HISTOIRE

L'émergence de la notion de groupe d'homologie

Nicolas Basbois

L'introduction[1] de concepts algébriques en topologie au début du vingtième siècle a, on le sait, été déterminante pour le devenir de la discipline. Elle a conduit à la formulation de résultats nouveaux[2] et a permis la mise en œuvre de calculs[3] pour la détermination explicite d'invariants topologiques. Par la suite, elle a donné naissance à une nouvelle branche des mathématiques : l'algèbre homologique[4].

L'algébrisation de la topologie entretient en outre des rapports étroits avec l'émergence de l'algèbre moderne. Par ce seul fait, elle mérite d'être étudiée comme un des événements importants du vingtième siècle mathématique. Mais elle marque plus généralement un moment clé du développement des mathématiques, caractérisé par le transfert de notions entre des domaines traditionnellement séparés, au même titre, par exemple, que l'algébrisation de la géométrie par Descartes. Elle se présente ainsi comme un phénomène historique majeur des mathématiques du vingtième siècle, ce qui explique sans doute que Jean-Alexandre Dieudonné, grand producteur d'analyses historiques, ait consacré son principal ouvrage d'Histoire des Mathématiques [Die89] à la topologie. Selon son analyse, y serait à l'œuvre le mouvement de fond de l'histoire mathématique dans la perspective structuraliste :

– convergence des méthodes et unification des mathématiques (pour nous, la théorie des groupes et la topologie), au travers des transferts d'intuitions entre disciplines ;

– rôle moteur de l'école algébrique allemande (Hilbert, E. Noether) ;

– émergence de structures abstraites en lieu et place des méthodes originelles, empreintes de recours à l'intuition.

Ces thèmes ont d'ailleurs été mis en avant par certains des principaux protagonistes du développement algébrique de la topologie, tels Heinz Hopf et Paul Alexandroff. Ce fut néanmoins en général au détriment de l'histoire interne de ce phénomène, que nous voulons approfondir en montrant la priorité du rapport à l'objet dans l'émergence de la notion de groupe d'homologie.

[1] Je tiens à remercier Jean-Michel Lemaire pour ses critiques des versions préliminaires de cet article, Colin McLarty pour ses remarques et encouragements ainsi que Frédéric Patras pour tous ses conseils avisés.

[2] Cf. [Hir99] p. 64 : « The sensational new concepts and results would have been impossible even to formulate without algebraic objects. »

[3] Cf. [Wei99] p. 797 : « A 1925 observation of Emmy Noether (...) shifted the attention to the « homology groups » of a space, and algebraic techniques were developed for computational purposes in the 1930's. »

[4] Cf. [Wei99] pour un survol de l'histoire de l'algèbre homologique et [Die89] pour un tour d'horizon, entre autres, de la topologie algébrique.

Bien entendu, cette histoire des objets et concepts est indissociable d'un mouvement plus complexe, où les programmes de recherche (le structuralisme de Noether), les relations humaines et professionnelles (les contacts entre Noether, Hopf, Alexandroff, Brouwer), l'environnement scientifique (le rôle de Göttingen dans les mathématiques des années 20) jouent, nous le verrons, un rôle essentiel. Cependant, même chez un auteur comme Hopf qui n'hésite pas à mettre ces facteurs au premier plan, c'est bien la résolution des problèmes mathématiques concrets qui reste le moteur du développement scientifique et donne l'occasion à ces facteurs de participer à l'émergence d'une nouvelle *doxa* topologico-algébrique.

Cette confluence de facteurs multiples dans l'édification de la topologie algébrique moderne nous semble d'ailleurs un cas d'école pour les mathématiques du vingtième siècle, et justifier amplement que nous y revenions plus avant ici. En fin de compte, notre propos sera double : dresser un tableau le plus complet possible de cette histoire, en entrant dans le détail du travail des concepts ; articuler ces moments conceptuels aux autres dimensions du phénomène historique.

Pour en revenir à notre objet d'étude, après ces digressions méthodologiques, la topologie, qui était jusque là traitée d'un point de vue combinatoire et faisait appel à une intuition de nature géométrique, s'est vue investie, au début du XX^e siècle, par des outils de théorie des groupes et des concepts abstraits parfois difficilement interprétables en termes géométriques. Ce tournant du développement de la topologie est traditionnellement associé à l'introduction de la notion de groupe d'homologie. Voici pourquoi. Jusqu'alors les topologues associaient des nombres (dits « de Betti » et « de torsion ») à leurs objets d'étude (les polyèdres ou « complexes ») ; il était dans une large mesure connu, mais implicite, que ces nombres étaient caractéristiques de groupes sous-jacents aux polyèdres (groupes qui, lors de leur introduction, furent appelés « groupes de Betti » et « groupes d'homologie »). Parce que justement ces nombres permettaient de décrire sans ambiguïté les groupes en question, il n'était a priori pas nécessaire d'introduire les groupes en topologie combinatoire, sauf à créer une redondance d'informations à première vue inutile. Si l'on considère que l'introduction des groupes de Betti et d'homologie est un indicateur du début de l'algébrisation de la topologie, c'est parce qu'elle marque la première reconnaissance d'un intérêt véritable à considérer la structure de groupe en topologie et a, comme nous le verrons, ouvert la voie à une utilisation de la théorie des groupes en topologie.

Se pose donc une question simple et légitime : quelle est l'origine précise de la notion de groupe de Betti/d'homologie ? À savoir : qui les a conçus ? Qui les a considérés pour la première fois dans la littérature mathématique ? Avec quelles motivations, quels résultats et quel devenir ?

Ces questions ont déjà été considérées dans de précédents travaux, avec un intérêt croissant au cours des vingt dernières années. Notre travail s'inscrit dans cette thématique de recherche et vise à en approfondir les analyses. Nous ferons, entre autres, une synthèse des travaux les plus pertinents sur le sujet[5]. Il en ressort qu'Emmy Noether a eu une influence prépondérante dans la définition des groupes de Betti/d'homologie et, de manière plus générale, dans l'introduction de la théorie des groupes en topologie. Si le premier à définir les groupes d'homologie

[5] Citons notamment [Die84], [Hir99], [ML86], [McL06], [Vol02], [Wei99].

est Leopold Vietoris, mathématicien vivant à Vienne à l'époque qui nous intéresse, et certainement pas un proche d'Emmy Noether, on peut trouver trace d'une rencontre entre Vietoris et Noether – à l'occasion d'un repas chez Brouwer – au cours de laquelle celle-ci aurait expliqué la définition des groupes de Betti[6]. Il semble donc à première vue que l'on puisse attribuer pour une part non négligeable la découverte de Vietoris à l'influence de Noether.

Cette analyse historique superficielle reflète en fait assez mal la réalité. Comme nous l'expliquerons en détails, on ne peut en effet qu'être d'accord avec l'affirmation suivante de Klaus Volkert : « Die Algebraisierung in diesem Sinne scheint in zwei voneinander unabhängigen Entwicklungslinien begonnen zu haben » [7]. Les deux lignes de développement menant à la conception et l'utilisation des groupes d'homologie sont incarnées principalement par Noether et Hopf d'un côté, et Vietoris de l'autre. Si l'environnement conceptuel offert par les grands programmes de recherche – comme l'émergence de l'algèbre moderne et du structuralisme[8] – a de toute évidence joué un rôle important, le travail des concepts proprement dit, c'est en tout cas l'une de nos thèses, a joué un rôle essentiel. Aussi l'analyse directe des textes des auteurs cités est-elle à même de dégager avec clarté des oppositions fondamentales entre les méthodes concurrentes, leurs philosophies sous-jacentes, leurs objectifs et leurs résultats. C'est pourquoi nous nous concentrons sur l'analyse minutieuse des tout premiers textes où figure le concept de groupe de Betti/d'homologie. Cette analyse permet de relativiser largement le rôle des propos de table tenus par Noether au cours du dîner chez Brouwer et, accessoirement, de mieux valoriser le rôle joué par Brouwer dans les travaux d'Alexandroff et Vietoris.

Nous commencerons par rappeler brièvement le cadre d'étude de la topologie dans les années 20. La deuxième section, propédeutique, s'intéressera à l'« abstract » d'un exposé d'Emmy Noether datant de 1925, qui porte en germe la notion de groupe d'homologie et nous donnera une base de réflexion pour l'étude des textes analysés dans les paragraphes suivants. Nous en profiterons pour mentionner les quelques (rares) occurrences de la notion de groupe en topologie avant 1925 afin de mettre en valeur l'avancée suggérée par les propos de Noether. Nous entrerons ensuite dans le cœur de l'analyse mathématique des articles d'époque les plus importants en lien avec notre étude, à savoir : une communication [Vie27A] de Vietoris aux *Mathematische Annalen* faisant suite à l'article de 1926 ([Vie26]) et les articles *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel* de Heinz Hopf et *Über abstrakte Topologie* de Walther Mayer[9]. Ceux-ci feront l'objet, au cours des sections 3, 4 et 5, d'une analyse spécifique. Nous confronterons ces articles entre eux et, plus particulièrement, nous pencherons sur l'influence de Noether dans le travail de Hopf. Nous discuterons enfin, dans la 6e section, de la place du travail

[6] L'épisode est évoqué par Alexandroff, également présent à ce dîner : « In the middle of December Emmy Noether came to spend a month in Blaricum. (...) I remember a dinner at Brouwer's in her honour during which she explained the definition of the Betti groups of complexes, which spread around quickly and completely transformed the whole of topology », [Alex79] p. 324.

[7] « L'algébrisation en ce sens semble avoir commencé selon deux lignes de développement indépendantes l'une de l'autre », cf. [Vol02] p. 283.

[8] Cf. [Cor96].

[9] Respectivement [Hop28B] et [May29].

de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether (qu'Alexandroff a pu lui transmettre) et de Brouwer.

1. Arrière-plan conceptuel : la topologie combinatoire dans les années 1920

Le but de ce paragraphe n'est pas de tracer un historique du développement de la topologie, ou Analysis Situs, depuis les travaux d'Henri Poincaré de la fin du dix-neuvième siècle. Pour le lecteur curieux d'en apprendre plus sur ce développement nous renvoyons entre autres aux premières pages de [Wei99] et aux sections 7.2 et 7.3 de [Epp99], ainsi qu'à [Sar99] pour une analyse synthétique du travail de Poincaré. Nous souhaitons uniquement donner au lecteur les définitions et concepts clés pour la compréhension des objets au centre des réflexions de Noether, Vietoris, Hopf, etc., dont nous débattrons par la suite. L'exposé relativement abstrait et axiomatique qui suit ne doit pas faire oublier au lecteur que la topologie a des inspirations fortement géométriques, ce qui est perceptible dans le vocabulaire utilisé.

Sans entrer dans le détail des terminologies diverses ni dans une description historique du développement de la topologie depuis les travaux de Poincaré, nous pouvons néanmoins donner un socle de définitions commun aux topologues des années 20. Plusieurs définitions des différents objets, se recoupant les unes les autres, ont cohabité, et nous privilégions ici la plupart du temps la version de J. W. Alexander dans [Ale26]. Ce choix est motivé par l'importance des travaux d'Alexander en topologie, par le fait que son article est contemporain de ceux étudiés dans les paragraphes suivants, et parce que Hopf semble reprendre en partie sa terminologie dans [Hop28B] (nous reviendrons sur ce point plus loin). La seule exception concernera la définition de « complexe » qui, dans [Ale26] (selon Alexander lui-même, p. 302), est plus restrictive que les définitions habituelles.

Commençons par rappeler la définition d'un « simplexe » : un k-simplexe est, selon les propres termes d'Alexander, l'analogue k-dimensionnel d'une région tétraédrique (un 1-simplexe est donc un segment, un 2-simplexe un triangle plein, un 3-simplexe un tétraèdre plein, etc.). Tout k-simplexe possède un « bord » défini comme l'ensemble de ses sous-simplexes (aussi appelés « faces ») de dimension 0 à $k-1$ (le bord d'un 0-simplexe est le vide). Ainsi défini, un simplexe est entièrement déterminé par la donnée de ses sommets (les 0-faces).

On peut se représenter un « complexe » comme un agrégat de simplexes éventuellement soudés entre eux selon certaines de leurs faces. Rigoureusement, un complexe peut être défini comme un ensemble fini de simplexes, vérifiant les propriétés :

(1) deux simplexes quelconques de l'ensemble ne peuvent s'intersecter que selon une de leurs faces[10] ;

(2) toute face d'un simplexe de l'ensemble est elle-même un simplexe de l'ensemble.

