

La complétude de L^1 et la densité de $\tilde{C}_0$ sont des arguments suffisants pour affirmer que notre définition de l'espace de Lebesgue est équivalente à la définition classique. Cependant, il peut être intéressant d'avoir une démonstration de ce fait ne demandant rien d'autre de connu sur la théorie de Lebesgue usuelle que la définition d'un ensemble mesurable avec la mesure extérieure. Nous renvoyons pour cela au paragraphe intitulé *Ensembles mesurables (L)* du livre [1]. En effet, bien que la construction de l'intégrale de Lebesgue dans ce livre soit différente de celle exposée ici, les démonstrations du dit paragraphe ne reposent que sur la densité de $\tilde{C}_0$ dans L^1 et le théorème de convergence dominée. Elles peuvent donc être reprises sans modification ici, sous réserve que l'on explique comment s'obtient ce dernier théorème. C'est l'objet de ce paragraphe (où l'on ne détaillera pas toutes les démonstrations). Commençons par présenter le théorème de convergence monotone, appelé aussi théorème de Beppo Levi, qui est le théorème 2, dans le cas particulier de fonctions $f_n \geqslant 0$. On donne l'énoncé à l'aide des sommes partielles $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Théorème 4 (Beppo Levi)**.** *Soit une suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ croissante de fonctions intégrables. Si la suite des intégrales $(\int g_n)_n$ est bornée alors la suite $(g_n)_n$ converge presque partout vers une fonction g intégrable et $\int g = \lim_n \int g_n$.*

Le théorème de Beppo Levi a pour corollaires immédiats le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet, ces deux théorèmes s'obtiennent en appliquant le théorème de Beppo Levi successivement aux deux limites monotones définissant la limite inférieure :

$$\liminf(g_n) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{\ell\to+\infty} \min_{k\leqslant n\leqslant \ell}(g_n).$$

Nous ne développons pas ici ces résultats, car leurs démonstrations ne doivent rien à la spécificité de notre construction (pour vérifier que si f et g sont deux fonctions intégrables, leur minimum l'est aussi, il suffit d'écrire $\min(f,g) = (f+g-|f-g|)/2$).

6. Démonstration du lemme 1

Dans ce dernier paragraphe, dédié à la démonstration du lemme 1, la seule intégrale considérée est celle des fonctions en escalier nulles en dehors d'un intervalle borné. Notons que cette dernière permet de définir la longueur d'un ensemble E pouvant s'écrire comme une réunion finie d'intervalles bornés. En effet la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un tel ensemble est une fonction en escalier. On définit donc la longueur de E par $|E| = \int \mathbf{1}_E$.

Commençons par démontrer le premier alinéa de ce lemme. D'après la complétude de $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que la série $\sum_k |\psi_k|$ est bornée presque partout. Soient $M = \sum_{k=1}^{+\infty} \int |\psi_k|$ et $\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\psi_k(x)|$. On a $\int \Psi_n \leqslant M$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des points x pour lesquels la suite $(\Psi_n(x))_n$ n'est pas bornée. Soit $\varepsilon > 0$. Si $x \in \mathcal{N}$, alors $\Psi_n(x)$ dépasse la valeur $M\varepsilon^{-1}$ pour n assez grand. On a donc l'inclusion $\mathcal{N} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, où

$$B_n = \{x \ ; \ \Psi_n(x) \geqslant M\varepsilon^{-1}\}.$$

Puisque $\Psi_n \geqslant 0$, on a $\Psi_n(x) \geqslant M\varepsilon^{-1}\mathbf{1}_{B_n}(x)$. Comme B_n est une réunion finie d'intervalles, sa longueur est bien définie, et se majore par intégration de l'inégalité précédente : $|B_n| \leqslant \varepsilon$. La suite d'ensembles $(B_n)_n$ étant croissante, et l'ensemble $B_n \cap B_{n-1}^c$ (où B^c désigne l'ensemble complémentaire de B) s'écrivant comme une réunion disjointe d'intervalles $\bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n}$, on a $B_n = \bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n} \cup B_{n-1}$, et $|B_n| = \sum_{k=1}^{K_n} |I_{k,n}| + |B_{n-1}|$. Soit de proche en proche, en partant de $B_0 = \varnothing$:

$$B_N = \bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{K_n} I_{k,n}, \qquad \text{et} \qquad |B_N| = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K_n} |I_{k,n}|.$$

Ainsi, en laissant N tendre vers l'infini, on obtient que l'ensemble $\mathcal{N}$ est recouvert par la famille dénombrable des intervalles $(I_{k,n})_{k,n}$, dont la somme des longueurs est $\leqslant \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mathcal{N}$ est négligeable. Or, pour $x \notin \mathcal{N}$, la série de terme général $\psi_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui achève la démonstration du premier point du lemme.

