MATHÉMATIQUES

Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard[1]

1. L'article de Riemann

L'hypothèse[2] de Riemann est contenue dans une phrase de l'article *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, publié par Riemann en 1860 à l'occasion de son admission comme membre correspondant à l'académie de Berlin[3] :

> « *Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr warscheinlich, das alle Wurzeln reell sind.*[4] »

Cette phrase concerne les racines de la fonction

$$\Xi(z) = \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (s = \frac{1}{2} + iz), \tag{1}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler, et où

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}\,. \tag{2}$$

La fonction ζ n'est pas une nouvelle venue en 1859. Le premier résultat la concernant est la divergence de la série harmonique

$$\zeta(1) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

démontrée par Oresme vers 1350 dans ses *Quaestiones super geometriam Euclidis*. Au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, Euler découvre les propriétés fondamentales de ζ. Il résout d'abord

---

1 UMR 2615, CNRS, Université Indépendante de Moscou, Russie.

2 On dirait aujourd'hui « conjecture » au lieu d'« hypothèse » qui a plutôt le sens de *prémisse* ou de *condition* d'un énoncé mathématique.

3 L'article fut présenté en 1859 à l'académie. Les références de la plupart des travaux originaux cités dans cet article sont regroupées dans la bibliographie qui le termine.

4 « On trouve en effet entre ces limites un nombre à peu près égal à celui-ci de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles. » *Traduction de L. Laugel.*

le « problème de Bâle » (présentation en 1735, publication en 1740) sur le calcul de $\zeta(2)$ et trouve, plus généralement, l'expression de $\zeta(2k)$ pour k entier positif :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k+1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}\quad (k\in\mathbb{N}^*), \tag{3}$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli, définis par l'identité formelle

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{j\geqslant 0}B_j\frac{t^j}{j!}.$$

Il donne ensuite l'identité (dite du « produit eulérien »)

$$\zeta(s)=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{4}$$

où le produit porte sur les nombres premiers (présentation en 1737, publication en 1744). C'est une formulation analytique du théorème fondamental de l'arithmétique, et Euler en déduit la divergence de la série des inverses des nombres premiers puisque, pour $s=1$, le produit est infini. Enfin il découvre l'équation fonctionnelle de ζ :

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s), \tag{5}$$

la démontrant quand s est entier, et la considérant comme très plausible pour tout s réel (présentation en 1749, publication en 1768).[5]

On doit à Riemann une avancée capitale : l'étude de $\zeta(s)$ comme fonction de variable complexe. La série (2) définit d'abord une fonction analytique de la variable s dans le demi-plan $\sigma>1$ (en posant, ici et dans toute la suite, $\sigma=\Re s$ et $\tau=\Im s$). Elle y vérifie l'identité eulérienne (4), qui prouve notamment que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans ce demi-plan. En utilisant des techniques alors très récentes d'analyse complexe (théorème des résidus) et harmonique (inversion de Fourier)[6], Riemann obtient un ensemble impressionnant de résultats :

- le prolongement méromorphe au plan tout entier, avec un seul pôle, simple, en $s=1$, et de résidu 1 ;
- deux démonstrations de l'équation fonctionnelle (5), qui montre notamment que les seuls zéros de ζ dans le demi-plan $\sigma<0$ sont les nombres entiers strictement négatifs pairs (dits zéros « triviaux » de ζ) ;
- l'approximation

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi} \tag{6}$$

pour le nombre $N(T)$ de zéros $\rho=\beta+i\gamma$ de ζ dans la « bande critique » $0\leqslant\beta\leqslant 1$ (dits zéros « non triviaux » de ζ) tels que $0<\gamma\leqslant T$;

[5] En fait, Euler étudie la série alternée $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}n^{-s}=(1-2^{1-s})\zeta(s)$ et la définit par le procédé de sommation d'Abel quand s est un nombre entier négatif ou nul.

[6] Riemann a d'ailleurs contribué de façon essentielle à ces deux théories ; dans sa thèse pour l'analyse complexe, et dans son mémoire d'habilitation sur les séries trigonométriques pour l'analyse harmonique.

• l'identité remarquable suivante

$$\begin{aligned}(7)\quad \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots &= \mathrm{li}(x) - \sum_\rho \mathrm{li}(x^\rho) - \log 2 \\ &\quad + \int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} (x > 1,\, x \neq p^\nu),\end{aligned}$$

où

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

est la fonction de comptage des nombres premiers,

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \Big) \frac{dt}{\log t}$$

est la fonction « logarithme intégral »,[7] et où la somme $\sum_\rho$ porte sur les zéros non triviaux de ζ et doit être calculée en groupant ρ et $1-\rho$.

Insistons : la relation (7) n'est pas une formule asymptotique ou approchée, mais une identité parfaite. En particulier, le second membre de (7) est une fonction à valeurs *rationnelles*, constante dans chaque intervalle sans puissance de nombre premier.

En termes de la fonction Ξ définie par (1), le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle s'expriment simplement ainsi : Ξ est une fonction entière paire. Ses zéros $\alpha = (\rho - 1/2)/i$ (où ρ désigne un zéro non trivial de ζ) sont situés dans la bande horizontale $|\Im z| \leqslant 1/2$. L'hypothèse de Riemann est que ces zéros α sont réels, autrement dit que les zéros non triviaux ρ de ζ sont tous situés sur la « droite critique » d'équation $\sigma = \frac{1}{2}$.

Riemann évalue le nombre des α dont la partie réelle se trouve entre 0 et T par la formule (6), puis en déduit la décomposition en produit infini

$$\Xi(z) = \Xi(0) \prod_\alpha \Big(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\Big), \tag{8}$$

où le produit porte sur les α de partie réelle positive.