[10] Dans [Ale26], Alexander donne pour son propos une définition plus restrictive que celle énoncée ici. La définition ici proposée est plus représentative des définitions alors usuelles des complexes.

Les simplexes d'un complexe Φ sont aussi appelés « cellules ».

Une « i-chaîne élémentaire » d'un complexe Φ est une expression symbolique de la forme

$$\pm V_0 V_1 \dots V_i,$$

les V_j désignant les sommets d'une i-cellule de Φ. Deux expressions de la forme précédente sont considérées comme identiques si elles coïncident par permutation paire des sommets qui les composent, opposées si elles coïncident par permutation impaire des sommets qui les composent. On peut exprimer cette propriété en disant qu'une i-cellule $|V_0 V_1 \dots V_i|$ admet deux orientations distinctes, celle définie par la suite de symboles $V_0 V_1 V_2 \dots V_i$ et celle définie par la suite de symboles $V_1 V_0 V_2 \dots V_i$ par exemple[11]. Si l'on désigne les i-chaînes élémentaires par E_s^i, est appelée i-chaîne de Φ toute combinaison linéaire de la forme

$$K^i = \sum_{s=1}^{\alpha^i} x^s E_s^i,$$

où les x^s sont des entiers et où α^i désigne le nombre de i-chaînes élémentaires de Φ.

Le bord, défini précédemment ensemblistement sur les simplexes, peut également être défini algébriquement sur les chaînes : le bord de la i-chaîne élémentaire $V_0 V_1 \dots V_i$ est défini comme la $(i-1)$-chaîne

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s V_0 \dots V_{s-1} V_{s+1} \dots V_i.$$

La définition du bord est ensuite étendue aux chaînes quelconques par linéarité.

Une chaîne est dite fermée ou est appelée « cycle » [12] si son bord est nul. Il est important de noter que tout bord est un cycle (ce qui traduit l'idée intuitive qu'un bord n'a pas de bord). La relation d'homologie s'introduit alors de la façon suivante : un cycle K est dit « homologue à 0 » et on note $K \sim 0$ s'il est le bord d'une chaîne de Φ. Deux chaînes quelconques K et K' de Φ sont dites homologues, et on note $K \sim K'$, si leur différence est homologue à 0 ($K - K' \sim 0$).

Il est maintenant possible d'introduire les nombres alors associés par les topologues aux complexes, et qui furent remplacés plus tard par les groupes d'homologie. Est appelé « i-ème nombre de connexité » (ou également « i-ème nombre de Betti ») du complexe Φ, et est noté P^i, le nombre maximal de i-cycles linéairement indépendants de Φ, relativement à la relation d'homologie.

---

[11] Au sujet de l'orientation, la remarque suivante d'Alexander mérite l'attention ([Ale26] p. 311) : « We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0 V_1 \dots V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell. » Alexander procède ici volontairement de façon abstraite en considérant une expression symbolique sans chercher à en donner une représentation géométrique ou une quelconque intuition. Cette démarche se distingue de la volonté d'Alexander de définir un simplexe (analogue d'un tétraèdre) par recours à l'intuition géométrique. Nous reviendrons sur la question de l'orientation au cours du troisième paragraphe.

[12] Dans [Ale26], Alexander désigne ce concept par l'expression « chaîne fermée » mais la terminologie usuelle est celle de « cycle ».

Les nombres de Betti peuvent être calculés à l'aide d'un des outils primordiaux des topologues avant l'introduction des groupes d'homologie : les « matrices d'incidence ». Si les bords des α^i i-chaînes élémentaires E_s^i s'écrivent sous la forme

$$\sum_{j=1}^{\alpha^{i-1}} \mu_s^j E_j^{i-1},$$

alors la matrice d'incidence en dimension i de Φ est la matrice des coefficients μ_s^j, $1 \leqslant s \leqslant \alpha^i$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha^{i-1}$. Les matrices d'incidence donnent une description complète des complexes en traduisant les relations d'incidence entre les $(i-1)$-chaînes élémentaires et les i-chaînes élémentaires. Si l'on note ρ^i le rang de cette matrice alors on peut montrer (comme le mentionne Alexander dans [Ale26] p. 316) que le i-ième nombre de Betti de Φ vérifie :

$$P^i = \alpha^i - \rho^i - \rho^{i+1}.$$

Le calcul du rang des matrices d'incidence permet donc de déterminer les nombres de Betti de Φ. En outre, depuis les travaux de Poincaré, d'autres nombres étaient considérés comme importants pour la description des complexes : il s'agit des diviseurs élémentaires[13] distincts de ± 1 des matrices d'incidence, appelés « nombres de torsion ».

2. Emmy Noether

Emmy Noether, fille du célèbre mathématicien Max Noether, est née à Erlangen en 1882. Ayant mené la quasi-totalité de ses études jusqu'à ses premières recherches en théorie des invariants à Erlangen, elle s'est ensuite établie à Göttingen en 1915, ayant répondu à l'invitation de David Hilbert et de Felix Klein. Ses compétences dans le domaine des invariants différentiels devaient initialement amener Noether à assister Hilbert dans ses recherches en physique mathématique, mais elle se tourna peu à peu vers l'algèbre. Ses travaux à partir de 1920 en firent progressivement le chef de file de l'algèbre au sein de l'Institut mathématique de Göttingen. De par l'influence d'Emmy Noether, relayée notamment par l'ouvrage *Moderne Algebra* de van der Waerden, Göttingen est considérée comme le berceau de l'algèbre moderne. Elle a même pu être considérée, de 1920 au début des années 30, comme la capitale mondiale des mathématiques, de par la réussite des mathématiques allemandes et la présence à l'Institut des plus grands mathématiciens allemands de l'époque, au premier rang desquels Hilbert, Courant, Klein et bien sûr Noether.

Si Emmy Noether est connue pour son rôle prépondérant dans l'avènement de l'algèbre moderne, son influence en topologie semble beaucoup moins évidente car elle n'a jamais publié d'article de topologie. Pour autant, la littérature mathématique contient une de ses remarques sur le sujet ; nous y consacrons une part conséquente de ce paragraphe. Cette remarque se trouve dans l'« abstract » d'un exposé effectué par Noether lors d'une réunion de la Göttinger Mathematische

[13] On trouvera plus de détails au sujet des diviseurs élémentaires dans le paragraphe suivant.

Gesellschaft en date du 27 janvier 1925. Il s'agit d'une note très courte (parue en 1926) [Noe25], relativement méconnue[14].

L'exposé d'Emmy Noether est intitulé « Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie » [15]. Étant donnée son importance, nous en reproduisons ici intégralement le résumé :

« Die Elementarteilertheorie gibt bekanntlich für Moduln aus ganzzahligen Linearformen eine Normalbasis von der Form $(e_1y_1, e_2y_2, ..., e_ry_r)$, wo jedes e durch das folgende teilbar ist ; die e sind dadurch bis aufs Vorzeichen eindeutig festgelegt. Da jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden dem Restklassensystem nach einem solchen Modul isomorph ist, ist dadurch der Zerlegungssatz dieser Gruppen als direkte Summe größter zyklischer mitbewiesen. Es wird nun umgekehrt der Zerlegungssatz rein gruppentheoretisch direkt gewonnen, in Verallgemeinerung des für endliche Gruppen üblichen Beweises, und daraus durch Übergang von Restklassensystem zum Modul selbst die Elementarteilertheorie abgeleitet. Der Gruppensatz erweist sich so als der einfachere Satz ; in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich. »

Analysons ces quelques lignes. Noether commence par rappeler un résultat classique ; si l'on considère un système de formes linéaires à coefficients entiers, soit $\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^m \beta_k x_k$, etc., où les α_k, β_k,..., sont des entiers et les x_k des indéterminées, et si l'on note N le $\mathbb{Z}$-module engendré par ces formes, alors on peut trouver des quantités y_1,...,y_m, combinaisons à coefficients entiers des x_k et des entiers e_1,...,e_r[16] se divisant successivement, tels que $(e_1y_1, ..., e_ry_r)$ forme une base de N. Formulé autrement, ce résultat revient à dire que, si l'on considère le module libre de type fini M engendré par les x_k, on peut en trouver une base y_1,...,y_m dans laquelle les formes linéaires $\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^m \beta_k x_k$,..., voient leur écriture simplifiée au possible (vu qu'elles deviennent simplement e_1y_1, e_2y_2,...). Le résultat tel que présenté par Noether reste encore ancré dans l'héritage des systèmes linéaires vu qu'il signifie juste que l'on peut rendre diagonal, à l'aide d'opérations élémentaires, un système d'équations de la forme[17]

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + ... = & A \\ \beta_1 x_1 & + & \beta_2 x_2 & + ... = & B \\ ... & & & & \end{array}\right.$$

[14] Cette source n'est guère citée, et on ne peut plus brièvement, que par [ML86], [Wei99] et [McL06], et est absente des œuvres complètes d'Emmy Noether. Klaus Volkert la reproduit intégralement dans [Vol02] mais sans commentaire.

[15] « Déduction de la théorie des diviseurs élémentaires à partir de la théorie des groupes ».

[16] appelés « diviseurs élémentaires ».

[17] À la fin du procédé, le système en question a été mis sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lllll} e_1 y_1 & + & 0 & + 0... = & A' \\ 0 & + & e_2 y_2 & + 0... = & B' \\ ... & & & & \end{array}\right.$$

Il est à noter que l'emploi même de la notion de module, ou dans le langage d'alors, de « Linearformenmodul », n'était en soi pas courant à l'époque, bien qu'il était très clair que l'ensemble des cycles notamment vérifiait les propriétés d'un module. L'usage des matrices d'incidence et des opérations matricielles était l'habitude.

Nul doute que Noether a pu privilégier cette présentation traditionnelle de la proposition des diviseurs élémentaires pour rester le plus possible en phase avec son public mais elle aurait certainement préféré une présentation plus abstraite (considérant uniquement des modules, sans recours au langage des formes linéaires) et plus générale (qui ne se limite pas aux $\mathbb{Z}$-modules) que l'on peut notamment trouver dans le *Moderne Algebra*[18] de son élève, Bartel Leendert van der Waerden.

Noether explique ensuite que le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie peut être prouvé à l'aide de la théorie des modules et des diviseurs élémentaires qu'elle vient de rappeler. En effet tout groupe abélien de génération finie peut être vu comme quotient d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini par un sous-module de « formes linéaires » [19] et donc, une fois mis en œuvre le procédé des diviseurs élémentaires, il apparaît que G peut s'écrire comme somme directe de groupes cycliques d'ordres respectifs $e_1,\ldots,e_r$ plus éventuellement des groupes monogènes infinis[20].

Puis Noether fait remarquer – c'est le point primordial de cette note – que l'on peut très bien se passer de la théorie des modules pour prouver ce théorème et l'obtenir directement avec les seuls outils de la théorie des groupes en généralisant la preuve pour les groupes abéliens finis[21], et ainsi en déduire la théorie des diviseurs élémentaires – elle renverse ainsi totalement l'ordre classique rappelé au début de son exposé, selon lequel on déduit le théorème de décomposition des groupes abéliens de type fini de la théorie des diviseurs élémentaires. Noether considère même qu'il est plus simple de procéder de la sorte. Ce constat l'amène à la conclusion suivante : « in den Anwendungen des Gruppensatzes – z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie – ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich. » [22]

---

[18] La proposition des diviseurs élémentaires (« Elementarteilersatz »), telle qu'énoncée par van der Waerden dans [Wae31] p. 122, affirme :

si N est un sous-A-module d'un A-module libre de type fini M, alors il existe une base $(u_1,\ldots,u_m)$ de M et une base $(v_1,\ldots,v_n)$ de N, avec $n \leqslant m$, et des éléments non nuls $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ de A tels que :

– $v_i = \varepsilon_i u_i$ *pour* $i \in \{1,\ldots,n\}$;
– $\varepsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\varepsilon_i)$.

Cette proposition est valable dans le cas où A est un anneau euclidien, ou encore si A est un anneau principal.

[19] Par exemple, si G est un groupe abélien engendré par les éléments $g_1,\ldots,g_n$ soumis aux relations $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k = 0$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k = 0$, etc., on peut le voir comme quotient du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $g_1,\ldots,g_n$ par le module engendré par les quantités $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k$, etc.

[20] De façon moderne cela revient à dire que G est isomorphe à un produit de la forme

$$\mathbb{Z}^p \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_2)} \times \ldots \times \frac{\mathbb{Z}}{(e_r)}.$$

[21] Le théorème de décomposition pour les groupes abéliens finis a, selon van der Waerden (cf. [Wae85] p. 150), été prouvé pour la première fois par Kronecker (cf. [Kro70]).

