Malliavin et l'analyse de Fourier

Jean-Pierre Kahane

Il vaut la peine de lire et de relire les travaux de Malliavin, et il sera utile de les regrouper et de les rééditer. Ils sont relatifs à plusieurs branches des mathématiques, mais on y trouve une vision commune qui domine l'habileté technique, d'ailleurs exceptionnelle : il faut voir les choses de haut avant de plonger dans la jungle. Je me bornerai ici aux plus importantes contributions de Malliavin à l'analyse de Fourier, qui suffisent à illustrer cette hauteur de vues et cette habileté.

Je ne vais pas suivre l'ordre chronologique mais partir du 13 avril 1959, la date de sa note au Comptes rendus « Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite », qui le rendit célèbre du jour au lendemain. Puis je reviendrai à sa thèse, de 1954, et à ses travaux avec Beurling dans les années 1960. Et je terminerai par les alentours de sa note, ses travaux sur l'algèbre de Wiener et les questions qui s'y rattachent.

La synthèse

En analyse harmonique, la synthèse signifie la reconstruction d'un son, d'un signal, d'une fonction ou d'un autre objet à partir des harmoniques qu'il contient. Par exemple, les fonctions périodiques peuvent être reconstruites à partir de leurs séries de Fourier. Il en est de même pour les fonctions presque périodiques au sens de Bohr, pour les fonctions quasi-périodiques au sens de Paley et Wiener et pour les fonctions moyenne-périodiques de Laurent Schwartz. Dans tous ces cas on associe à une fonction f appartenant à un espace fonctionnel le sous-espace fermé $\tau(f)$ engendré par ses translatées, et les harmoniques sont les générateurs des sous-espaces les plus simples contenus dans $\tau(f)$ (unidimensionnels dans les premiers cas évoqués, mais pas nécessairement dans le cas des moyenne-périodiques). La synthèse exprime le fait que les harmoniques contenus dans $\tau(f)$ engendrent $\tau(f)$. C'est une notion très générale.

Qu'en est-il pour les fonctions bornées ? La question a un sens si l'on équipe $L^\infty(R)$ de la topologie faible comme espace dual de $L^1(R)$ (en topologie forte, on retrouve les fonctions presque-périodiques de Bohr). Elle s'étend à $L^\infty(G)$ comme dual de $L^1(G)$ quand G est un groupe abélien localement compact, comme $\mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}^d$. La synthèse a lieu quand G est compact. Laurent Schwartz avait montré en 1948 qu'elle est en défaut quand $G = \mathbb{R}^3$, ou $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$ [22]. La situation restait inconnue dans les autres cas, et en particulier dans ce qui apparaissait comme le cas crucial, $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. À l'époque, c'était un défi lancé à tous les analystes.

La note de Malliavin résout le problème dans le cas crucial [15]. Ensuite Malliavin donne la réponse complète dans un article des *Annales de l'IHÉS* : la synthèse est en défaut pour tous les groupes G (abéliens, localement compacts) non compacts [16].

Le problème a beaucoup de formes équivalentes. Par dualité, il concerne la structure des idéaux fermés de l'algèbre de convolution $L^1(G)$: un tel idéal est-il nécessairement l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent ? Par dualité et transformation de Fourier, il s'exprime dans l'algèbre de Wiener $A(\Gamma) = \mathcal{F}L^1(G)$, où Γ est le groupe dual de G : un idéal fermé dans $A(\Gamma)$ est-il nécessairement l'idéal des fonctions qui s'annulent sur un fermé de Γ ?

Si, au lieu de $A(\Gamma)$, on considère $C(\Gamma)$, l'espace de toutes les fonctions continues sur Γ (et nulles à l'infini si Γ n'est pas compact), la réponse est positive, et une façon de l'exprimer consiste à dire que, étant donné $f \in C(\Gamma)$, $\mu \in M(\Gamma) = C^*(\Gamma)$ (mesure de Radon bornée sur Γ), et un fermé $E \subset \Gamma$, tels que $f = 0$ sur E et que le support de μ soit contenu dans E, alors le produit scalaire $< \mu, f >= \int f d\mu$ est nul.