Revenons maintenant à la phrase de Riemann citée ci-dessus : elle contient une affirmation (man findet) et une conjecture (es ist sehr warscheinlich). L'affirmation concerne le nombre $N_0(T)$ des zéros *critiques* de ζ : ceux qui se trouvent sur la droite critique $\Re s = 1/2$ (et qui correspondent à des α réels). On peut interpréter cette affirmation comme une équivalence asymptotique :

$$N_0(T) \sim N(T) \quad (T \to \infty) \tag{9}$$

et l'hypothèse de Riemann est simplement l'égalité $N_0(T) = N(T)$ valable pour tout T (ou, ce qui revient au même, pour une suite de valeurs de T tendant vers l'infini).

Jusqu'à présent, même la version faible (9) est une question non résolue (voir §2.3 ci-dessous) et il est possible que Riemann se soit un peu avancé à ce sujet. Cependant, cette affirmation s'appuyait sur des recherches approfondies concernant

[7] On a $\mathrm{li}(x) \sim x/\log x$ $(x \to \infty)$.

un développement de la fonction Ξ ; quand les brouillons de Riemann furent étudiés et magistralement présentés par Siegel en 1932, on s'aperçut à quel point Riemann était en avance sur son époque.

N'étant pas un exposé totalement détaillé, l'article de Riemann a fourni à ses lecteurs les plus attentifs un programme de travail, avec des indications remarquablement précises pour sa réalisation.[8] Les décennies suivantes ont vu la réalisation partielle de ce programme, grâce notamment aux efforts de Weierstrass, von Mangoldt, Hadamard et la Vallée-Poussin ; l'évènement central étant la démonstration en 1896 par ces deux derniers du théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty). \tag{10}$$

Insistons encore sur un aspect important de l'article de Riemann : le rôle de l'analyse de Fourier. D'une part l'inversion de Fourier permet d'obtenir la formule explicite (7) à partir de la factorisation (8). D'autre part, la fonction Ξ est elle-même une transformée de Fourier :

$$\Xi(z) = 4\int_1^\infty \frac{d\big(x^{3/2}\psi'(x)\big)}{dx} x^{-1/4} \cos\big(\frac{1}{4} z \log x\big)\, dx, \tag{11}$$

où

$$\psi(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x} \tag{12}$$

est « la moitié » de la fonction thêta de Jacobi (qui correspond à une sommation pour $n \in \mathbb{Z}$ dans (12)). La formule (11) découle de la seconde démonstration de Riemann de l'équation fonctionnelle et fait apparaître celle-ci immédiatement sous forme symétrique.

2. Approximations de l'hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann n'est toujours pas confirmée, ni infirmée. Cependant de nombreux résultats positifs ont été établis dans sa direction, versions affaiblies ou variantes de l'énoncé de Riemann. S'ils n'ont pas permis de résoudre cette énigme, ces travaux ont néanmoins considérablement développé les techniques de la théorie analytique des nombres. Une fois démontrée, l'hypothèse de Riemann rendrait caducs les résultats mentionnés dans ce paragraphe. Les techniques, elles, resteront.

[8] Par exemple, pour la formule du produit (8), Riemann donne quelques brèves indications relatives au comportement de fonctions analytiques, qui seront reprises et développées plus tard par Hadamard.

2.1. Régions sans zéros

Compte tenu de la symétrie des zéros non triviaux de ζ par rapport à la droite $\sigma = 1/2$, l'hypothèse de Riemann équivaut au fait que le demi-plan $\sigma > 1/2$ ne contienne aucun zéro de ζ. Il est intéressant de décrire des régions de ce demi-plan aussi grandes que possible, sans zéro de ζ. Voici les résultats les plus importants.

• On peut chercher des valeurs de T_0 aussi grandes que possible telles que la demi-bande $\{\sigma > 1/2, |\tau| \leqslant T_0\}$ soit une région sans zéro. L'une des premières valeurs fut publiée par Gram (1903) ($T_0 \approx 65$)[9] et le meilleur résultat actuellement disponible est celui de Gourdon et Demichel ($T_0 \approx 2 \cdot 10^{12}$).[10] Cette branche de la théorie de la fonction ζ est évidemment liée au calcul scientifique et à l'évolution de l'algorithmique et des technologies informatiques. Quant aux idées mises en jeu, il faut mentionner essentiellement l'apport de Turing (1953), qui donna une méthode de détermination de T_0 ne nécessitant des calculs de $\zeta(s)$ que sur la droite critique $\sigma = 1/2$, où l'on dispose de la très précise formule de Riemann-Siegel.

• En 1899, la Vallée Poussin montra que la région

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_1}{\log|\tau|}, \quad |\tau| \geqslant T_1 \tag{13}$$

est sans zéros de ζ, pour des valeurs positives explicites[1] de c_1 et T_1. L'obtention de valeurs de c_1 (aussi grande que possible) et T_1 (aussi petite que possible) est cruciale pour l'obtention de certains résultats numériquement explicites en théorie des nombres premiers. Les meilleures constantes connues sont dues à Kadiri (2005 : $c_1 = (5,6969)^{-1}$, $T_1 = 2$).

La région (13) de la Vallée Poussin constitue une limite infranchissable dans certaines situations rencontrées dans la théorie des nombres premiers et entiers généralisés de Beurling. Dans cette théorie, les « nombres premiers généralisés » sont simplement des nombres $\beta_n > 1$, formant une suite B croissante et tendant vers l'infini avec n ; les « nombres entiers généralisés » sont les éléments du semi-groupe multiplicatif engendré par les β_n. Dans un article devenu classique (1937), Beurling a étudié quelles variations de la fonction de comptage des nombres entiers généralisés (autour de la fonction « partie entière », fonction de comptage des nombres entiers ordinaires) laissent stable le théorème des nombres premiers. L'outil analytique essentiel est naturellement la fonction zêta généralisée

$$\zeta_{\mathrm{B}}(s) = \prod_n \frac{1}{1 - \beta_n^{-s}}.$$

Diamond, Montgomery et Vorhauer (2006) ont démontré pour tout $\theta > 1/2$ l'existence d'une suite B de nombres premiers généralisés telle que la fonction ζ_{B}

[9] Riemann lui-même avait effectué des calculs numériques assez précis dont on a retrouvé la trace dans ses brouillons.