[22] « dans la mise en œuvre du théorème pour les groupes – par exemple pour les nombres de Betti ou les nombres de torsion en topologie – un retour par la théorie des diviseurs élémentaires n'est donc pas nécessaire. »

Noether suggère donc en conclusion un lien entre ses considérations théoriques sur les groupes abéliens et diviseurs élémentaires et la topologie. Il nous faut éclaircir ce point.

Le lien entre l'explication de Noether sur les modules et les groupes et sa conclusion sur les nombres de Betti et de torsion se fait via la notion de module. Comme on l'a vu dans le premier paragraphe, le regard des topologues de l'époque se portait sur les chaînes, qui sont des combinaisons linéaires de chaînes élémentaires. C'est Poincaré qui avait eu l'idée de travailler non pas sur les simplexes ou cellules, qui ont une réalité géométrique, mais sur des combinaisons formelles de tels objets. En tant que chaînes particulières, les cycles peuvent également être sommés entre eux de manière formelle. Les cycles forment donc ce qu'on appelle maintenant un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, mais cette terminologie n'était pas utilisée couramment à l'époque. Parmi les cycles certains sont des bords. Étant donnée une base $(x_1, ..., x_m)$ des cycles (en tant que $\mathbb{Z}$-module), les bords s'écrivent donc comme combinaison linéaire à coefficients entiers des x_i, c'est-à-dire ont la forme $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$, etc. En appliquant l'algorithme des diviseurs élémentaires on obtient les nombres de torsion, e_i, et le nombre de ces diviseurs élémentaires permet de déterminer le rang de la matrice d'incidence (cf. le paragraphe 1), et donc les nombres de Betti.

De manière synthétique, le point de vue de l'époque, tel que formulé par Noether dans le langage des modules, était le suivant. L'ensemble N des bords d'une dimension fixée k forme un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, que l'on peut voir comme sous-$\mathbb{Z}$-module du $\mathbb{Z}$-module libre M des k-cycles. Une base de M étant donnée, le théorème des diviseurs élémentaires montre que l'on peut trouver une base $(u_1, ..., u_m)$ de M formée de k-chaînes et une base $(v_1, ..., v_n)$ de N formée de k-cycles, telles que :

– $v_i = \varepsilon_i u_i$ pour $i \in \{1, ..., n\}$;
– $\varepsilon_{i+1} \equiv 0 \ (\varepsilon_i)$.

Les $\mathbb{Z}$-modules pouvant être vus comme des groupes abéliens, les propos de Noether[23] invitent à considérer les ensembles des i-cycles et des i-cycles homologues à 0 comme des groupes. Le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie appliqué au quotient du groupe des i-cycles par le groupe des i-cycles homologues à 0 fait apparaître le i-ième nombre de Betti et les coefficients de torsion (il s'agit respectivement de p et de e_1, e_2, ..., e_r, selon la notation utilisée plus haut). Emmy Noether semble justifier ce point de vue par une mise en œuvre du théorème de décomposition des groupes de génération finie plus aisée que la mise en œuvre des diviseurs élémentaires. En outre, bien que la brièveté de la communication de Noether ne nous donne qu'un accès restreint à ses idées, on peut supposer qu'elle envisageait un gain conceptuel avec l'introduction en topologie des outils de théorie des groupes par le biais des groupes de cycles, etc.

L'approche proposée par Noether n'est justifiée – à ce moment-là en tout cas – par aucun gain concret, aucune application à la simplification d'une preuve ou l'établissement d'un résultat nouveau. Il s'agit d'un simple changement de point de vue, d'une appréhension conceptuellement différente des objets de la topologie combinatoire. Est sous-jacente à cette vision originale la volonté de ne plus s'arrêter aux cycles mais de les regarder modulo la relation d'homologie. Alors que

[23] Voir note 22.

jusqu'alors les nombres de Betti et de torsion étaient déterminés par un processus purement calculatoire de manipulation des cycles, ils sont avec Noether obtenus comme caractéristiques d'un groupe, le groupe résultant du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords, i. e. du quotient par la relation d'homologie. Il semble qu'il y ait eu pour certains mathématiciens quelques obstacles épistémologiques à effectuer ce passage au quotient[24], ce qui explique qu'il ait fallu attendre une trentaine d'années entre les travaux de Poincaré avec notamment la mise en évidence des nombres de Betti et de torsion et l'idée de Noether de considérer l'ensemble des cycles et des bords comme des groupes abéliens.

Une analogie pourra peut-être donner au lecteur une justification de la motivation de Noether à introduire les groupes en topologie, bien que sans gain pratique immédiat. La situation décrite ici est fort proche de celle exposée par Leo Corry dans [Cor96] (pp. 29-32) au sujet du théorème de Jordan-Hölder. En résumé, Camille Jordan, dans un article de 1869, introduisit la notion de « suite de composition » d'un groupe quelconque G non simple. Il s'agit d'une suite croissante de sous-groupes de G dont chacun est distingué dans le suivant, et minimale, au sens où il ne peut être inséré aucun sous-groupe entre deux sous-groupes consécutifs de cette suite qui satisfasse les conditions précédentes. Jordan forma les quotients des ordres de deux sous-groupes successifs d'une suite de composition, et appela les nombres obtenus les « facteurs de composition » (associés à la suite). Il prouva que le nombre de ces facteurs et leurs valeurs sont indépendants de la suite de composition considérée, et forment donc un invariant de G.

Comme l'explique Leo Corry, cette formulation en termes d'invariants numériques nous apparaît rétrospectivement comme limitée. Le travail d'Otto Hölder dans l'article [Hol89] de 1889 pousse plus loin l'analyse des suites de composition et montre qu'il y a plus d'enseignements à tirer que la simple invariance des facteurs de composition mise en évidence par Jordan. En effet, plutôt que de considérer uniquement les quotients des ordres des sous-groupes consécutifs d'une suite de composition, Hölder définit le concept de « groupe quotient » et fit le quotient des sous-groupes consécutifs. À l'aide de cette nouvelle notion, le théorème de Jordan devint : *la collection des groupes quotients déterminés par une série de composition de G est un invariant*[25] *de G.*

Ainsi dans le développement historique initial de ce théorème, dit de Jordan-Hölder, peut-on voir de nombreuses similarités avec la remarque de Noether concernant la théorie des groupes et la topologie. L'information pertinente dans les deux situations est initialement exprimée numériquement ; l'ajout d'une composante structurelle, qui se trouve être dans les deux cas un groupe, permet de reformuler le résultat de manière plus abstraite et, particulièrement dans le cas du théorème de Jordan-Hölder, en gagnant de l'information. L'ajout de la structure permet de gagner en profondeur dans la compréhension, d'ouvrir des perspectives. Dans le cas du travail d'Hölder, les nouveaux concepts introduits soulevèrent de nouveaux

[24] À la page 191 de [McL06], en note, Colin McLarty mentionne l'avis d'Erhard Scholz selon lequel Weyl s'empêchait de réaliser des quotients de groupes car n'aimant pas former des ensembles d'ensembles infinis.

[25] Pour être totalement clair, cette collection est la collection des quotients de sous-groupes consécutifs d'une suite de composition de G. L'invariance est bien sûr prise à isomorphisme près, Hölder précisant bien au début de son article que deux groupes isomorphes peuvent être considérés comme deux mêmes objets.

problèmes féconds comme ceux de factorisation et d'extension de groupes. En topologie, l'introduction de la théorie des groupes fut source d'une compréhension bien supérieure et aboutit à l'émergence d'une nouvelle discipline : la topologie algébrique.

Néanmoins, dans le cadre de la remarque de Noether, l'introduction des groupes en topologie n'apporte dans l'immédiat aucune information réelle supplémentaire, étant donné, comme cela a déjà été mentionné, que les groupes abéliens de type fini sont caractérisés par les nombres de Betti et de torsion. Le gain est donc moins évident que dans le cadre de la reprise par Hölder du théorème de Jordan. Ce sont les développements ultérieurs, au premier rang desquels ceux de Vietoris et Hopf traités dans les paragraphes suivants, qui apporteront une première démonstration de l'intérêt de l'introduction des groupes en topologie.

Avant de clore ce paragraphe, nous voulons évoquer une question que le lecteur peut légitimement s'être posé. On peut en effet trouver étrange que l'idée de considérer les ensembles de chaînes, de cycles ou de bords comme des groupes abéliens ne soit pas apparue plus tôt. Pour être tout à fait complets nous devons d'une part préciser qu'il existe des occurrences de la notion de groupe en lien avec les cycles avant 1925 mais aussi les commenter au vu de la remarque de Noether. En soi, la notion de groupe n'était pas du tout étrangère à la topologie. Poincaré lui-même appelait « groupe fondamental » d'un espace l'ensemble des lacets basés en un même point de cet espace, considérés à homotopie près. Ce groupe était souvent décrit par Poincaré et ses successeurs via générateurs et relations. Poincaré savait qu'en ajoutant les relations de commutativité entre générateurs, le nombre de générateurs linéairement indépendants restant coïncide avec le nombre de Betti 1-dimensionnel, ce qui lui fournissait un lien entre homotopie et homologie, en dimension 1 du moins. Pour autant, Poincaré n'a jamais voulu appeler « groupe » le groupe justement obtenu à partir du groupe fondamental en rajoutant les relations de commutation (i.e. l'abélianisé du groupe fondamental). Si l'on se fie à Colin McLarty par exemple, l'explication de ce fait rétrospectivement curieux semble tenir en le refus de Poincaré d'appeler « groupe » un groupe commutatif et même d'appeler « groupe » un ensemble qui ne soit pas un groupe de permutations[26].

Un prolongement de cette idée se retrouve dans la dissertation *Analytische Untersuchungen über topologische Gruppen* de Hugo Gieseking (1912), un étudiant de Max Dehn. En effet, s'intéressant notamment à l'homotopie sur une surface orientable fermée, Gieseking en vint à considérer le groupe abélien obtenu à partir d'un système de générateurs du groupe fondamental de la surface. Il cita une étude antérieure de Tietze montrant que cet abélianisé du groupe fondamental permet de déterminer les nombres de Betti et de torsion associés à la surface. Gieseking appela ce groupe le « groupe abélien de la surface orientable fermée » [27].

On trouve la même construction dans la deuxième édition du classique *Analysis Situs* d'Oswald Veblen[28]. Veblen nomme même « homology group » le groupe

[26] Cf. [McL06] pp. 207-208.

[27] « Abelschen Gruppe einer geschlossenen zweiseitigen Fläche ». Les quelques remarques que nous venons d'effectuer sur Gieseking ne sont qu'un résumé sommaire de l'étude de Ria Vanden Eynde, [Van92] pp. 174-178.

[28] Cf. [Veb21] pp. 145-149. L'original est de 1916 et la deuxième édition de 1921.

abélien ainsi obtenu (qui est le groupe d'homologie 1-dimensionnel), ce qui semble constituer la première occurrence de la terminologie « groupe d'homologie ».

Il ne faut donc pas en soi s'attarder uniquement sur le fait que Noether introduit la notion de groupe en lien avec la topologie. On ne peut lui reconnaître une originalité et exclusivité totales au vu des exemples précédents. Néanmoins les occurrences précédentes de la notion de groupe en rapport avec l'homologie ne se faisaient que via la dimension 1. Il se trouve que le groupe d'homologie en dimension 1 est l'abélianisé du groupe fondamental, mais il n'y a pas de relation aussi simple entre homologie et homotopie en dimension supérieure. Le groupe d'homologie 1-dimensionnel obtenu par Gieseking ou Veblen ne provient pas du passage au quotient du groupe des cycles par le groupe des bords mais simplement de l'abélianisation du groupe fondamental. La démarche de Noether est évidemment plus profonde. Elle décide de travailler sur les cycles à homologie près, via un passage au quotient de deux groupes, et ce en dimension quelconque. Son procédé est de ce point de vue totalement général, non restreint à la dimension 1.

L'analyse de cette remarque de Noether nous ayant en particulier permis d'appréhender les notions de groupe des chaînes, des cycles, etc. et l'utilisation de ces notions pour calculer les nombres de Betti et de torsion, nous allons maintenant pouvoir aborder l'étude des textes cités en introduction. Nous procéderons de façon chronologique en commençant par l'étude de l'article [Vie27A] de Vietoris, première publication où figure une définition des groupes d'homologie.

