

Cédric Villani reçoit la médaille Fields

Clément Mouhot¹

Cédric Villani a reçu la médaille Fields lors du 26^e congrès mondial des mathématiques à Hyderabad en Inde le 19 août 2010 pour « *ses preuves de l'amortissement Landau non-linéaire et de la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Boltzmann* ».

C. Villani a 37 ans, il est actuellement directeur de l'Institut Henri Poincaré (depuis juillet 2009), après avoir occupé le poste de professeur à l'ENS Lyon durant près de 9 ans. Il est membre de l'Institut Universitaire de France (junior) depuis 2006. Il a été auparavant lauréat des prix Fermat et Henri Poincaré en 2009, ainsi que du prix de la Société Mathématique Européenne en 2008.

Les travaux de C. Villani montrent une grande diversité dans les outils et les concepts utilisés, provenant de l'analyse, des probabilités et de la géométrie. Ils sont cependant unis par le fil rouge de la notion d'entropie et (son corollaire) de retour à l'équilibre pour les systèmes de particules.

Commençons par le deuxième résultat de la citation (mais le premier chronologiquement) sur la « *convergence vers l'équilibre pour l'équation de Boltzmann* », en collaboration avec L. Desvillettes. Il concerne la vitesse à laquelle se produit ce retour à l'équilibre. Plus précisément le point de départ est la théorie fondée par les physiciens Maxwell et Boltzmann : étudier l'évolution de la *répartition* des particules selon leurs positions et leurs vitesses au lieu de suivre les trajectoires de chaque particule. Ils proposent alors l'équation intégro-différentielle dite « de Boltzmann » suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f), \quad 0 \leq f = f(t, x, v), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

où Ω est le domaine où évoluent les particules (avec des conditions aux bords appropriées) et $Q(f, f)$ est un opérateur intégral bilinéaire en la variable de vitesse qui décrit de façon statistique le processus de collision.

Ce point de vue *statistique* est bien plus abordable que le système dynamique constitué des milliards de milliards de particules soumises aux lois de Newton, et, à l'inverse de la dynamique microscopique qui est réversible, l'équation de Boltzmann possède une « flèche du temps » : elle est irréversible et, comme l'a découvert Boltzmann, elle montre une décroissance de la fonction $H = \int f \log f$ (opposé de l'entropie)². Cette découverte fait entrer le second principe de la thermodynamique dans le champ de l'investigation mathématique à travers l'étude des solutions de son équation.

La première découverte de C. Villani, en collaboration avec G. Toscani, est la possibilité surprenante et très élégante d'utiliser le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck pour relier les fonctionnelles de production d'entropie des équations de Boltzmann

¹ Université de Cambridge.

² Nous ne pouvons détailler ici l'une des idées les plus importantes de la physique du XIX^e siècle introduite par Boltzmann pour expliquer le passage du microscopique réversible au macroscopique irréversible, le « chaos moléculaire », dont la théorie mathématique rigoureuse reste un important problème ouvert.

et Landau. Utilisant ses précédents résultats en collaboration avec L. Desvillettes pour l'équation de Landau, C. Villani a pu ainsi démontrer en 2003 des inégalités « presque » linéaires (où l'on peut choisir une puissance aussi proche de un que voulu) entre la production d'entropie et l'entropie relative dans le cas spatialement homogène, donnant ainsi une réponse « presque vraie » à la conjecture de 1982 du physicien-mathématicien Cercignani récemment décédé.

La deuxième découverte de C. Villani, en collaboration avec L. Desvillettes (publié en 2005 à *Inventiones Mathematicae*), concerne le cas spatialement in-homogène intégrant les fluctuations en espace du gaz. Bien que la fonctionnelle de production d'entropie s'annule sur l'ensemble de tous les équilibres locaux, qui est bien plus grand que l'état d'équilibre final attendu, les dérivées en temps successives de cette production d'entropie (ou encore de fonctionnelles modifiées, relativement à des sous-espaces des équilibres locaux) permettent de saisir et de quantifier la façon dont l'opérateur de transport se combine aux mécanismes collisionnels pour empêcher l'« arrêt » sur un équilibre local mais non global. Cette intuition physique et géométrique fondamentale du problème suscitera de nouveaux résultats d'analyse fonctionnelle et marquera également la naissance de la théorie de l'*hypocoercivité* à laquelle C. Villani a consacré un long mémoire par la suite.