[10] Cependant, Demichel et Saouter (2010) attirent l'attention sur le fait que « The official status of these verifications is not clear : Gourdon and Demichel's work has never been independently verified ».

[1] La région sans zéro de la Vallée Poussin est $\sigma \geqslant 1 - \frac{0{,}0328214}{\log\left(\max(|\tau|, 574)\right) - 3{,}806}$.

se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\sigma > \theta$, avec un unique pôle en $s = 1$, une infinité de zéros sur la courbe $\sigma = 1 - a/\log|\tau|$, et aucun zéro à droite de cette courbe[2].

• Après des avancées significatives de Littlewood (1922) et Tchudakoff (1938) entre autres, Korobov et Vinogradov obtinrent indépendamment en 1958 la meilleure région sans zéro actuellement connue :

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_2}{(\log|\tau|)^{2/3}(\log\log|\tau|)^{1/3}}\,, \quad |\tau| \geqslant T_2. \tag{14}$$

Le cœur de la démonstration est une analyse approfondie des sommes exponentielles $\sum_{N<n\leqslant 2N} n^{i\tau}$. L'exposé le plus complet de la théorie de Korobov et Vinogradov est celui de Ford (2002), qui donne également les meilleures valeurs numériques actuellement disponibles : $c_2 = (57,54)^{-1}$, $T_2 = 3$.

2.2. Théorèmes de densité

Plutôt que de chercher des régions sans zéro, on peut se contenter de régions contenant peu de zéros de la fonction ζ. Cette problématique conduit à l'étude de la fonction de deux variables

$$N(\sigma, T) = \mathrm{card}\{\rho\,, \quad \Re\rho > \sigma,\, |\Im\rho| \leqslant T,\, \zeta(\rho) = 0\}.$$

Il s'agit alors de majorer au mieux la quantité $N(\sigma, T)$, l'hypothèse de Riemann apparaissant comme l'égalité $N(\sigma, T) = 0$ ($\sigma > 1/2,\ T > 0$).

Le premier résultat est

$$N(\sigma, T) = O_\sigma(T) \quad (T \to \infty,\, \sigma > 1/2),$$

obtenu par Bohr et Landau (1914), et amélioré par Carlson (1921) sous la forme

$$N(\sigma, T) = O_\varepsilon(T^{c(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}) \quad (T \geqslant 1,\, \sigma > 1/2,\, \varepsilon > 0), \tag{15}$$

avec $c(\sigma) = 4\sigma$. Une conjecture plus faible que l'hypothèse de Riemann, et toujours ouverte, est *l'hypothèse de densité* affirmant qu'on peut prendre $c(\sigma) = 2$ dans (15). L'hypothèse de densité conduit au résultat

$$p_{n+1} - p_n = O_\varepsilon(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

pour les différences entre nombres premiers consécutifs, et l'hypothèse de Riemann ne permet pas d'améliorer cette estimation.[3]

La meilleure fonction $c(\sigma)$, constante et dont on sait qu'elle est admissible dans (15), est 12/5 (Huxley, 1972). L'hypothèse de densité est connue pour $\sigma > 25/32$ (Bourgain, 2000).

---

[2] On peut prendre par exemple $a = 2(1 - \theta)$.

[3] En particulier, on ne sait pas démontrer qu'il existe toujours un nombre premier entre deux carrés consécutifs, même en admettant l'hypothèse de Riemann.

2.3. Zéros critiques

Une autre façon d'approcher l'hypothèse de Riemann est d'étudier le nombre $N_0(T)$ de zéros de ζ sur le segment $[1/2, 1/2+iT]$. Le premier résultat non trivial fut obtenu par Hardy (1914) : il existe une infinité de zéros critiques. Par la suite, Hardy et Littlewood (1921) obtinrent l'estimation $N_0(T) \gg T$, et Selberg (1942) la borne inférieure $N_0(T) \gg T \log T$. Au vu de (6), cela signifie qu'il existe une proportion strictement positive de zéros critiques parmi les zéros non triviaux de ζ.

Obtenir des minorations explicites de cette proportion est une tâche difficile. Le meilleur résultat actuellement connu (40%) est dû à Conrey (1989).

On peut considérer que ces résultats sont des théorèmes de densité : il s'agit d'obtenir une majoration du type $N(1/2, T) \leqslant cT \log T$, avec la constante c la plus petite possible. De fait, les méthodes dans les deux cas sont assez similaires et font notamment appel à une technique de « mollification » : on multiplie $\zeta(s)$ par une fonction $M(s)$ convenable de sorte que les oscillations de $\zeta(s)M(s)$ soient suffisammment contrôlées.

3. Fonctions entières à zéros réels

Les travaux décrits au paragraphe précédent ressortissent à une approche « interne » de l'hypothèse de Riemann. On peut également envisager une approche « externe » comme suit : considérer l'ensemble $\mathcal{R}$ des fonctions entières (ou méromorphes) dont tous les zéros sont réels (ou sur la droite critique) ; étudier les propriétés de stabilité (algébriques, topologiques, etc.) de cet ensemble ou de sous-ensembles définis par certaines contraintes ; donner de nombreux exemples de telles fonctions ; tout cela dans l'espoir de « forcer » la fonction Ξ (ou ζ) à appartenir à $\mathcal{R}$...

Nous allons donner quelques-uns des résultats les plus frappants obtenus dans cet esprit.