3. Leopold Vietoris

Leopold Vietoris, mathématicien autrichien né en 1891, a partagé l'essentiel de sa scolarité et de sa carrière entre Vienne, Graz et Innsbruck. Son activité mathématique, d'abord concentrée sur la topologie générale, s'orienta à partir de 1925 vers la topologie combinatoire, à l'occasion d'un séjour en tant que « Rockefeller fellow » chez L. E. J. Brouwer à Amsterdam. Les résultats de ses recherches d'alors parurent via les articles [Vie26], [Vie27A] (soumis le 28 juin 1926) et firent l'objet de sa conférence du 24 septembre 1926 devant la Deutschen Mathematiker-Vereinigung intitulée *Über den höheren Zusammenhang kompakter Raüme*[29]. Ces travaux furent réalisés intégralement lors du séjour de Vietoris chez Brouwer, au carrefour des années 1925 et 1926 et l'influence de ce dernier y est très perceptible. Vietoris précise notamment dans la première note de [Vie27A] que ses recherches sont nées d'une remarque orale de Brouwer[30] et, à la lecture de l'article, on peut constater qu'il a repris les concepts et la terminologie de l'article [Bro12A] de ce dernier.

Dans [Bro12A], Brouwer prouve un résultat plus général que ne l'annonce le titre (« Invariance de la courbe fermée ») ; il établit que le nombre de domaines délimités par un ensemble plan, borné, connexe, parfait (i.e. fermé et sans point isolé) est invariant par bijection continue (donc est un invariant topologique). Considérant

[29] Cf. [Vie27B].

[30] Cf. [Vie27A] Note 1 p. 454 : « Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, daß diese Invarianz (...) auch für die von ihm (...) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt. »

un ensemble π comme ci-dessus et $(h+1)$-connexe[31] et un point P de π, il montre qu'il existe un système de h lacets dans π d'origine P (mais aucun système de moins de h lacets) tel que tout lacet dans π ayant pour origine P est homotope à la composée d'un nombre fini de lacets (et de leurs inverses) de ce système. Pour ce faire, il considère à la place des lacets des ensembles finis de points, invariants par permutation cyclique, et tels que la distance entre deux points consécutifs est inférieure à ε, qu'il nomme ε-chaînes[32] (« ε-Ketten »). L'homotopie sur les lacets est, elle, traduite par des ε-modifications (« ε-Abänderungen ») consistant à modifier légèrement les ε-chaînes par ajout, élimination ou déplacement de points.

L'article [Vie27A] est proche sur de nombreux points de [Bro12A]. Vietoris y définit les groupes de connexité et d'homologie d'une partie quelconque M d'un espace métrique sans s'en remettre à l'existence d'une décomposition de M en cellules. À cet effet, il commence par considérer des complexes combinatoires, et donne des définitions assez proches de celles d'Alexander, quoique sans faire appel à la notion de tétraèdre et, de manière plus générale, sans faire référence à des objets ou des intuitions de nature géométrique.

Ainsi, un n-simplexe est défini par Vietoris comme l'ensemble formé de $n+1$ points, ainsi que de toutes les paires, triplets, ..., n-uplets formés à partir de ces points. Cette définition est analogue à celle utilisée par Alexander dans [Ale26] si l'on considère la donnée d'une paire de points comme équivalente à celle du segment reliant ces deux points, la donnée d'un triplet de points comme équivalente à celle du triangle plein ayant ces trois points pour sommets, etc. Les idées géométriques sous-jacentes aux définitions données par Vietoris sont évidemment analogues à celles motivant les définitions que nous avons énoncées au premier paragraphe et la définition de complexe introduite par Vietoris, bien qu'exprimée en des termes différents de ceux d'Alexander, est équivalente à celle du premier paragraphe. Vietoris ajoute juste une idée, consistant à dire que les sous-simplexes[33] d'un complexe donné apparaissent avec une certaine multiplicité (qui correspond au fait qu'un même simplexe peut être face de plusieurs simplexes différents). Le bord d'un complexe C « k-dimensionnel homogène » (i.e. dont les simplexes – qui ne sont faces d'aucun autre – sont tous de dimension k) est défini comme le complexe formé à partir des simplexes $(k-1)$-dimensionnels qui sont faces d'un nombre impair de simplexes de C. Cette définition peut sembler curieuse mais résulte en fait de ce que Vietoris considère des simplexes non orientés : en effet, considérer des simplexes non orientés revient à considérer des complexes modulo 2. Vietoris écrit d'ailleurs, pour deux complexes donnés K_1, K_2, la relation $K_1 = K_2 \pmod 2$, lorsque les multiplicités de leurs sous-simplexes sont égales modulo 2. Un n-cycle est un complexe n-dimensionnel homogène sans bord.

Enfin, Vietoris introduit l'opération somme sur les complexes (la somme de deux complexes K_1, K_2 est l'ensemble des sous-simplexes de K_1 et de K_2, chacun de ces

[31] Cette terminologie n'est pas à prendre au sens actuel mais en un sens plus ancien, signifiant « délimitant un nombre $h+1$ de domaines » ; cf. [Die89], note p. 341.

[32] Cette discrétisation des lacets consiste en fait en une approximation affine, si l'on considère à la place d'un lacet la courbe obtenue comme réunion des segments reliant deux points consécutifs de la chaîne.

[33] Vietoris considère un complexe comme un ensemble fini de simplexes dont aucun n'est la face d'un autre, puis y ajoute les faces (sous-simplexes) de ces simplexes.

sous-simplexes ayant pour multiplicité la somme de ses multiplicités respectives dans K_1 et K_2) puis introduit la relation d'homologie :

$R^{(k-1)} \sim 0$ dans C si $R^{(k-1)}$ est le bord d'un simplexe k-dimensionnel $S^{(k)}$ du complexe C.

Ayant précisé la compatibilité de la somme avec la considération des complexes modulo 2, il définit le n-ième groupe de connexité (« n-te Zusammenhangsgruppe ») d'un complexe K comme étant le groupe des cycles n-dimensionnels non orientés de K modulo la relation d'homogie[34]. Est appelé k-ième nombre de connexité (« Zusammenhangszahl ») d'un complexe C le nombre maximal s de k-cycles de C entre lesquels il n'existe aucune relation d'homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_s C_s \sim 0$ (ici les cycles ne sont pas considérés modulo 2 ; le nombre de connexité est donc identique au nombre de Betti).

Vietoris reprend ensuite ces définitions dans le cas de simplexes orientés[35]. Le bord d'un complexe K n-dimensionnel homogène est défini comme le complexe $(n-1)$-dimensionnel contenant l'ensemble des $(n-1)$-faces de K $(p-q)$ fois, si celles-ci apparaissent orientées positivement dans le bord d'exactement p n-faces de K et orientées négativement dans le bord d'exactement q n-faces de K. Le n-ième groupe d'homologie (« n-te Homologiegruppe ») d'un complexe C est alors défini comme le groupe des cycles n-dimensionnels orientés de K modulo la relation d'homologie.

Dans un deuxième temps, Vietoris effectue le transfert des notions sur les complexes combinatoires aux parties d'un espace métrique (son intérêt se concentrant finalement sur les parties compactes). Il commence par définir très généralement un complexe C dans un ensemble M comme étant un complexe au sens combinatoire défini précédemment dont les sommets appartiennent à M.[36] Il introduit ensuite une notion d'homologie lorsqu'une distance est donnée sur M :

un cycle C dans M est dit ε-homologue à 0 dans M (noté $C \sim_\varepsilon 0$) s'il est homologue au sens combinatoire à une somme de bords de simplexes (dans M) de diamètre strictement inférieur à ε.

La même vision géométrique que celle présente dans [Bro12A] guide les définitions. Par exemple, l'addition du bord $R^{(k)}$ d'un simplexe $(k+1)$-dimensionnel $S^{(k+1)}$ dont les arêtes sont toutes de longueur strictement inférieure à ε (il note $R^{(k)} \sim_\varepsilon 0$) à un cycle k-dimensionnel $C^{(k)}$ est appelée « ε-Abänderung » de $C^{(k)}$. Vietoris généralise ainsi en dimension (finie) quelconque les idées liées à l'homotopie présentes dans l'article [Bro12A] de Brouwer. D'ailleurs, Vietoris définit également le groupe d'homotopie d'une partie M d'un espace métrique et ce, de façon totalement analogue au groupe d'homologie.

---

34 Cf. [Vie27A] p. 456 : « Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen « $+K_1$ » und « $+K_2$ » als dieselbe Operation. »

35 Le principe de l'orientation a été donné dans le premier paragraphe pour les chaînes élémentaires. Il s'applique de la même façon aux simplexes considérés par Vietoris car ils sont entièrement déterminés par la donnée de leurs sommets.

36 De tels complexes n'ont donc pas une grande réalité géométrique vu que seuls leurs sommets sont réellement dans M. Il n'est aucunement demandé, par exemple, que les segments reliant ces sommets soient bien inclus dans M.

Vietoris considère des *suites fondamentales*[37] F dans M ; il s'agit de suites de cycles k-dimensionnels $(C_m)_{m=1\ldots+\infty}$ dont les longueurs des arêtes tendent vers 0 avec m et tels que :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ \forall n_1, n_2 > n_\varepsilon,\ C_{n_1} \sim_\varepsilon C_{n_2}.$$

Une suite fondamentale est dite ε-homologue à 0 s'il existe n_ε tel que $C_n \sim_\varepsilon 0$ pour tout $n > n_\varepsilon$. Une suite fondamentale F est appelée *suite nulle* (« Nullfolge ») si elle est ε-homologue à 0 pour tout ε ; on écrit dans ce cas $F \sim 0$.[38]

Ayant alors précisé que les suites fondamentales formaient un groupe pour l'addition et les suites nulles un sous-groupe, il définit les n-ièmes groupes de connexité et d'homologie de M comme étant les groupes des suites fondamentales modulo la relation d'homologie sur les suites (ce qui revient à faire le quotient par le sous-groupe des suites nulles – ce que ne précise pas Vietoris). La distinction entre groupe d'homologie et groupe de connexité vient comme précédemment de ce que l'on considère les cycles orientés ou non.

Vietoris procède de façon analogue pour définir le groupe fondamental de M mais nous ne le détaillons pas ici. La suite de l'article est révélatrice de la conception qu'avait Vietoris des objets qu'il manipulait. Les groupes (de connexité, d'homologie, fondamentaux) qu'il a introduits sont étudiés en partie du point de vue de leurs propriétés topologiques : il montre qu'on peut les munir d'une distance qui en fait des espaces métriques complets et prouve que si M est compact alors le groupe de connexité de M l'est également. Toujours pour M compact, il montre que ces groupes possèdent chacun une famille génératrice (il emploie le mot « Basis ») compacte et définit la multiplicité (« Vielfachheit ») de ces groupes comme le plus petit nombre d'éléments d'une famille génératrice (qui peut être infinie dénombrable). La multiplicité des groupes de connexité et d'homologie est pour lui l'analogue des nombres de connexité et de Betti dans les complexes combinatoires. Reprenant la terminologie « Zyklosis » [39] employée par Brouwer dans [Bro12A], il fait le lien avec ses définitions (ce qui les justifie) en montrant que la multiplicité des « Zyklosis » non orientés est égale à la multiplicité du groupe de connexité de la dimension correspondante[40].

---

[37] La terminologie employée est « *Fundamentalfolge* » ; on aurait également pu traduire par *suite de Cauchy* car la condition exprimée équivaut à une condition de Cauchy selon la métrique définie par Vietoris. En outre Felix Hausdorff, à la même époque, utilise le terme « *Fundamentalfolge* » pour désigner une suite de Cauchy dans son *Grundzüge der Mengenlehre*, cf. [Hau02] p. 414.

[38] Ce sont donc les suites fondamentales qui joueront le véritable rôle de cycles de M. Géométriquement, il s'agit de suites d'ensembles de points représentant les sommets de complexes abstraits. Les conditions définissant les suites fondamentales assurent que les sommets des C_n sont espacés d'une distance de plus en plus faible à mesure que n augmente. De plus, elles forcent le nombre de sommets des C_n à tendre vers l'infini. La condition de Cauchy est là pour faire en sorte que, dans un compact, ces ensembles de points convergent vers un ensemble de points limite qui devrait dessiner un véritable cycle sur M.

Les suites nulles jouent, elles, le rôle des bords dans M. L'exigence d'être ε-homologue à 0 pour tout ε est là pour tenter d'assurer que les trous dans M seront bien détectés, et donc qu'une suite nulle délimitera bien une partie pleine – pour le dire de manière plus précise, homotopiquement triviale – de M.