L'autre résultat mentionné dans la citation est un travail concernant « *l'amortissement Landau non-linéaire* », en collaboration avec l'auteur de cette notice. L'objet d'étude est le phénomène de relaxation *non collisionnel*, connu en physique sous le nom célèbre d'*amortissement Landau*. Découvert par Landau en 1946 dans le cadre des plasmas, c'est-à-dire des gaz d'électrons séparés des noyaux atomiques, il consiste en le retour à un équilibre homogène (et donc à la neutralité électrique) dans un plasma que l'on perturbe, et ceci à une échelle de temps rapide qui n'est pas explicable par les collisions au demeurant très faibles dans un plasma. Ce même phénomène a également été proposé en physique pour les « gaz d'étoiles » constituant les galaxies, et interagissant à travers les forces gravitationnelles.

Ces deux situations sont décrites mathématiquement par l'équation cinétique de Vlasov-Poisson :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = 0, \quad 0 \leq f = f(t, x, v), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3$$

où la force $F[f]$ (terme de champ moyen) est définie de façon auto-consistante par une convolution $F = \varphi \star \rho$ avec la densité spatiale $\rho(t, x) = \int f dv$ de la distribution. Le mystère et la difficulté de ce phénomène (ce qui explique les 60 ans de controverses entre physiciens depuis la découverte de Landau) sont le fait que l'équation de Vlasov-Poisson est *réversible* (c'est une équation aux dérivées partielles hamiltonienne), ce qui semble interdire un tel phénomène de relaxation vers un équilibre.

Dans une prépublication de 2009, nous établissons l'effet d'*amortissement Landau* au niveau non-linéaire, et en temps infini, pour les interactions électrostatique (plasmas) et gravitationnelle (galaxies), pour des perturbations petites en topologie analytique (ou Gevrey) d'un équilibre homogène analytique (le confinement est assuré par des conditions périodiques en espace). La distribution f converge vers un équilibre homogène *au sens faible* (ce qui ne contredit pas ainsi le théorème de Liouville pour ce système dynamique de dimension infinie) tandis que sa densité spatiale $\int f dv$ converge fortement vers une constante. Le théorème construit un

ensemble de solutions hétéroclines pour la topologie faible et constitue le premier résultat de relaxation à entropie constante pour un système confiné. La preuve fait apparaître des liens surprenants entre la théorie KAM en système dynamique, le mélange de phase, et le phénomène d'*écho plasma* découvert expérimentalement en 1967.

Le troisième axe important des recherches de C. Villani concerne le transport optimal. Le problème de départ de cette théorie étudiée par Monge en 1781 et redécouverte par Kantorovich en 1938 est le suivant : *transporter de la matière au moindre coût, les distributions initiale (« déblais ») et finale (« remblais ») étant données*. Ce problème de minimisation associe (en fonction du coût choisi) une distance entre ces distributions. Les travaux de R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto avaient introduit l'idée nouvelle d'interpréter les équations dissipatives (comme l'équation de la chaleur ou de Fokker-Planck) comme des flots gradients pour ces structures métriques abstraites. Les premières découvertes de C. Villani dans ce domaine, en collaboration avec F. Otto, D. Cordero-Erausquin et B. Nazaret, sont l'idée d'introduire la courbure de Ricci dans le formalisme d'Otto, et la possibilité d'utiliser ce point de vue pour étudier les inégalités de type Sobolev (en particulier les inégalités de Sobolev logarithmiques) et la convergence vers l'équilibre de certaines équations de diffusion.

La troisième découverte, en collaboration avec J. Lott, est publiée en 2009 aux *Annals of Mathematics* et a été obtenue au même moment indépendamment par K.-T. Sturm. En réexprimant les bornes sur la courbure de Ricci en terme de certaines inégalités fonctionnelles de convexité sur l'espace des mesures de probabilité, ces auteurs peuvent ainsi développer une théorie purement *métrique* des espaces à courbure de Ricci minorée (ce qui rappelle la notion de courbure-dimension de Bakry-Emery). Cette notion est d'une part assez robuste pour être stable sous la notion de convergence de Gromov-Hausdorff, et d'autre part assez forte pour permettre de démontrer des résultats non-triviaux, comme par exemple des inégalités de Sobolev, le théorème de Bishop-Gromov et aussi une version faible du théorème de Bonnet-Myers.

Enfin, ajoutons que C. Villani a écrit plusieurs livres et articles de revue enthousiasmants, notamment par leur qualité de synthèse entre des outils ou des branches des mathématiques qui auraient semblé sans connexion. L'ensemble de ses travaux démontre une puissance de travail exceptionnelle. Cette dernière n'aurait pourtant pas suffi à produire ces résultats, si elle n'était pas combinée à une profonde intuition physique et géométrique, ainsi qu'à un grand recul scientifique dans le choix des problèmes étudiés.