3.1. Le théorème du lieutenant Taylor

> « *Flight-Lieutenant P.R. Taylor was missing, believed killed, on active service in November 1943.* »

Ainsi commence une remarquable contribution à la théorie de la fonction ζ, préparée pour publication en 1944 par Rees et Titchmarsh à partir des manuscrits laissés par Taylor. Le §1 contient une démonstration du théorème suivant : les zéros de la fonction $\xi_1(s+1/2) - \xi_1(s-1/2)$ sont tous sur la droite $\sigma = 1/2$, où l'on a posé

$$\xi_1(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

La démonstration, classique et élégante, repose sur le principe de l'argument et un théorème de Littlewood que Turing utilisera également dans son article de 1953. Velasquez Castañon (2010) a étendu la méthode de Taylor à un cadre très général, et montré que de nombreux résultats récents découlent naturellement de cette approche.

3.2. Transformées de Fourier à zéros réels

La théorie des transformées de Fourier à zéros réels est un avatar moderne d'une des branches de la vénérable « théorie des équations » : celle, associée aux noms de Descartes, Budan, Fourier, Sturm, Hermite, Biehler, Laguerre, Jensen, Pólya, Schur entre autres, qui traite de la séparation des racines réelles d'un polynôme ou plus généralement d'une fonction entière, et de la stabilité par diverses opérations de classes de fonctions qui n'ont que des zéros réels. Citons les principaux résultats se rapportant à notre sujet.

3.2.1. Approximations de la fonction Ξ

On peut récrire (11) sous la forme

$$\Xi(z) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos zu\,du,$$

avec

$$\Phi(u) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n^4\pi^2 e^{\frac{9}{2}u} - 3n^2\pi e^{\frac{5}{2}u})e^{-n^2\pi e^{2u}}.$$

La fonction Φ est paire (d'après l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Jacobi) et il est intéressant d'en considérer des approximations, paires elles aussi, par exemple :

$$\Phi_N(u) = \sum_{n=1}^{N} e^{-2n^2\pi\cosh 2u}\big(8\pi^2 n^4\cosh(9u/2) - 12\pi n^2\cosh(5u/2)\big).$$

On pose naturellement ensuite

$$\Xi_N(z) = 2\int_0^\infty \Phi_N(u)\cos zu\,du.$$

Pólya (1926) a démontré que les zéros de Ξ_1 sont réels, et Hejhal (1990) que la proportion de zéros réels de toute fonction Ξ_N est asymptotiquement 100%.

3.2.2. La constante de de Bruijn-Newman

Newman (1976) a démontré l'existence d'une constante Λ telle que la fonction

$$\Xi_\lambda(z) = 2\int_0^\infty e^{\lambda u^2}\Phi(u)\cos zu\,du$$

n'a que des zéros réels si, et seulement si $4\lambda \geqslant \Lambda$. On appelle Λ la constante de de Bruijn-Newman, car de Bruijn (1950) avait démontré la réalité des zéros de Ξ_λ pour $\lambda \geqslant 1/8$. L'hypothèse de Riemann équivaut donc à l'inégalité $\Lambda \leqslant 0$. Le meilleur encadrement connu de Λ est

$$-2,7\cdot 10^{-9} < \Lambda < 1/2.$$

La minoration est due à Odlyzko (2000) et la majoration (qui améliore l'inégalité de de Bruijn $\Lambda \leqslant 1/2$) est due à Ki, Kim et Lee (2009).

4. Formes équivalentes

L'un des charmes particuliers de l'étude de l'hypothèse de Riemann est la grande diversité de ses formulations équivalentes.[4] En fait, presque chaque mathématicien peut travailler sur ce problème sans quitter sa spécialité préférée... Je donne ci-dessous une sélection de quelques formes équivalentes, mais il y en a bien d'autres.

4.1. En termes de la fonction ζ

Forme équivalente 1 (Speiser, 1934)**.** *La dérivée de la fonction ζ n'a pas de zéros dans la bande $0 < \sigma < 1/2$.*

Forme équivalente 2 (Li, 1997)**.** *Pour tout entier naturel n,*

$$\frac{d^n}{ds^n}\big(s^n \log \xi(s)\big)\Big|_{s=1} \geqslant 0.$$

Forme équivalente 3 (Balazard, Saias, Yor, 1999)**.** *On a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \left|\zeta\big(\frac{1}{2}+i\tau\big)\right| \frac{d\tau}{\frac{1}{4}+\tau^2} = 0.$$

4.2. Fonctions arithmétiques

4.2.1. Fonction de comptage des nombres premiers

La forme équivalente la plus classique, qui résulte des travaux de Riemann, est la suivante.

Forme équivalente 4 (von Koch, 1901)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (x \geqslant 1).$$

En termes du n-ieme nombre premier p_n, cela équivaut à

$$p_n = \mathrm{li}^{-1}(n) + O_\varepsilon(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (n \geqslant 1),$$

où li^{-1} est la fonction réciproque du logarithme intégral li.[5] Cela fournit la formulation de l'hypothèse de Riemann sans doute la plus accessible[6] au « grand public » :

> *on a une formule pour la moitié gauche des chiffres du n-ieme nombre premier.*

Il faut remarquer que des énoncés ineffectifs comme la forme équivalente 4 sont en fait équivalents à des énoncés numériquement explicites comme le suivant.

---

[4] Comparez, par exemple, les formes équivalentes 9 et 17 ci-dessous.

[5] On a $\mathrm{li}^{-1}(n) \sim n \log n$ $(n \to \infty)$. Le théorème des nombres premiers équivaut à $p_n \sim n \log n$ $(n \to \infty)$.

[6] Mais imprécise...

Forme équivalente 5 (Schoenfeld, 1976)**.** *Pour $x \geqslant 2657$, on a*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leqslant \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x.$$

Notons une variation sur ce thème, utilisant une autre inégalité de Schoenfeld et un théorème d'oscillation de Schmidt (1903).

Forme équivalente 6. *Pour $N \geqslant 74$, le plus petit commun multiple des entiers $1, 2, \ldots, N$ est inférieur à*

$$e^{N+\frac{1}{8\pi}\sqrt{N}\log^2 N}.$$

4.2.2. Somme des diviseurs d'un entier

Après des travaux de Nicolas (1983) sur la fonction d'Euler $\varphi(n)$, Robin a obtenu l'énoncé suivant.