[39] Il s'agit d'une terminologie très particulière, semblant provenir de [Lis47]. Elle désigne les lacets employés par Listing pour mesurer la connexité. On trouvera des détails dans [Bre99] p. 920.

[40] [Vie27A] p. 464 : « Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension. »

Tout ceci confirme l'importance des idées de Brouwer et la prépondérance des intuitions géométriques et des notions topologiques dans le travail de Vietoris. Dans [Vie27A], Vietoris n'utilise aucun outil de théorie des groupes, évite la terminologie des groupes quotients et travaille toujours sur les cycles ou les chemins et non sur leurs représentants à homologie ou équivalence près. Ainsi, si Vietoris introduit les groupes en topologie, c'est tout simplement parce qu'il ne peut faire autrement. Comme l'explique Mac Lane dans [ML86], l'intérêt de Vietoris se portant sur les espaces métriques compacts – qui peuvent avoir une infinité de trous, comme l'ensemble triadique de Cantor par exemple – leur homologie ne peut plus s'exprimer à l'aide des nombres de Betti ou de torsion[41] et demande donc l'introduction de la structure de groupe[42] afin de définir l'analogue du nombre de Betti : la multiplicité. Comme cela a déjà été évoqué précédemment, il n'était pas ignoré que certains ensembles considérés à l'époque en topologie – comme l'ensemble des cycles – pouvaient être munis d'une structure de groupe. Vietoris l'admet lui-même dans une lettre à Puppe ([Hir99] p. 62-63) : « Selbstverständlich wußten die Topologen schon vor diesen Arbeiten, daß sie es bei der Addition von Zykelklassen mit Abelschen Gruppen zu tun hatten. Weil sie aber wußten, daß diese Gruppen durch Rang- und Elementarteiler (Torsionszahlen) charakterisiert sind, hielten sie die Beschäftigung mit den Gruppen für überflussig. »[43] L'intérêt du travail de Vietoris dépasse donc la seule introduction de la notion de groupe en homologie ; la notion de groupe est dans le cadre de son étude absolument nécessaire car ses objets d'étude (les espaces métriques compacts) ne pouvaient en général être décrits avec les nombres de Betti et de torsion jusqu'alors suffisants pour l'étude des complexes. Les groupes abéliens de type fini sont incapables de coder l'information homologique pour les espaces métriques compacts généraux.

En adoptant une approche géométrique inspirée par Brouwer, Vietoris a pu étudier l'homologie d'objets plus riches que les complexes simpliciaux. Une démarche plus classique aurait été de fournir un procédé général permettant d'associer un complexe simplicial à un espace métrique compact et de définir ensuite l'homologie de cet espace comme étant l'homologie du complexe associé. Mais la voie empruntée par Vietoris lui a permis justement de contourner la difficulté de l'affectation d'un complexe simplicial pertinent à un espace métrique compact quelconque, ce qui explique qu'il ait été le premier à définir la notion de groupe d'homologie.

---

[41] On a vu dans le premier paragraphe que les nombres de torsion étaient définis à partir des matrices d'incidence, elles-mêmes attachées à un complexe. Pour définir les nombres de torsion d'un espace métrique compact, il aurait donc fallu que Vietoris trouve comment associer un complexe simplicial (qui est un ensemble fini) à un espace métrique compact tout en en conservant les propriétés topologiques – ce qui semble une entreprise vaine. Les nombres de Betti peuvent, eux, être définis sans le recours aux matrices d'incidence (cf. la définition donnée dans le premier paragraphe) mais on peut facilement obtenir des nombres de Betti infinis pour les espaces métriques compacts. En effet, si l'on considère un espace avec une infinité de trous, on obtient une famille infinie de 1-cycles indépendants en se donnant pour chaque trou de l'espace considéré un 1-cycle entourant ce trou.

[42] Cette explication de Mac Lane est d'ailleurs confirmée par Vietoris lui-même dans une lettre à Friedrich Hirzebruch, citée dans [Hir99], p. 62.

[43] « Bien sûr, les topologues savaient déjà avant ce travail qu'ils avaient affaire à des groupes abéliens via l'addition de classes de cycles. Mais comme ils savaient que ces groupes sont caractérisés par le rang et les diviseurs élémentaires (nombres de torsion), ils considéraient cet emploi des groupes superflu. »

On peut cependant légitimement se demander pourquoi le problème de la définition d'une homologie pour des objets plus complexes que les complexes simpliciaux n'a pas rencontré une réponse antérieure à celle de Vietoris. Sans entrer dans les détails, il semble que cela soit lié au problème de la définition même d'une variété[44]. En effet, dans ses premiers articles sur l'*analysis situs*, Poincaré considéra des variétés différentiables, définies par exemple à l'aide de conditions sur des paramétrisations locales. La relation d'homologie était ainsi présentée :
$V_1 + V_2 + ... + V_K \sim 0$ *si les sous-variétés de dimension* m $V_1, V_2, ..., V_K$ *de la variété* M *forment le bord d'une sous-variété de dimension* $m+1$ *de* M.

Poincaré proposa également ensuite de représenter les variétés via une décomposition en cellules (donc de les représenter par des complexes cellulaires), affirmant semble-t-il que toute variété admet une triangulation. Il put ainsi introduire les matrices d'incidence et fournir un algorithme de calcul des nombres de Betti et définir les nombres de torsion. Mais la démarche de Poincaré souleva bon nombre de problèmes auxquels peu de réponses avaient été apportées au milieu des années 1920. On peut citer principalement le problème de l'existence d'une décomposition en cellules pour une variété donnée, l'invariance des nombres de Betti et de torsion pour deux triangulations d'une même variété, l'invariance de l'homologie ainsi définie pour deux variétés homéomorphes, etc. Ces problèmes sont en fin de compte liés à celui de la définition elle-même de variété. Soit on adoptait le premier point de vue de Poincaré et tentait de montrer des théorèmes d'existence de triangulation pour de telles variétés, soit on partait du principe qu'une variété était – par définition – un complexe cellulaire, et on cherchait des conditions de nature combinatoire pour qu'une variété vérifie certaines propriétés comme la dualité de Poincaré. Étant donné la commodité des complexes cellulaires pour le calcul des nombres de Betti et de torsion et la difficulté à prouver l'existence de triangulations pour les variétés en général (l'existence de triangulations pour les variétés 2-dimensionnelles, par exemple, ne fut prouvée qu'en 1925 par T. Radó), on peut comprendre aisément que les topologues aient en général pris, jusqu'à Vietoris, les complexes simpliciaux comme base de leurs réflexions.

4. Walther Mayer

Le travail de Vietoris a une filiation directe et immédiate via celui de Walther Mayer (de Vienne) et en particulier par le biais de l'article [May29]. La première partie de [May29], soumise le 16 novembre 1927, voit Mayer préciser en introduction : « In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte. » [45] Mayer se place d'un point de vue abstrait et donne un système d'axiomes pour les complexes[46]. Pour notre propos, nous nous limiterons à l'étude de la première partie, qui concerne essentiellement les définitions et l'axiomatique.

Les complexes sont vus comme objets d'un module des complexes Σ et à chaque complexe est associé un entier – appelé dimension – compris entre 0 et un certain

44 Pour plus de détails, on pourra consulter [Sch99].
45 « J'ai été initié à la topologie par mon collègue Vietoris dont j'ai fréquenté le cours 1926/27 à notre université. »
46 Mayer renforce d'ailleurs ce point de vue abstrait en précisant que les complexes sont des objets qu'il ne faut pas forcément considérer comme représentant des entités géométriques.

entier n qui est la dimension du module Σ. La notion de simplexe disparaît ainsi, de même que la notion de face, et en particulier celle de sommet, qui était jusque-là nécessaire pour déterminer la dimension d'un simplexe. Les axiomes introduits par Mayer sont les suivants :

(1) il existe une opération entre les complexes de Σ qui fait de l'ensemble des complexes $\{K^{(\rho)}\}$ d'une dimension donnée ρ un groupe abélien ;
(2) il n'y a aucun élément d'ordre fini dans $\{K^{(\rho)}\}$;
(3) pour tout ρ il existe une famille finie de complexes ρ-dimensionnels $a_1^{(\rho)}$, ..., $a_\tau^{(\rho)}$ telle que tout complexe ρ-dimensionnel de $\{K^{(\rho)}\}$ est inclus dans $\left\{\sum_{i=1}^{\tau} p_i a_i^{(\rho)}, p_i \in \mathbb{Z}\right\}$;
(4) il existe une opération R, dite "bord", qui à tout complexe ρ-dimensionnel $K^{(\rho)}$ de Σ $(1 \leqslant \rho \leqslant n)$ associe un complexe $(\rho - 1)$-dimensionnel de Σ noté $R(K^{(\rho)})$;
(5) R est $\mathbb{Z}$-linéaire ;
(6) $R \circ R = 0$.

Mayer en arrive ensuite très rapidement à définir les groupes d'homologie (juste après l'introduction des cycles, des nombres de torsion et des cycles homologues à 0). Il y a une avancée notable : alors que chez Vietoris le concept de groupe d'homologie pouvait apparaître forcé par les circonstances, il est ici pleinement assumé. Rien en effet dans ses axiomes n'obligeait Mayer à l'introduire et ce d'autant plus que, d'après l'axiome 3, les groupes de complexes sont de génération finie – donc entièrement caractérisés par les nombres de Betti et de torsion – au contraire de ceux utilisés par Vietoris pour les espaces métriques compacts.

Pourtant l'importance des outils de la théorie des groupes ne semble toujours pas décelée chez Mayer. On pourrait croire le contraire vu que, à la différence de Vietoris, il commence par définir le ρ-ième groupe d'homologie comme le groupe obtenu comme quotient du groupe des cycles ρ-dimensionnels par le sous-groupe des cycles ρ-dimensionnels homologues à 0 ; mais il ressent le besoin de montrer par la suite que les classes de cycles modulo la relation d'homologie se comportent bien comme un groupe additif[47], comme si la définition par passage au quotient n'était pas totalement satisfaisante. En outre, la vision matricielle guide la plupart des calculs. Mayer raisonne continuellement à l'aide des matrices d'incidence et, avant toute considération, se donne une base des complexes (les facteurs invariants sont, de ce fait, toujours mis en évidence via des changements de base), s'obligeant dans la plupart des cas à montrer que les résultats qu'il obtient sont indépendants de la base considérée. On peut rétrospectivement d'autant plus s'étonner que Mayer ne se soit pas affranchi des matrices que l'article [Vie27A] de Vietoris semblait aller dans ce sens, cf. p. 456, Vietoris parlant des nombres de connexité : « Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst. »[48] Il y a d'ailleurs à ce sujet une opposition très nette entre l'article de Vietoris et celui de Mayer : Vietoris n'a aucun usage de l'algèbre linéaire dans [Vie27A] alors qu'elle est omniprésente chez Mayer.

---

[47] Cf. [May29] pp. 7-8 : il vérifie que l'addition entre classes est bien définie, qu'elle est commutative, que la classe des cycles d'homologie nulle est le neutre pour cette addition, etc.
[48] « Nous avons justement détaché la définition elle-même de la description par des matrices. »

5. Heinz Hopf

5.1. Une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré

Le dernier article que nous étudierons est l'article [Hop28B] de Heinz Hopf. Il est important de noter que Hopf est venu pour la première fois à Göttingen en 1926, y rencontrant Paul Alexandroff – avec qui il écrivit plus tard un célèbre manuel de topologie [AH35] – et bien sûr Emmy Noether, puis y est retourné à plusieurs reprises entre 1926 et 1928. Dans cet article [Hop28B] de 1928, Hopf reprend, d'une manière différente, la preuve[49] d'une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré[50]. Entrons plus avant dans le détail de cet article : celui-ci se divise en trois paragraphes.

Le premier paragraphe énumère des propriétés classiques de théorie des groupes, en particulier des groupes abéliens de génération finie. Hopf s'intéresse notamment aux groupes quotients et à la trace (« Spur ») d'un endomorphisme d'un groupe abélien libre de rang fini et établit la relation

$$SG = SH + S\frac{G}{H},$$

où G est un groupe abélien libre de rang fini n, H un sous-groupe de G stable par un endomorphisme f de G et tel que le quotient $\frac{G}{H}$ soit lui aussi libre (il prouve qu'un tel quotient est obligatoirement abélien et de génération finie), SG désignant la trace de f en tant qu'endomorphisme de G, SH la trace de f en tant qu'endomorphisme de H et $S\frac{G}{H}$ la trace de l'endomorphisme induit par f sur $\frac{G}{H}$.