Pour $A(\Gamma)$, le problème peut s'exprimer en remplaçant l'espace des mesures $M(\Gamma)$ par celui des « pseudomesures » $PM(\Gamma) = A^*(\Gamma)$. Étant donné un fermé $E \subset \Gamma$, $f \in A(\Gamma)$ nulle sur E, et $T \in PM(\Gamma)$ à support dans E, est-il vrai que $< T, f >= 0$? Dans les cas usuels, une pseudomesure peut être vue comme une distribution de Schwartz dont la transformée de Fourier est bornée.

Schwartz avait choisi pour E la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien, et pour T la dérivée dans une direction (disons, radiale) de la mesure d'aire sur E, σ ; le fait que $\hat{\sigma}(u) = O(\frac{1}{|u|})$ $(|u| \to \infty)$ montre que $\hat{T}(u) = O(1)$ $(|u| \to \infty)$, c'est-à-dire que T est une pseudomesure. Cela était apparu à Schwartz en préparant un exercice sur les distributions. En choisissant pour f une fonction test générique s'annulant sur E, on a $< T, f > \neq 0$, contre-exemple à la synthèse spectrale.

Comment choisir E, T, f quand $\Gamma = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$? L'idée de Malliavin est de choisir f en premier lieu, comme somme d'une série trigonométrique très lacunaire, de sorte que sa distribution (au sens de l'image de la mesure de Lebesgue) soit de classe C^∞, et qu'on puisse définir $T = \delta'(f)$ (dérivée de la mesure de Dirac appliquée à f) comme une pseudomesure ; c'est un tour de force, et ensuite c'est un jeu de s'arranger pour que $< T, f > \neq 0$; il est clair que T est portée par l'ensemble des zéros de f, donc on a un contre exemple à la synthèse spectrale quand $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

La construction de Malliavin peut être allégée en prenant pour f la somme d'une série trigonométrique aléatoire ; c'est un bon exemple de l'usage des probabilités en analyse [4, 10]. L'extension aux G non compacts (Γ non discrets) ne présente pas de difficulté.

Il y a maintenant d'autres voies pour obtenir le théorème de Malliavin. Varopoulos a utilisé sa théorie des algèbres tensorielles pour faire dériver le cas général de l'exemple de Schwartz [23]. Körner a repris l'idée de définir d'abord l'ensemble E, un ensemble étrange qui est mince au sens que $C(E) = A(E)$, l'algèbre des restrictions à E des fonctions appartenant à l'algèbre de Wiener (c'est la définition des « ensembles de Helson »), et qui est épais au sens qu'il porte une pseudomesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini (c'est la définition des « ensembles de multiplicité ») ; la construction est difficile mais on savait depuis longtemps qu'elle entraînerait la non-synthèse spectrale [11, 7].

Le théorème de Malliavin a donné matière à beaucoup d'exposés, de commentaires et de travaux [18, 21, 7]. D'un autre côté, il clôt une période, durant laquelle l'attention se focalisait sur l'algèbre de Wiener $A(\Gamma)$ comme un objet essentiel de l'analyse. De manière erronée on a pu croire qu'il marquait la fin de l'analyse harmonique commutative. Mais il est vrai, et heureux, que l'analyse harmonique commutative a pris d'autres voies.

La thèse et le théorème de Beurling-Malliavin

En 1959 Malliavin était professeur à la Faculté des sciences de Caen et il avait une réputation solide en analyse complexe. Il avait été, comme moi, élève de Szolem Mandelbrojt. Szolem racontait des histoires et posait des questions. Il avait un travail en commun avec Norbert Wiener d'où sortait la question suivante, qu'il proposa à Malliavin :

Que peut-on dire de l'ensemble des zéros réels d'une fonction holomorphe $f(z)$ dans le demi-plan $x = Rez > 0$, et bornée sur les droites verticales dans ce demi-plan, quand on connait une majoration du type $|f(z)| \leq M(x)$?