Forme équivalente 7 (Robin, 1984)**.** *Pour tout entier $n > 5040$, la somme des diviseurs de n est inférieure à $e^\gamma n \log\log n$ (où γ désigne la constante d'Euler).*

Le critère de Robin a été reformulé de façon très élégante par Lagarias.

Forme équivalente 8 (Lagarias, 2002)**.** *Pour tout $n \geqslant 1$, la somme des diviseurs de n est inférieure à*

$$H_n + e^{H_n}\log H_n,$$

où $H_n = \sum_{j\leqslant n} 1/j$ est le n-ieme nombre harmonique.

4.2.3. Groupe symétrique

Forme équivalente 9 (Massias, Nicolas, Robin, 1988)**.** *Pour n assez grand, l'ordre maximal d'un élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est inférieur à $\exp\sqrt{\mathrm{li}^{-1}(n)}$.*

4.2.4. Fonction de Möbius

La fonction de Möbius $\mu(n)$, définie formellement par

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

est à valeurs ± 1, sur les nombres sans facteur carré et nulle sur les nombres ayant un facteur carré. Son comportement moyen est régi par les singularités de $1/\zeta$, c'est-à-dire par les zéros de ζ. On pose

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n).$$

Forme équivalente 10 (Littlewood, 1912)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que*

$$|M(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (x \geqslant 1).$$

L'obtention de versions effectives de ce critère est techniquement plus difficile que dans le cas de la forme équivalente 4. Le meilleur résultat connu est le suivant.[7]

Forme équivalente 11 (Soundararajan, 2009)**.** *On a*

$$M(x) = O\Big(\sqrt{x}\exp\big((\log x)^{1/2}(\log\log x)^{14}\big)\Big) \quad (x \geqslant 3).$$

On peut aussi pondérer la fonction de Möbius par une autre quantité que $[n \leqslant x]$,[8] par exemple $(x/n)^2 e^{-(x/n)^2}$. En utilisant (3), cela conduit au critère suivant.

Forme équivalente 12 (Riesz, 1916)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(2k)!}{B_{2k}(k-1)!} x^{2k} = O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (x \geqslant 1),$$

où les B_{2k} sont les nombres de Bernoulli.

4.2.5. *Distribution des fractions de Farey*

Comme $\mu(n)$ est la somme des racines primitives n-iemes de l'unité, la moyenne de la fonction de Möbius est reliée à la distribution des fractions de Farey :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N &= \{\frac{h}{k},\ 0 < h \leqslant k \leqslant N,\ (h,k) = 1\} \\ &= \{1/N = b_1 < \cdots < b_A = 1\},\end{aligned}$$

avec

$$A = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(N),$$

où φ désigne la fonction d'Euler. Le critère suivant exprime directement l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et la distribution des fractions de Farey.

Forme équivalente 13 (Franel, 1924)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant A} (b_j - j/A)^2 = O_\varepsilon(N^{-1+\varepsilon}) \quad (N \geqslant 1).$$

4.2.6. *Valeurs propres de la matrice de Redheffer*

La matrice de Redheffer d'ordre N est

$$R_N = ([(j = 1)\,\mathrm{ou}\,(i|j)])_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.$$

Son déterminant est $M(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu(n)$, d'où le critère suivant.

Forme équivalente 14. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le produit des valeurs propres de R_N est $O_\varepsilon(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.*

---

7 Dans un travail commun avec Anne de Roton, nous montrons que l'exposant 14 de cette estimation peut être remplacé par n'importe quel nombre $> 5/2$ (cf. `hal-00331871`).

8 Rappelons la notation d'Iverson : $[A] = 1$ si la propriété A est vérifiée, $[A] = 0$ sinon.

4.3. Le critère de positivité de Weil

On l'a vu, beaucoup de formes équivalentes de l'hypothèse de Riemann sont des inégalités, autrement dit expriment la positivité d'une certaine quantité. Le critère suivant est une version très générale de ce phénomène.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment dérivables et à support compact sur $(0,\infty)$. Posons

$$T(f) = \int_0^\infty f(x)dx + \int_0^\infty \tilde{f}(x)dx - \sum_{n\geqslant 1} \Lambda(n)\big(f(n)+\tilde{f}(n)\big) + \\ - (\log(4\pi)+\gamma)f(1) - \int_1^\infty \big(f(x)+\tilde{f}(x) - \frac{2}{x}f(1)\big)\frac{xdx}{x^2-1},$$

où $\tilde{f}(x) = x^{-1}f(x^{-1})$.

Pour $f, g \in \mathcal{D}$, posons

$$f * g(x) = \int_0^\infty f(t)g(x/t)\frac{dt}{t}.$$

Forme équivalente 15 (Weil, 1952)**.** *Pour tout $f \in \mathcal{D}$, on a $T(f * \bar{\tilde{f}}) \geqslant 0$.*

Le critère résulte assez simplement d'une formule explicite due à Guinand et Weil, provenant de la formule (7) de Riemann, et exprimant $T(f)$ sous la forme

$$\sum_\rho Mf(\rho),$$

où

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

est la transformée de Mellin de f, la somme portant sur les zéros non triviaux de ζ. La formule explicite de Guinand-Weil peut être considérée comme une relation de dualité entre deux ensembles de nombres : les nombres premiers d'une part, et les zéros de la fonction ζ d'autre part. On doit à Bombieri (2000) une étude approfondie de cette formule et du critère de Weil.

4.4. Systèmes dynamiques

Le critère suivant est dans la ligne des travaux d'Harald Bohr, frère de Niels et grand mathématicien dont la théorie des fonctions presque périodiques a été motivée par le désir de comprendre plus profondément le comportement des séries de Dirichlet, et notamment l'hypothèse de Riemann.