Le deuxième paragraphe traite notamment des définitions liées aux complexes. Considérant un complexe[51] C^n de dimension n , il désigne par T^i_j, $j = 1,...,a^i$, ses simplexes orientés (l'orientation étant définie selon l'ordre des sommets de T^i_j) et nomme « complexe i-dimensionnel dans C^n » toute combinaison linéaire à coefficients entiers des simplexes T^i_j.[52] Ainsi Hopf emploie le mot « complexe » pour deux choses différentes, le complexe C^n étant un complexe au sens d'Alexander et les complexes i-dimensionnels dans C^n étant les i-chaînes au sens d'Alexander dans [Ale26]. Il introduit l'application de bord ρ par sa valeur sur les simplexes et en la prolongeant par linéarité, puis la notion de cycle (complexe annulant le bord). Il définit enfin un « diviseur de bord » (« Randteiler ») comme un complexe dont un multiple est un bord et introduit les groupes commutatifs $\mathfrak{L}^i \supset \mathfrak{Z}^i \supset \overline{\mathfrak{R}^i} \supset \mathfrak{R}^i$, respectivement groupe des complexes, groupe des cycles, groupe des diviseurs de bord et groupe des bords i-dimensionnels (les trois derniers ensembles sont bien des groupes pour l'addition d'après les propriétés de ρ). Il en arrive ainsi à définir

---

49 Sa preuve originelle fait l'objet d'un article précédent [Hop28A].

50 La formule d'Euler-Poincaré est une généralisation de la célèbre formule d'Euler pour les polyèdres (S-A+F=2). Elle est notamment donnée par Alexander dans [Ale26], p. 316. Selon les notations du premier paragraphe, cette formule est : $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i P^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha^i$. Elle est au cœur du débat dans [Lak84].

51 La définition d'un « complexe » n'est pas rappelée mais il faut certainement entendre ici « complexe » au sens d'Alexander dans [Ale26] car Hopf y fait référence dans l'article [Hop28A].

52 « Für jedes i nennen wir die Linearformen in den T^i_j mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten "die in C^n liegenden i-dimensionalen Komplexe." »

le i-ième groupe de Betti $\mathfrak{B}^i$ comme étant le quotient $\dfrac{\mathfrak{Z}^i}{\overline{\mathfrak{R}^i}}$, prouve qu'il s'agit d'un groupe (abélien) libre, et appelle i-ième nombre de Betti (noté p^i) le rang de $\mathfrak{B}^i$. Il montre enfin que ρ induit un isomorphisme entre $\dfrac{\mathfrak{L}^i}{\mathfrak{Z}^i}$ et $\mathfrak{R}^{i-1}$.

Dans le troisième paragraphe il ne reste plus à Hopf, avant de débuter la preuve, qu'à introduire la notion d'application simpliciale entre deux complexes n-dimensionnels C^n et K^n. Il s'agit d'une application de l'ensemble des sommets de C^n dans l'ensemble des sommets de K^n, telle que les images des sommets d'un simplexe de C^n soient les sommets d'un simplexe de K^n. Il montre que toute application simpliciale commute avec ρ puis en déduit que toute application simpliciale induit un homomorphisme entre chacun des groupes $\mathfrak{L}^i$, $\mathfrak{Z}^i$, $\overline{\mathfrak{R}^i}$, $\mathfrak{R}^i$ des complexes respectifs et, en utilisant les résultats des paragraphes précédents, établit la relation

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{B}^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{L}^i$$

comme généralisation de la formule d'Euler-Poincaré (S désignant la trace comme endomorphisme d'une application simpliciale f de C^n dans K^n, où C^n est une subdivision simpliciale de K^n). Il obtient cette dernière dans le cas particulier où f est l'identité de C^n dans lui-même.

5.2. La part de Noether dans le travail de Hopf

Cette brève étude terminée se posent deux questions :

– en quoi l'influence d'Emmy Noether est-elle notable dans cet article de Hopf ?
– en quoi l'article de Hopf est-il original du point de vue de la naissance des groupes d'homologie (et notamment en quoi se distingue-t-il des articles de Vietoris et de Mayer) ?

Nous répondrons à la deuxième question plus tard mais nous pouvons d'ores et déjà répondre à la première question. Citons Hopf lui-même, dans son introduction : « Meinen ursprünglichen Beweis dieser Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluß von Fräulein E. Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten.»[53] L'idée d'introduire des concepts de théorie des groupes lui a donc été fournie par Emmy Noether. Cela se traduit dans son article par un premier paragraphe totalement dédié à des propriétés de théorie des groupes et définissant les outils lui permettant de simplifier sa première preuve. L'efficacité de cette démarche est telle qu'il n'y a en fin de compte qu'un seul résultat intermédiaire non trivial qui ne provienne pas de propriétés sur les groupes (il s'agit du fait qu'une application simpliciale

[53] « J'ai pu, lors d'un de mes cours de l'été 1928 à Göttingen, réécrire de manière bien plus limpide et plus simple ma preuve originelle de cette généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant, sous l'influence d'Emmy Noether, des notions de théorie des groupes. »

commute avec le bord[54]). Il est d'ailleurs intéressant de noter que Hopf n'a pas introduit la notion de groupe d'homologie dans cet article mais celle de groupe de Betti, le groupe de Betti représentant la partie sans torsion du groupe d'homologie (en quotientant par le groupe des diviseurs de bord, non par le groupe des bords, la torsion est supprimée). Les groupes de Betti suffisent au but de l'article de Hopf et, qui plus est, lui permettent de rester dans le cadre simple des groupes abéliens libres de génération finie. Le caractère novateur de cet article de Hopf vient donc moins de la présence des groupes d'homologie que de l'utilisation systématique de la théorie des groupes et, en conséquence, de l'abandon des matrices d'incidence.

D'autres témoignages nous permettent d'étayer les propos de Hopf en confirmant l'importance de Noether dans la genèse de l'article de 1928. Tout d'abord Hopf lui-même, bien des années plus tard, précise dans [Hop66] (p. 12) ce qu'Emmy Noether lui a appris, et l'on peut se rendre compte que l'on retrouve les concepts formulés par Noether presque mot pour mot dans l'article [Hop28B] de Hopf[55], à la différence près que dans cet article Hopf considère les groupes de Betti, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des diviseurs de bord, et non les groupes d'homologie, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des bords. Paul Alexandroff, topologue russe, ami de Hopf et de Noether et visiteur régulier de Göttingen de 1923 à 1929, explique quant à lui, dans son éloge d'Emmy Noether [Alex83], que Noether a assisté à ses cours et à ceux de Hopf des étés 1926 et 1927, et insiste sur le fait qu'elle a *immédiatement* remarqué tout le bénéfice qu'il y aurait à introduire les groupes (de complexes, de cycles etc.) en topologie et proposé de définir les groupes de Betti ; Alexandroff ajoute qu'Hopf et lui se rallièrent sans délai à ses propositions et que l'article [Hop28B] de Hopf est repose entièrement sur les remarques de Noether[56]. Alexandroff va donc peut-être encore plus loin que Hopf en attribuant absolument toutes les nouveautés conceptuelles de [Hop28B] à Emmy Noether et ce, du fait de remarques datant de 1926 ou 1927. Cette affirmation semble cohérente avec les propos de l'abstract de la conférence de Noether évoquée dans le deuxième paragraphe et les souvenirs d'Alexandroff du

---

[54] Ce point est important. Comme on l'a déjà mentionné plus tôt, il permet d'en déduire qu'une application simpliciale induit un homomorphisme entre les groupes des complexes, des cycles, des diviseurs de bord et des bords. Sont également induits des homomorphismes entre groupes de Betti et d'homologie. Donc, étant donné deux complexes n-dimensionnels et une application simpliciale entre eux, on sait définir les groupes d'homologie/Betti de dimension 0 à n de ces deux complexes et des homomorphismes entre leurs groupes d'homologie/Betti respectifs, induits par l'application simpliciale. Ainsi est mis en évidence l'aspect plus tard appelé « fonctoriel » de l'homologie, si important dans le développement futur de la topologie et d'autres domaines des mathématiques. Nous renvoyons au chapitre 6 de [McL06] pour un développement de l'essor des foncteurs en lien avec Noether et la topologie.

[55] « Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet : das Bild ∂X^{r+1} ist in dem Kern Z^r der Abbildung $\partial : X^r \to X^{r-1}$ enthalten ; die Faktorgruppe $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe ».

[56] Cf. [Alex83] p. 9 : « In the summers 1926 and 1927 she went to the courses on topology which Hopf and I gave at Göttingen. (...) she immediately observed that it would be worthwile to study directly the groups of algebraic complexes and cycles (...), she suggested immediately defining the Betti group (...) she noticed how simple and transparent the proof of Euler-Poincaré formula becomes if one makes systematic use of the concept of a Betti group. »

repas à Blaricum[57] au cours duquel Emmy Noether aurait donné la définition des groupes de Betti de complexes.

L'abstract d'Emmy Noether, étudié dans le deuxième paragraphe, laisse imaginer assez aisément qu'elle avait déjà en sa possession l'idée de la définition des groupes de Betti au début de l'année 1925. L'article [Hop28B] de Hopf met en œuvre les idées en germe dans le résumé de Noether : laisser de côté les modules sur les anneaux principaux et placer à la base de la théorie des complexes la notion de groupe. On a déjà dit qu'Emmy Noether n'avait jamais écrit d'article de topologie et que ses seuls propos sur le sujet inscrits dans la littérature mathématique semblent être ceux de l'abstract. Néanmoins on peut se rendre compte que la topologie n'était pas totalement absente des pensées d'Emmy Noether, ce qui explique qu'elle ait pu en parler en conférence et proposer une avancée conceptuelle notable dans un domaine qui n'était pas le sien. L'origine des réflexions de Noether en lien avec la topologie semble provenir des visites régulières d'Alexandroff à Göttingen à partir de mai 1923, qui furent accompagnées de nombreuses discussions avec Noether. Celle-ci sembla montrer un réel intérêt aux investigations d'Alexandroff[58].

On peut penser que, dès lors, Emmy Noether a répété ses remarques à plusieurs reprises, le temps que certains topologues se persuadent de leur intérêt. Peu d'occasions se sont présentées à elle vu que la topologie n'était pas un sujet d'étude de Göttingen. Il y eut d'abord le séjour chez Brouwer lors des vacances de Noël 1925, avec une présence importante de topologues (Alexandroff, Brouwer, Menger, Vietoris... cf. [Alex79] p. 323), puis les visites de Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926 et les cours donnés dès lors par Alexandroff et Hopf furent pour Noether l'occasion d'appliquer ses idées en situation. On comprend mieux ainsi que Noether ait pu faire des remarques *immédiatement* – comme le fait remarquer de façon insistante Alexandroff dans [Alex83] – à l'occasion de leurs cours vu qu'elle ne faisait que leur expliquer des concepts qu'elle avait déjà formulés depuis plus d'un an. Alexandroff les avait manifestement déjà entendues mais probablement sans en sentir alors toute la portée ou sans vouloir se consacrer aux perspectives ouvertes par Noether, tandis que pour Hopf il s'agissait d'une totale découverte.

6. Vietoris, synthèse de diverses influences ?

On a pu relever de fortes distinctions lors de l'étude, au cours des paragraphes 3, 4 et 5, des articles de Vietoris, Mayer et Hopf. Ainsi l'article [Vie27A] de Vietoris, première occurrence dans la littérature mathématique de la notion de groupe d'homologie, a pour idée directrice la généralisation en dimension finie quelconque des concepts de Brouwer dans [Bro12A] sur l'homotopie. De ce fait l'intuition géométrique mène les réflexions et les matrices d'incidence sont abandonnées car ne pouvant décrire les objets considérés par Vietoris. Les nombres de Betti et de torsion n'ayant en général pas d'existence pour les objets considérés par Vietoris,

[57] Cet épisode a déjà été évoqué en introduction, note 6.

[58] Cf. [Alex79] p. 299 : « We [Alexandroff et Urysohn] constantly met Emmy Noether on a relaxed basis and very often talked to her, about topics both in ideal theory, and in our work, which had caught her interest at once. » et p. 316 : « We were constantly meeting Emmy Noether on her famous walks, which were first called algebraic and after our arrival came to be called topological algebraic. »

il leur faut un substitut, et la notion de groupe d'homologie s'impose alors naturellement. Il n'y a cependant aucune utilisation d'outils de théorie des groupes, et même une présence très faible d'une terminologie propre aux groupes, l'usage de la notion de quotient, par exemple, étant inexistant.