La thèse répond complètement à cette question et elle en ouvre beaucoup d'autres, avec de beaux résultats en analyse complexe et en analyse fonctionnelle [14]. Elle a valu à Malliavin d'être invité à l'Institute for Advanced Study de Princeton en 1954-55 et d'y rencontrer Arne Beurling. L'invitation fut renouvelée en 1960-61 et donna lieu à une collaboration extrêmement fructueuse entre Beurling et Malliavin. Pendant cette année, ils réussirent à résoudre complètement deux questions difficiles et intimement liées :

(1) caractériser les fonctions entières qui peuvent s'écrire comme quotients de deux fonctions entières de type exponentiel bornées sur l'axe réel ;

(2) calculer le « rayon de totalité » d'une suite réelle donnée, Λ, c'est-à-dire la borne supérieure des a tels que les $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \Lambda}$ engendrent $L^2(-a, a)$. Les résultats ne furent publiés par les auteurs qu'en 1967, mais en fait ils furent connus dès 1961 [5], et ce sont des joyaux de la théorie des fonctions.

La réponse à la première question fait intervenir l'intégrale logarithmique

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log|f(x)| \frac{dx}{1+x^2} \, ;$$

elle se trouve exposée complètement dans le livre de Paul Koosis « The logarithmic integral » [12] et dans ses « Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin » [13]. Pour les fonctions entières considérées, l'intégrale converge. Inversement, et c'est le principal, si $f(z)$ est une fonction entière et que l'intégrale logarithmique converge, il existe une fonction entière de type exponentiel arbitrairement petit, et bornée sur l'axe réel, $g(z)$, telle que la fonction de type exponentiel $f(z)g(z)$ soit bornée sur l'axe réel. Par transformation de Fourier, on obtient ainsi la définition des hyperdistributions régularisables par convolution avec des fonctions de supports arbitrairement petits.

La seconde question fait intervenir une nouvelle sorte de densité de la suite Λ, que Beurling et Malliavin appellent « densité effective ». On peut la définir comme la borne inférieure des densités des suites « BM-régulières » contenant Λ, en convenant qu'une suite est BM-régulière de densité D si sa fonction de décompte, $n(r)$, vérifie

$$\int |n(r) - Dr| \frac{dr}{1+r^2} < \infty \, .$$

C'est une condition intermédiaire entre $n(r) - Dr = O(1)$ $(r \to \infty)$ (régularité uniforme) et $n(r) - Dr = o(r)$ (régularité de Pólya). À chaque notion de régularité correspondent pour les suites, en copiant les termes de la théorie de la mesure, des notions de densité extérieure et de densité intérieure. La densité effective est la densité extérieure associée à la BM-régularité.

Les résultats sont donc faciles à exprimer, mais les méthodes sont très élaborées et nécessitent des raffinements de la théorie du potentiel [1, 2].