Forme équivalente 16 (Bagchi, 1982)**.** *Pour tout ε positif et tout compact K inclus dans la bande $1/2 < \sigma < 1$, l'ensemble des réels t tels que*

$$\max_{s\in K} |\zeta(s) - \zeta(s+it)| < \varepsilon$$

a une densité inférieure positive.

4.5. Analyse fonctionnelle

Dans sa thèse de doctorat, préparée sous la direction de Beurling, Nyman a obtenu le critère suivant.

Forme équivalente 17 (Nyman, 1950)**.** *L'espace vectoriel engendré par les fonctions*

$$f_\alpha \,:\, x \mapsto \{1/\alpha x\} - \{1/x\}/\alpha$$

(où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de t, et où α est un nombre réel $\geqslant 1$) est dense dans $L^2(0,1)$.

Ce résultat s'inscrit dans un courant de pensée dont la source est la théorie taubérienne de Wiener des années 1930. Le critère de Nyman a donné lieu à une importante activité, notamment dans les quinze dernières années. En particulier, le lien entre ce critère et l'identité d'inversion de Möbius

$$\sum_{n\geqslant 1} \mu(n) f_n(x) = -1 \quad (0 < x < 1)$$

a été élucidé par Báez-Duarte.

Forme équivalente 18 (Báez-Duarte, 2003)**.** *La constante 1 appartient à l'adhérence dans $L^2(0,1)$ de l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Le critère de Báez-Duarte peut être reformulé en termes des suites

$$r_n(k) = k \bmod n \,(\in \{0,1,\dots,n-1\}) \quad (k,n \in \mathbb{N}^*).$$

Chacune des suites r_n appartient à l'espace de Hilbert H des suites réelles $(a_k)_{k\geqslant 1}$ telles que la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k^2/k^2$ converge.

Forme équivalente 19 (Bagchi, 2006)**.** *La famille $(r_n)_{n\geqslant 2}$ est totale dans H.*

5. Idées générales

5.1. Un phénomène général

La première idée générale sur l'hypothèse de Riemann est qu'il s'agirait d'un phénomène ... général ! Cette propriété des entiers naturels se propagerait à de nombreuses structures analogues ou, à l'inverse, serait le reflet d'une loi mathématique plus fondamentale, qui nous est pour l'instant inconnue.

Piltz (1884) a ainsi énoncé une généralisation de l'hypothèse de Riemann à toutes les séries L de Dirichlet :

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

où χ est un caractère de Dirichlet, c'est-à-dire une fonction arithmétique non nulle, périodique et complètement multiplicative ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$).

Selberg (1989) a fourni un cadre axiomatique intéressant dans ce contexte. Il définit une classe de fonctions (qui porte maintenant son nom) par des propriétés similaires à celles de la fonction ζ de Riemann : série de Dirichlet (avec majoration des coefficients), produit eulérien, équation fonctionnelle, pôle éventuel en $s = 1$. Il est tentant de conjecturer que toutes les fonctions de la classe de Selberg vérifient l'hypothèse de Riemann. L'étude de la classe de Selberg est également susceptible de mener à des problématiques très actuelles : fonctions L automorphes, programme de Langlands...

Pour la recherche d'un principe fondamental qui entraînerait l'hypothèse de Riemann généralisée, on ne dispose pour l'instant que d'un résultat positif : la démonstration par Weil (1948) et Deligne (1974) de l'« hypothèse de Riemann » pour les fonctions ζ des variétés algébriques sur les corps finis. D'un point de vue analytique, ce sont des fonctions beaucoup plus simples que la fonction ζ de Riemann (des fractions rationnelles en p^{-s}, où p est la caractéristique du corps) ; néanmoins les idées de Weil et Deligne inspirent certaines approches de l'hypothèse de Riemann généralisée.

5.2. Un phénomène stochastique

La forme équivalente 10 évoque irrésistiblement l'estimation

$$\sum_{n \leqslant x} u_n = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (x \geqslant 1) \quad \text{p.p.},$$

où les u_n sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs ± 1 (et probabilités$\frac{1}{2}$). Cela indique un lien entre l'hypothèse de Riemann et le calcul des probabilités.

Il en existe d'autres, plus sophistiqués. Ainsi, Biane, Pitman et Yor (2001) ont observé que la quantité

$$\frac{d^n}{ds^n}\big(s^n \log \xi(s)\big)\Big|_{s=1},$$

objet du critère de Li (forme équivalente 2) est le n-ieme cumulant[9] d'une variable aléatoire liée au mouvement brownien.

5.3. Liens avec la physique

En dehors du lien de parenté entre les frères Bohr, existe-t-il une relation plus profonde entre l'hypothèse de Riemann et la physique ? Ce questionnement a été récemment à l'origine d'une intense activité, bénéfique pour les mathématiques et pour la physique. Le projet sous-jacent, appelé « philosophie de Hilbert-Pólya » est d'obtenir une interprétation spectrale des zéros de la fonction ζ (ou des nombres t définis par $\rho = \frac{1}{2} + it$) en termes d'un certain système dynamique. Cette quête est encouragée par l'accord numérique frappant entre les statistiques d'espacement des zéros de ζ et celles des valeurs propres de matrices hermitiennes aléatoires intervenant en mécanique quantique.

---

[9] Les cumulants κ_n de la variable aléatoire X sont définis par la relation $\log\big(\mathbb{E}(e^{tX})\big) = \sum_{n\geqslant 1} \kappa_n t^n/n!$.

6. Conclusion

Le théorème suivant de Burnol (2004) montre que nous sommes encore loin de comprendre toute la richesse structurelle d'un objet mathématique familier : la transformation de Fourier sur la droite réelle.