L'influence de Brouwer sur l'article [Vie27A] de Vietoris étant prépondérante, on peut mentionner quelques aspects du travail de Brouwer afin d'expliquer la démarche de Vietoris et ce qui la distingue de celle de Noether et de Hopf.

6.1. L. E. J. Brouwer

Il est difficile d'évaluer ce que Brouwer connaissait et pensait des travaux d'Emmy Noether. On sait cependant qu'il l'a rencontrée en 1912 et l'a très probablement revue plusieurs fois par la suite car il se rendait régulièrement à Göttingen[59]. En outre, l'invitation à séjourner chez lui lors de l'hiver 1925 lancée à Noether indique qu'ils étaient certainement en bons termes.

Étant donné les propos de Noether (cf. note 6) lors du repas chez Brouwer, il peut paraître assez surprenant que les méthodes développées par Vietoris et celles encouragées par Noether soient si éloignées l'une de l'autre. On peut l'expliquer notamment par la fidélité de Brouwer à ses propres conceptions : l'esprit de l'intuitionnisme et celui de l'algèbre moderne sont pour le moins inconciliables. En outre, le travail de Brouwer au début des années 1910 montre bien que l'idée de l'introduction de concepts algébriques lui était alors étrangère[60] et si l'on part du principe que l'activité de Brouwer fut assez éloignée de la topologie à partir de 1913 et que l'algèbre n'a jamais été un de ses domaines de recherche, on peut aisément comprendre son manque de sensibilité aux innovations de Noether.

L. E. J. Brouwer écrivit entre 1910 et 1913 une série d'articles qui firent date autant par les résultats qu'ils contiennent que par la nouveauté des méthodes mises en œuvre – qui purent être réemployées efficacement par la suite par d'autres topologues. Il fut notamment le premier à considérer ce qu'on appelle maintenant des applications homotopes[61], d'ailleurs présentes dans l'article [Bro12A] mentionné plus haut. Dans ses travaux, l'importance de l'intuition géométrique et même de l'approche géométrique est absolument manifeste, et confirmée par ses propres paroles : « It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized. » [62]

Cet attachement à un traitement géométrique des problèmes mathématiques ainsi qu'une méconnaissance ou un désintéressement volontaire ont fait que Brouwer ne s'est pas consacré à l'homologie alors même que les outils qu'il avait introduits ont ensuite permis un traitement satisfaisant de questions soulevées par

[59] Cf. [FH76] p. XIII : « In the summer of 1909 he seems to have met Hilbert, and from 1911 onwards he made regular visits to Göttingen. »

[60] L'article [Bro12A] mentionné dans le troisième paragraphe, notamment, se prêtait parfaitement à l'introduction du langage des groupes, chaque lacet ainsi que tous ceux qui lui sont homotopes représentant un seul et même élément du groupe fondamental, mais il en est pourtant totalement absent.

[61] Cf. [Bro12B].

[62] Cf. [Bro75] p. 120.

Poincaré[63]. En fait, Brouwer s'est peu à peu détourné de la topologie à compter de 1913 du fait tout d'abord de la première guerre mondiale puis surtout de son intérêt grandissant pour les questions de fondation des mathématiques et le développement de l'intuitionnisme. Ce n'est finalement qu'en 1923 que Brouwer retrouva – mais seulement pour un temps et surtout indirectement, en dirigeant les travaux de Menger, Alexandroff et Vietoris – un attrait supérieur à la topologie, relancé, semble-t-il, par les résultats d'un jeune topologue russe prometteur – mais décédé peu après – Pavel Urysohn.

6.2. Le rôle d'Alexandroff

L'influence de Brouwer ne s'est pas limitée à celle que nous avons mis en évidence au sujet de Vietoris. Alexandroff avait également rejoint Brouwer à Blaricum en mai 1925, soit peu de temps avant l'arrivée de Vietoris. Si Alexandroff s'est rendu à Blaricum, c'est qu'il était lui-même en train de mener une réflexion visant à adapter les propriétés et concepts essentiels de la topologie combinatoire à des variétés générales. Pour ce faire, il avait commencé par poser les fondations d'une topologie des variétés à l'aide de la théorie des ensembles[64]. Son idée consistait à approcher des éléments n-dimensionnels par des ensembles finis de « tétraèdres » n-dimensionnels, les tétraèdres en question consistant en fait simplement en la donnée de $n+1$ points jouant le rôle de leurs sommets.

Le procédé d'approximation utilisé par Alexandroff est clairement inspiré de celui de Brouwer, de même que celui qu'a utilisé Vietoris pour définir des simplexes dans un espace quelconque. Ce n'est en fait pas une coïncidence ; Vietoris reconnaît dans [Vie26] l'apport fructueux de conversations avec Alexandroff, donc l'influence de celui-ci, pour son approche des espaces métriques.

McLarty, dans [McL06], soulève ce problème des échanges entre Alexandroff et Vietoris pour ce qui est de l'indépendance de Vietoris vis-à-vis des idées de Noether au sujet de la création des groupes d'homologie. Le point clé est que l'on peut, comme McLarty l'explique dans [McL06], avancer qu'une motivation au passage des invariants numériques aux groupes d'homologie est la volonté de formuler des résultats non seulement pour les espaces, mais aussi pour les application continues entre les espaces[65]. L'article de 1928 de Hopf illustre d'ailleurs très bien cette idée. Or, celle-ci s'apparente clairement au projet d'Emmy Noether d'édifier l'algèbre sur la base de la théorie des ensembles, en oubliant la nature des objets et les opérations algébriques qui les composent, pour décrire les structures situées au-dessus des objets à l'aide de certains sous-ensembles et de certaines applications

[63] Selon Dirk van Dalen, dans [Dal99] p. 956 : « Brouwer stubbornly stuck to his geometrical approach, either unaware of the potential of homology as initiated by Poincaré, or just preferring the geometric attack. » Voir aussi le jugement de Dieudonné, cf. [Die89] p. 161 : « nobody understands why Brouwer never mentionned these papers [of Poincaré], nor tried to apply his fundamental discovery of simplicial approximation to bring to life the theorems guessed by Poincaré (as Alexander did a little later). »

[64] Cf. son article [Alex25] achevé peu avant sa venue à Blaricum.

[65] Bill Lawvere semble même affirmer que cette motivation est la principale raison de l'adoption des groupes d'homologie au détriment des invariants numériques. Ralf Krömer argumente en détail en faveur de ce point de vue dans [Kro07] (en 2.1.2).

(des morphismes pour ladite structure)[66]. Comme l'influence d'Emmy Noether sur Alexandroff est indéniable, qu'Alexandroff chercha à utiliser ses nouvelles bases de la topologie pour établir des théorèmes sur les applications continues entre espaces topologiques[67], et que l'on trouve le même genre de théorèmes dans l'article [Vie27A] de Vietoris, on peut être tenté de conclure à l'influence de Noether – ou en tout cas de son approche de la topologie, via Alexandroff – sur Vietoris.

Ces divers jeux d'influence rendent la situation bien complexe. Néanmoins, il ne nous semble pas que l'on puisse remettre en cause l'indépendance de Vietoris du fait des arguments précédents. Même si les motivations algébriques, et à la rigueur topologiques, de Noether sont claires, la façon dont ses contemporains ont pu se les approprier, surtout en un temps si court, l'est beaucoup moins. Si Alexandroff avait une idée précise des objectifs algébriques de Noether et s'est efforcé de les transposer à la topologie, ce n'est probablement pas le cas de Vietoris. Alexandroff a fait la synthèse de l'influence de Brouwer et de celle de Noether alors que Vietoris a été bien plus profondément influencé par Brouwer.

Lorsqu'on souligne la volonté de Noether de se concentrer sur les structures et les morphismes entre structures, donc sur des propriétés de type fonctoriel, c'est évidemment parce qu'on y décèle dans le prolongement de celle-ci la naissance de la théorie des catégories. Cette remarque est donc extrêmement intéressante mais il apparaît difficile de retrouver dans le travail de Vietoris des traces de cette volonté de Noether. Le résultat le plus ancien retenu par Ralf Krömer concrétisant la volonté d'étudier des applications en lien avec l'homologie est la généralisation de la formule d'Euler-Poincaré par Hopf (que nous avons nous-mêmes retenue comme premier emploi efficace des préceptes de Noether). Comme nous l'avons vu, celle-ci s'est faite dans le cadre des complexes simpliciaux classiques et n'a donc absolument pas nécessité les considérations topologiques d'Alexandroff et de Vietoris. Le travail de Vietoris nous semble réellement ne pas avoir besoin des idées de Noether, de même que les idées de Noether n'ont pas besoin de son travail pour être légitimées. Alexandroff a pu aider Vietoris à la création de l'homologie pour des espaces compacts mais, concrètement, les idées d'approximation remontant aux premiers travaux de Brouwer nous semblent de loin les plus importantes dans le travail de Vietoris, et l'on imagine de toute façon mal qu'Alexandroff ait pu avoir plus d'influence que Brouwer sur Vietoris.

7. Conclusion

L'article [May29] de Mayer se trouve lui aussi assez éloigné des idées de Noether et de la concrétisation qu'en a donnée Hopf. Son principal intérêt est de fournir la première axiomatisation des groupes d'homologie, affirmant ainsi l'importance de ce concept. Mais, par certains traits, cet article est un retour en arrière par rapport aux avancées de Vietoris. Les groupes d'homologie définis par Mayer sont moins généraux que ceux considérés par Vietoris car il considère uniquement des complexes de type fini. Alors que l'outil matriciel avait été, certes probablement par obligation, abandonné par Vietoris, il est chez Mayer essentiel. Enfin, l'utilisation de méthodes de théorie des groupes est à peu près totalement absente.

[66] Pour les groupes par exemple, les sous-ensembles sont les sous-groupes normaux et les morphismes les morphismes de groupes. On trouvera plus de détails dans l'article [McL06] de McLarty.
[67] Comme dans [Alex26].

Les motivations de Vietoris sont bien différentes de celles de Hopf et Noether. Noether procède à une réévaluation de l'ordonnancement des notions et considère que la théorie des groupes doit être placée à la base de la théorie des complexes et doit ainsi fournir les outils permettant de remplacer dans les calculs les matrices d'incidence peu commodes. Il est plutôt normal que Noether ait proposé une telle approche conceptuelle sans l'étayer par un exemple d'application concret. D'une part parce qu'elle n'était pas spécialiste de topologie ; d'autre part car sa proposition d'un intérêt des groupes en homologie n'est qu'une expression d'un principe général la guidant, consistant à poser des fondations autant que possible générales et abstraites (c'est-à-dire notamment en ayant abstrait les seules propriétés pertinentes requises pour la définition des objets d'étude). Dans le cas de la topologie, il lui semble que les groupes doivent être les objets de base des considérations, et non plus les modules, les formes linéaires ou les nombres de Betti et de torsion. À titre d'exemple similaire, elle fit la connexion quelques années plus tard entre la théorie des représentations et des algèbres associatives via l'étude d'anneaux non commutatifs (cf. [Noe29]). L'article [Hop28B] de Hopf concrétise les idées de Noether : il isole les définitions et propriétés propres à la théorie des groupes qui lui seront utiles et définit les complexes de façon à pouvoir utiliser facilement les concepts ainsi introduits. Il démontre ainsi l'intérêt pratique de l'introduction de la théorie des groupes en topologie, alors qu'elle pouvait jusqu'alors être seulement considérée comme un choix esthétique ou philosophique.

Cependant la première démonstration de la pertinence des groupes en topologie n'est pas le fait de Hopf, mais de Vietoris. Les mérites de Hopf et de Vietoris sont d'ailleurs bien distincts, et complémentaires. Avec l'article de 1928, Hopf obtient la simplification d'une preuve via l'utilisation de la théorie des groupes abéliens libres et laisse entrevoir une approche facilitée de l'homologie grâce aux outils de la théorie des groupes. Mais il reste dans le cadre très classique des complexes combinatoires et ne démontre aucun résultat nouveau[68]. Vietoris, par contre, sort du cadre combinatoire et décide d'étudier l'homologie d'espaces jusque-là hors de portée, ce qui l'amène à définir la notion de groupe d'homologie. Les groupes d'homologie s'imposent dans son étude de manière nécessaire et permettent à la topologie d'étendre son domaine d'investigations. Cela dit, alors même que les groupes apparaissent naturellement dans le travail de Vietoris, ceux-ci ne sont pas assumés autant qu'ils l'auraient été par Hopf ou Noether. En effet contrairement à Hopf, Vietoris ne se munit pas d'une assise théorique via des rappels de théorie des groupes et, comme nous l'avons déjà dit, la notion de quotient semble être traitée avec une certaine défiance.