Passons au second point. Soient $K = \max(|\varphi| - \Psi_1)$ et $J = [a, b]$ un intervalle borné en dehors duquel $|\varphi| - \Psi_1$ est nulle. La suite de fonctions $(\Psi_n)_n$ est croissante. Donc pour $n \geqslant 1$, la fonction $|\varphi| - \Psi_n$ est aussi majorée par K, et est négative en dehors de J. Considérons enfin, pour $\eta > 0$ fixé, l'ensemble $E_n = \{x \ ; \ |\varphi(x)| - \Psi_n(x) > \eta\}$, qui est une réunion finie d'intervalles bornés. On vérifie, en distinguant suivant la position de x par rapport à E_n et J, que

$$|\varphi(x)| - \Psi_n(x) \leqslant K\mathbf{1}_{E_n}(x) + \eta\mathbf{1}_J(x).$$

On en déduit, en intégrant puis en laissant n tendre vers l'infini

$$\int |\varphi(x)| - M \leqslant K \lim_{n\to\infty} |E_n| + \eta|J|. \tag{5}$$

Vérifions que $\lim_n |E_n| = 0$. De l'inégalité $|\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\psi_n|$, on déduit que $|\varphi| \leqslant \lim_n \Psi_n$ presque partout, c'est-à-dire que $\bigcap_n E_n$ est négligeable. Soit $\overline{E}_n$ l'adhérence de E_n. Celle-ci s'obtenant en ajoutant à E_n un nombre fini de points (les extrémités des intervalles qui composent E_n), il s'ensuit que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$ ne diffère de $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ que par un ensemble dénombrable de points, et est donc négligeable aussi. On note $\mathcal{N} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. Soit $B = \bigcup_{m=1}^{+\infty} I_m$ une réunion d'intervalles ouverts recouvrant $\mathcal{N}$, et dont la somme des longueurs est inférieur à ε. L'inclusion $\mathcal{N} \subset B$ s'écrit $\mathcal{N} \cap B^c = \varnothing$. Soit en commutant les intersections, $\bigcap_{n,m=1}^{\infty} (\overline{E}_n \cap I_m^c) = \varnothing$. Par compacité de $\overline{E}_1$, il existe un n_0 tel que $\bigcap_{n,m=1}^{n_0} (\overline{E}_n \cap I_m^c) = \varnothing$. D'après la décroissance de la suite d'ensembles $(\overline{E}_n)_n$, on en déduit que $\overline{E}_{n_0} \subset \bigcup_{m=1}^{n_0} I_m$, soit sur les longueurs

$$|E_{n_0}| = \int \mathbf{1}_{E_{n_0}} \leqslant \int \sum_{m=1}^{n_0} \mathbf{1}_{I_m} = \sum_{m=1}^{n_0} |I_m| \leqslant \varepsilon.$$

Donc a fortiori $\lim_n |E_n| \leqslant \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, l'égalité $\lim_n |E_n| = 0$ est démontrée.

On remplace dans la majoration (5), ce qui donne $\int |\varphi| - M \leqslant \eta |J|$. Cela étant vrai pour tout $\eta > 0$, on a $\int |\varphi| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int |\psi_k|$. Cette inégalité reste valide pour les sommes à partir du rang N, et s'écrit alors

$$\int \Big| \varphi - \sum_{k=1}^{N} \psi_k \Big| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int |\psi_k|.$$

En laissant N tendre vers l'infini on obtient $\lim_{N \to +\infty} \|\varphi - \sum_{k=1}^{N} \psi_k\|_0 = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme 1. □

Remerciements. — L'auteur tient à remercier Yves Derriennic et Emmanuel Lesigne, pour leurs conseils et indications durant l'élaboration du présent article.

7. Références

[1] F. Riesz et B. Sz.-Nagy – *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1955, 3e éd.
[2] E. C. Titchmarsh – *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1939, 2nd ed.