Pour chaque zéro non trivial ρ de la fonction ζ, posons

$$\varphi_\rho(t) = \frac{\{t\}}{t} + \rho t^{\rho-1}\int_0^t \{u\}u^{-\rho-1}du \quad (t > 0).$$

Si ρ est de multiplicité $\mathrm{m}(\rho) > 1$, posons également pour $1 < k \leqslant \mathrm{m}(\rho)$

$$\varphi_{\rho,k}(t) = t^{\rho-1}\int_0^t \{u\}u^{-\rho-1}\big(\rho\log^{k-1}(t/u) + (k-1)\log^{k-2}(t/u)\big)du \quad (t > 0).$$

Alors

- les fonctions $\varphi_{\rho,k}$ sont dans $L^2(0,\infty)$ et sont constantes sur $(0,1)$;
- les transformées de Fourier « en cosinus »

$$\mathfrak{C}\varphi_{\rho,k}(x) = 2\int_0^\infty \varphi_{\rho,k}(t)\cos 2\pi xt\, dt$$

sont également constantes sur $(0,1)$ (en fait $\mathfrak{C}\varphi_{\rho,k} = (-1)^k\varphi_{1-\rho,k}$) ;

- l'espace K des fonctions de $L^2(0,\infty)$ constantes sur $(0,1)$ ainsi que leurs transformées de Fourier est engendré (au sens hilbertien) par les fonctions $\varphi_{\rho,k}$: l'espace vectoriel qu'elles engendrent est dense dans K. De plus, le sous-espace engendré en omettant une seule de ces fonctions n'est plus dense dans K. En d'autres termes, la famille des $\varphi_{\rho,k}$ est une *base topologique* de K.

Ce résultat affirme que l'ensemble des zéros non triviaux de ζ « encode » l'espace fonctionnel K, dont la définition en termes de transformation de Fourier est très simple, et qui semble n'avoir aucun rapport avec la fonction ζ ou les nombres premiers. Cela nous incite à tenter de mieux comprendre la transformation de Fourier sur la droite réelle.

Plus largement, l'hypothèse de Riemann nous force à questionner les fondements mêmes de notre univers mathématique. Que sont les nombres entiers, les nombres réels ? Comment passer du discret au continu ? Une authentique réflexion mène à revisiter des sentiers qui ne sont battus qu'en apparence.

L'hypothèse de Riemann a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. Cela tient sans doute à ce qu'on ignore sa vraie nature ; nous avons vu qu'elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques, la mécanique quantique...

Il y en a pour tous les goûts et toutes les compétences : au travail !

Remerciements

Je remercie Christian Retoré, qui m'a incité à écrire cet article, les universités de Caen et Strasbourg qui m'ont invité à en exposer la teneur, et tous les collègues qui m'ont proposé des corrections et modifications.

7. Références

[1] L. Báez-Duarte – « A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis », *Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **14** (2003), p. 5–11.

[2] B. Bagchi – « A joint universality theorem for Dirichlet *L*-functions », *Math. Z.* **181** (1982), p. 319–334.

[3] ———, « On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **116** (2006), p. 137–146.

[4] M. Balazard, E. Saias & M. Yor – « Notes sur la fonction ζ de Riemann. II », *Adv. Math.* **143** (1999), p. 284–287.

[5] A. Beurling – « Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. », *Acta Math.* **68** (1937), p. 255–291.

[6] P. Biane, J. Pitman & M. Yor – « Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), p. 435–465.

[7] H. Bohr & E. Landau – « Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die *L*-Funktionen. », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **37** (1914), p. 269–272.

[8] E. Bombieri – « Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers. I », *Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **11** (2000), p. 183–233.

[9] J. Bourgain – « On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function », *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 3, p. 133–146.

[10] N. G. de Bruijn – « The roots of trigonometric integrals », *Duke Math. J.* **17** (1950), p. 197–226.

[11] J.-F. Burnol – « Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), p. 65–94.

[12] F. Carlson – « Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion. », *Ark. för Mat., Astron. och Fys.* **15** (1921), no. 20.

[13] J. B. Conrey – « More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line », *J. Reine Angew. Math.* **399** (1989), p. 1–26.

[14] P. Deligne – « La conjecture de Weil. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), p. 273–307.

[15] P. Demichel & Y. Saouter – « A sharp region where $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ is positive », *Math. Comp.* **79** (2010), p. 2395–2405.

[16] H. G. Diamond, H. L. Montgomery & U. M. A. Vorhauer – « Beurling primes with large oscillation », *Math. Ann.* **334** (2006), p. 1–36.

[17] L. Euler – « De summis serierum reciprocarum », *Comment. Acad. Sci. Petrop.* **7** (1740), p. 123–134.

[18] ———, « Variae observationes circa series infinitas », *Comment. Acad. Sci. Petrop.* **9** (1744), p. 160–188.

[19] ———, « Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques », *Mem. Acad. Sci. Berlin* **17** (1768), p. 83–106.

[20] K. Ford – « Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function », *Proc. London Math. Soc. (3)* **85** (2002), p. 565–633.

[21] J. Franel – « Les suites de Farey et le problème des nombres premiers. », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1924), p. 198–201.

[22] J. P. Gram – « Note sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann », *Acta Math.* **27** (1903), p. 289–304.

[23] J., Hadamard – « Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **24** (1896), p. 199–220.

[24] G. H. Hardy – « Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann », *C. R. A. S.* **158** (1914), p. 1012–1014.

[25] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – « The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. », *Math. Zeitschr.* **10** (1921), p. 283–317.

[26] D. A. Hejhal – « On a result of G. Pólya concerning the Riemann ξ-function », *J. Analyse Math.* **55** (1990), p. 59–95.

[27] M. N. HUXLEY – « On the difference between consecutive primes », *Invent. Math.* **15** (1972), p. 164–170.

[28] H. KADIRI – « Une région explicite sans zéros pour la fonction ζ de Riemann », *Acta Arith.* **117** (2005), p. 303–339.

[29] H. KI, Y.-O. KIM & J. LEE – « On the de Bruijn-Newman constant », *Adv. Math.* **222** (2009), p. 281–306.

[30] N. M. KOROBOV – « Estimations de sommes trigonométriques et applications », *Uspehi Mat. Nauk* **13** (1958), p. 185–192 (en russe).