Si nous en revenons pour finir au problème plus large évoqué en introduction de l'algébrisation de la topologie, les réalisations de Hopf et de Vietoris ont toutes deux une grande importance et sont complémentaires. En effet, si l'on suit Klaus Volkert [Vol02] pour qui les raisons de l'algébrisation de la topologie sont d'une part la simplification et la clarification de la théorie et d'autre part la généralisation

[68] Il avait déjà, dans [Hop28A], présenté sa généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant des méthodes combinatoires classiques, sans l'usage des groupes d'homologie. La nouveauté de cette généralisation vient de ce qu'elle exprime une propriété portant sur une application continue entre complexes. L'article [Hop28B] reformule cette généralisation et la prouve plus simplement, à l'aide des groupes de Betti.

au cas de génération non finie[69], il apparaît clairement que les idées de Noether et les travaux de Hopf sont à la source de la première raison tandis que Vietoris est à l'origine de la seconde.

Fait remarquable, les travaux que nous avons étudiés de Vietoris et de Mayer se sont fait connaître d'Alexandroff et de Hopf par le système de « review » pour les revues ! Ainsi possédons-nous des traces de l'appréciation des travaux de Vietoris et de Mayer par Alexandroff et Hopf. L'article [Vie27A] de Vietoris et l'article [May29] de Mayer ont été relus respectivement par Alexandroff et Hopf pour le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (de 1927 et 1929 respectivement). Hopf semble trouver un véritable intérêt au travail de Mayer. Il note que les complexes y sont considérés de façon abstraite et que les ensembles de complexes, de cycles, de classes d'homologie, y sont traités comme des groupes abéliens, mais il ne souligne cependant pas l'introduction des groupes d'homologie. Hopf considère donc la présence de la théorie des groupes dans l'article de Mayer comme un fait important, bien plus que la seule définition des groupes d'homologie, alors même que l'attachement de Mayer à la vision matricielle limite grandement l'utilisation qu'il aurait pu faire des outils de la théorie des groupes. L'introduction des groupes d'homologie dans l'article de Mayer semble d'ailleurs l'avoir tellement peu marqué qu'il écrira en 1964 dans [Hop66], p. 12 : « ich weiss nicht einmal, ob der Begriff der « Homologiegruppe » schon irgendwo schwarz auf weiss in der Literatur vorgekommen war. Ich selbst habe sie zum ersten Mal in meiner Note « Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel » (...) benutzt. » [70], ce qu'il nuancera en note de [Hop28B] dans ses Selecta : « Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von EMMY NOETHER stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt » [71]. Le commentaire d'Alexandroff au sujet de l'article de Vietoris est encore plus surprenant : il se contente de mentionner la généralisation des notions de l'article [Bro12A] de Brouwer et le résultat principal de l'article sans même relever l'introduction des groupes d'homologie. Ainsi semble-t-il bien que pour Alexandroff et Hopf la véritable avancée conceptuelle est la refonte de la topologie reposant sur la théorie des groupes, mais la définition de la notion de groupe d'homologie et l'appréhension par Vietoris d'objets comme les espaces métriques compacts, qui dépassent le cadre alors habituel des complexes, sont vraisemblablement à leurs yeux d'une importance qu'on peut juger rétrospectivement comme injustement faible.

[69] Comme illustration de la pertinence de ce second critère, on pourra remarquer qu'en 1930 van der Waerden publie une sorte d'état des lieux de la topologie (cf. [Wae30]) intitulé *Kombinatorische Topologie*, dont l'objet d'étude est selon lui les complexes formés à partir d'un nombre fini de simplexes, et qui intègre les travaux de Hopf et la notion de groupe d'homologie.

[70] « je ne sais pas si la notion de « groupe d'homologie » était déjà apparue noir sur blanc dans la littérature. Je l'ai moi-même employée pour la première fois dans ma note « Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel » ».

[71] « Il semble bien que la note ci-dessus soit la première publication dans laquelle le point de vue de l'homologie à l'aide de la théorie des groupes, dû à EMMY NOETHER et aujourd'hui familier, a été mis en valeur », cf. [Hop64] p. 183. Par cette phrase, Hopf ne se prononce plus comme c'était le cas dans la citation précédente sur la première apparition de la notion de groupe d'homologie mais souligne le fait que son article [Hop28B] est le premier à privilégier et à utiliser efficacement les concepts de théorie des groupes en topologie, ce qu'on ne peut contester.

Le phénomène historique précis étudié dans ces pages témoigne d'un phénomène plus général, à savoir celui de l'essor et de l'acceptation de l'algèbre moderne, ce mouvement si influent dans l'évolution de l'algèbre au vingtième siècle. L'apport indéniable de l'algèbre moderne à la recherche actuelle ne doit pas faire oublier que l'adoption par les mathématiciens de son esprit ne fut pas automatique. Ainsi Hermann Weyl par exemple, en 1931, exprimait-il son scepticisme au sujet des méthodes abstraites[72], et ce n'est qu'un exemple parmi tant d'autres.

L'algébrisation de la topologie, due pour une part conséquente à des personnes et des idées liées à l'algèbre moderne, s'est heurtée un temps au sentiment qu'elle était superflue[73]. Les résistances encore rencontrées au début des années 1930 à l'usage de la théorie des groupes en topologie, et ce parmi d'illustres mathématiciens, donnent à penser que l'article de Hopf, malgré ses mérites et la démonstration que la théorie des groupes est un cadre parfaitement adapté à la topologie combinatoire, a offert un gain pratique trop limité pour mener seul à l'algébrisation de la topologie. Et ceci met, par contraste, encore une fois en valeur l'apport de Vietoris dont l'article a offert un cadre d'investigations plus large à la topologie, à l'aide de la notion de groupe d'homologie, bien que sans mettre en œuvre les idées de l'algèbre moderne.

Notre conclusion se trouve confortée par Alexandroff lui-même... Celui-ci, dans son intervention[74] célébrant le centenaire de la naissance de Henri Poincaré lors du Congrès International des Mathématiciens de 1954, indiqua les réalisations pratiques dues à l'algébrisation de la topologie qui, selon lui, firent finalement disparaître le genre de doutes exprimés par Weyl et Lefschetz au début des années 1930.[75] Il s'agit pour lui de l'édification de la théorie de la dualité, du transfert des concepts homologiques à des espaces autres que les polyèdres et de l'introduction de la cohomologie. Si l'apport de Vietoris à la deuxième réalisation évoquée par Alexandroff est le plus évident et a été souligné dans les lignes précédentes, n'occultons pas non plus le fait que dans un des travaux cruciaux de Pontrjagin [Pon34] sur la dualité, celui-ci utilisa l'homologie élaborée par Vietoris !

8. Références

[Ale26] J. W. Alexander, *Combinatorial analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 301-329.

[Alex25] P. S. Alexandroff, *Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie*, Mathematische Annalen **94** (1925), 296-308.

[Alex26] P. S. Alexandroff, *Über stetige Abbildungen kompakter Räume*, Mathematische Annalen **96** (1926), 555-571.

[Alex72] P. S. Alexandroff, *Poincaré and Topology*, Math. Surveys **27** (1972), 157-168.

---

72 cité par Alexandroff dans [Alex83], p. 4 : « I should not pass over in silence the fact that today the feeling among mathematicians is beginning to spread that the fertility of these abstracting methods is approaching exhaustion. »

73 Pour Lefschetz, en 1930, utiliser la théorie des groupes en topologie n'est qu'une question de terminologie... Cf. [Lef30] : « Indeed everything that follows in this section can be, and frequently is, translated into the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology ».

74 Son discours fut transcrit en 1972, cf. [Alex72].

75 Pour le lecteur qui souhaiterait en savoir plus sur le processus d'algébrisation de la topologie consécutif à l'introduction des groupes d'homologie, nous renvoyons au chapitre 6 de [Vol02] qui en propose une étude historique synthétique.

[Alex79] P. S. Alexandroff, *Pages from an autobiography*, Russian Math. Surveys **34** (6) (1979), 267-302 ; **35** (3) (1980), 315-358.

[Alex83] P. S. Alexandroff, *In Memory of Emmy Noether, Address delivered by the President of the Moscow Mathematical Society P. S. Alexandrov on September 5. 1935*, EMMY NOETHER, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Springer-Verlag, 1983, 1-11.

[AH35] P. S. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.

[Bre99] E. Breitenberger, *Johann Benedikt Listing*, History of topology, 909-924, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Bro12A] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Mathematische Annalen **72** (1912), 422-425.

[Bro12B] L. E. J. Brouwer, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves*, Proceedings of Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **15** (1912), 352-360. In *Collected works*, Vol. 2, 527-535.

[Bro75] L. E. J. Brouwer, *The Nature of Geometry*, Collected Works, Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, 112-120, North-Holland, Amsterdam (1975).

[Cor96] L. Corry, *Modern Algebra and the rise of Mathematical Structures*, Birkhaüser, 1996.

[Dal99] D. van Dalen, *Luitzen Egbertus Jan Brouwer. 27.2.1881 Overschie - 2.12.1966 Blaricum*, History of topology, 947-964, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Die84] J. Dieudonné, *Emmy Noether and algebraic topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5-6.

[Die89] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhaüser, 1989.

[Epp99] M. Epple, *Die Entstehung der Knotentheorie, Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1999.

[FH76] H. Freudenthal et A. Heyting, *The Life of L. E. J. Brouwer (27 February 1881 - 2 December 1966)*, in Brouwer *Collected works, Vol. 2 : geometry, analysis, topology and mechanics*, Amsterdam, New York, Oxford : North Holland, 1976 ; X-XV.

[Hau02] F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band II, Springer, 2002.

[Hir99] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and Topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 57-65, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[Hol89] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen **34** (1889), 26-56.

[Hop28A] H. Hopf, *A New Proof of the Lefschetz Formula on Invariant Points*, Proc. Nat. Acad. of Sciences USA **14** (1928), 149-153.

[Hop28B] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127-136.

[Hop64] H. Hopf, *Selecta*, Springer-Verlag, 1964.

[Hop66] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie*, Colloque de Topologie, CBRM Bruxelles (1966), 9-20.

[Kro07] R. Krömer, *Tool and object : a history and philosophy of category theory*, Birkhäuser,2007.

[Kro70] L. Kronecker, *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen* [Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Decbr 1870.] ; *Leopold Kronecker's Werke* 1, Chelsea, 1968.

[Lak84] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann, 1984.

[Lef30] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1930).

[Lis47] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), Göttingen 1848.

[ML86] S. Mac Lane, *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305-307.

[McL06] C. McLarty *Emmy Noether's 'set theoretic' topology : from Dedekind to the rise of functors*, in *The architecture of modern mathematics*, 187-208, Oxford Univ. Press, Oxford, 2006.

[May29] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatschefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1-42, 219-258.

[Noe25] E. Noether, *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Nachrichten der 27 Januar 1925, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abteilung) **34** (1926), 104.

[Noe29] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Math. Zeitschr. **30** (1929), 641-692.

[Pon34] L., Pontrjagin, *The general topological theorem of duality for closed sets*, Annals of Mathematics **35** (4) (1934), 904-914.

[Sar99] K. S. Sarkaria, *the topological work of Henri Poincaré*, History of Topology, 123-168, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Sch99] E. Scholz, *The Concept of Manifold, 1850-1950*, History of Topology, 25-64, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Van92] R. Vanden Eynde, *Historical Evolution of the Concept of Homotopic Paths*, Arch. Hist. Exact Sci. **45** (1992), no. 2, 127-188.

[Veb21] O. Veblen, *Analysis Situs* 2^e ed, AMS, New York, 1921.

[Vie26] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang von Kompakten Räume und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert läßt*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 1008-1013.

[Vie27A] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **97** (1927), 454-472.

[Vie27B] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abt.) **36** (1927), 28-29.

[Vol02] K. Volkert, *Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial **4** (2002).

[Wae30] B. L. van der Waerden, *Kombinatorische Topologie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **39** (1930), 121-139.

[Wae31] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* 2, Berlin, 1931.

[Wae35] B. L. van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), 469-476.

[Wae85] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.

[Wei99] C. A. Weibel, *History of Homological Algebra*, History of topology, 797-836, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[Wey23] H. Weyl, *Análisis situs combinatorio*, Revista Matematica Hispano-Americana **5**, 43 pages (1923).