[31] J. C. LAGARIAS – « An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis », *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), p. 534–543.

[32] J. E. LITTLEWOOD – « Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* n'a pas de zéros dans le demiplan $\Re s > 1/2$. », *C. R. A. S.* **154** (1912), p. 263–266.

[33] ———, « Researches in the theory of Riemann's zeta-function. », *Proc. London Math. Soc.* **20** (1922), p. xxii–xxviii.

[34] J.-P. MASSIAS, J.-L. NICOLAS & G. ROBIN – « Évaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique », *Acta Arith.* **50** (1988), p. 221–242.

[35] C. M. NEWMAN – « Fourier transforms with only real zeros », *Proc. Amer. Math. Soc.* **61** (1976), p. 245–251 (1977).

[36] J.-L. NICOLAS – « Petites valeurs de la fonction d'Euler », *J. Number Theory* **17** (1983), p. 375–388.

[37] B. NYMAN – *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Thèse, Université d'Uppsala, 1950.

[38] A. M. ODLYZKO – « An improved bound for the de Bruijn-Newman constant », *Numer. Algorithms* **25** (2000), p. 293–303.

[39] N. ORESME – *Quaestiones super geometriam Euclidis*, Edited by H. L. L. Busard. Janus, suppléments, Vol. III, E. J. Brill, Leiden, 1961.

[40] A. PILTZ – *Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und ueber verwandte Gesetze*, Habilitationsschrift, Université d'Iena, 1884.

[41] G. PÓLYA – « Bemerkung Über die Integraldarstellung der Riemannschen ζ-Funktion », *Acta Math.* **48** (1926), p. 305–317.

[42] B. RIEMANN – « Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **17** (1860), p. 671–680.

[43] M. RIESZ – « Sur l'hypothèse de Riemann », *Acta Math.* **40** (1916), p. 185–190.

[44] G. ROBIN – « Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann », *J. Math. Pures Appl. (9)* **63** (1984), p. 187–213.

[45] E. SCHMIDT – « Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze », *Math. Ann.* **57** (1903), p. 195–204.

[46] A. SELBERG – « On the zeros of Riemann's zeta-function », *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I.* (1942), no. 10, p. 59.

[47] ———, « Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series », in *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)* (Salerno), Univ. Salerno, 1992, p. 367–385.

[48] C. L. SIEGEL – « Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie. », *Quell. Stud. Gesch. Math. B* **2** (1932), p. 45–80.

[49] K. SOUNDARARAJAN – « Partial sums of the Möbius function », *J. Reine Angew. Math.* **631** (2009), p. 141–152.

[50] A. SPEISER – « Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion », *Math. Ann.* **110** (1935), p. 514–521.

[51] P. R. TAYLOR – « On the Riemann zeta function », *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **16** (1945), p. 1–21.

[52] N. TCHUDAKOFF – « On the functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$. », *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.* **21** (1938), p. 421–422.

[53] A. M. TURING – « Some calculations of the Riemann zeta-function », *Proc. London Math. Soc. (3)* **3** (1953), p. 99–117.

[54] C.-J. D. LA VALLÉE-POUSSIN – « Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres

premiers inférieurs à une limite donnée », *Mem. Couronnés de l'Acad. Roy. Sci. Bruxelles* **59** (1899).

[55] C.-J. D. LA VALLÉE POUSSIN – « Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, 1 », *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), p. 183–256.

[56] O. VELÁSQUEZ CASTAÑÓN – « Majoration du nombre de zéros d'une fonction méromorphe en dehors d'une droite verticale et applications », *J. Analyse Math.* **110** (2010), p. 67–127.

[57] I. M. VINOGRADOV – « Une nouvelle estimation de la fonction $\zeta(1+it)$ », *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **22** (1958), p. 161–164 (en russe).

[58] A. WEIL – *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Sci. Ind., no. 1041 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7** (1945), Hermann et Cie., Paris, 1948.

[59] ______, « Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers », *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* (1952), n° . Tome Supplementaire, p. 252–265.

Les travaux de Iooss et Plotnikov sur les vagues tri-dimensionnelles

Thomas Alazard[1]

1. Introduction

Considérons un océan de profondeur infinie au repos. Pour visualiser ceci, assimilons le domaine spatial à l'espace $\mathbf{R}^3$, que l'on suppose décomposé en deux parties distinctes : le demi-espace inférieur occupé par l'eau,

$$\left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,:\, y < 0 \right\},$$

et le demi-espace supérieur occupé par l'air,

$$\left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,:\, y > 0 \right\}.$$

Dans toute la suite on notera $x = (x_1, x_2)$ la variable horizontale et y la variable verticale. La gravité est orientée suivant l'axe (Oy).

Imaginons que le vent souffle au dessus de cet océan. Sous certaines conditions, ce vent va générer des vagues, appelées vagues de vent. On observe qu'elles peuvent se propager sur des distances immenses, jusqu'à atteindre le rivage. Nous allons nous intéresser à la propagation de ces vagues loin de la zone de vent et loin du rivage. On parle alors de houle ou encore d'ondes de gravité, car les vagues doivent être vues comme des ondes qui se propagent sous l'action de la gravité. Quant à la forme des vagues, il faut imaginer une surface lisse tracée au dessus du plan horizontal d'équation $y = 0$.

Pour décrire une vague, nous avons besoin d'introduire plusieurs quantités dont bien sûr une fonction, notée Σ, pour mesurer l'élévation de la mer par rapport à son niveau au repos. L'inconnue Σ dépend du temps t et de la variable $x \in \mathbf{R}^2$. Le graphe de la fonction Σ est ce que l'on appelle la surface libre. Le domaine occupé par l'eau à l'instant t est le demi-espace situé sous la surface libre :

$$\left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,:\, y < \Sigma(t,x) \right\}.$$

[1] CNRS & Département de Mathématiques d'Orsay.