Autour et à la suite de la synthèse

Je reviens à l'algèbre de Wiener $A(\Gamma) = \mathcal{F}L^1(G)$. Le théorème de Wiener-Lévy dit que les fonctions analytiques opèrent dans $A(\Gamma)$, c'est-à-dire que si $f \in A(\Gamma)$ et que Φ est analytique sur $f(\Gamma)$ (et nulle à l'origine si Γ n'est pas compact), la fonction $\Phi \circ f$ appartient à $A(\Gamma)$. En vue d'étendre ce résultat ou de montrer qu'il est inaméliorable, il est indiqué d'étudier la croissance des normes $\| \exp iuf \|_{A(\Gamma)}$ quand $u \to \infty$. En vérité, seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(\Gamma)$: c'est la réciproque du théorème de Wiener-Lévy, démontrée par Katznelson en 1958 [8]. Séduit par le problème, Malliavin eut une autre approche : que peut-on dire des fonctions Φ telles que $\Phi \circ f \in A(\Gamma)$ quand f est donnée ? Si l'on pense à $L^1(G)$ au lieu de $A(\Gamma)$, les fonctions qui opèrent définissent un calcul symbolique, et Malliavin se pose le problème du « calcul symbolique individuel ». La méthode est alors l'étude des normes des $\exp iuf$ dans $PM(\Gamma)$, l'espace dual de $A(\Gamma)$, et elle permet à Malliavin de construire des $f \in A(\Gamma)$ telles que $\Phi \circ f \in A(\Gamma)$ implique $\Phi \in C^\infty$, avec même des précisions sur l'ordre de grandeur des dérivées successives de Φ [17]. Ce résultat prélude à la découverte sur la non-synthèse, qui repose aussi sur une estimation des $\| \exp iuf \|_{PM(\Gamma)}$. Convenablement exploité, il permet de retrouver le théorème de Katznelson [6].

L'usage de $PM(\Gamma)$ est essentiel dans d'autres questions concernant $A(\Gamma)$. Étant donné un fermé E dans Γ, les restrictions à E des fonctions appartenant à $A(\Gamma)$ constituent une algèbre de Banach, $A(E)$. Nous avons vu que les ensembles de Helson sont définis par $A(E) = C(E)$, l'algèbre des fonctions continues sur E (et nulles à l'infini si E n'est pas compact). Dans ce cas, toutes les fonctions continues (nulles à l'origine) opèrent dans $A(E)$. Mais on a mis en évidence beaucoup d'ensembles E tels que les seules fonctions opérant dans $A(E)$ sont les fonctions analytiques, et on ne connaît pas de situation intermédiaire. La conjecture de dichotomie de Katznelson est qu'il y a seulement deux cas possibles : ou $A(E) = C(E)$; ou les seules fonctions opérant dans $A(E)$ sont analytiques. C'est toujours un problème ouvert.

Quand Γ est discret, on parle d'ensembles de Sidon au lieu d'ensembles de Helson. La conjecture de dichotomie est ouverte pour les ensembles de Sidon, mais Katznelson et Malliavin en firent une « vérification statistique » [9]. Pour cela, ils introduisirent une méthode de sélection aléatoire des entiers qui fut, plus tard, largement utilisée par Jean Bourgain. Suivant cette méthode, l'ensemble aléatoire obtenu est presque sûrement, soit Sidon, soit « d'analyticité ». C'est, de nouveau, une jolie application des probabilités à l'analyse harmonique.

La structure des ensembles de Sidon est encore mystérieuse. La conjecture en cours est que tous les ensembles de Sidon sont des réunions finies d'ensembles quasi-indépendants, avec une définition convenable de la quasi-indépendance ; on aurait, de ce fait, leur description complète. L'argument le plus fort en faveur de cette conjecture est un théorème de Paul et Marie-Paule Malliavin, de 1967, relatif aux groupes Γ duals des groupes $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ (p premier) : dans ce cas, les ensembles de Sidon ne sont autres que les réunions finies d'ensembles indépendants. Les dernières contributions importantes à ce problème sont dues à Gilles Pisier et Jean Bourgain dans les années 1980 [19, 20, 3].

J'ai tenté de donner un coup de projecteur sur quelques contributions majeures de Malliavin à l'analyse de Fourier. Pour mettre l'ensemble en pleine lumière, il faut se référer aux œuvres elles-mêmes, et je renouvelle le souhait qu'elles soient regroupées et publiées.

Références

[1] A. Beurling et P.Malliavin.– On Fourier Transforms of measures with compact support, Acta Math. 107 (1962), 291-309.
[2] A. Beurling et P.Malliavin.– On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math. 118 (1967), 79-93.
[3] J. Bourgain.– Sidon sets and Riesz products, Ann. Inst. Fourier 35, 1, (1985), 137-148.
[4] J.-P. Kahane.– Sur un théorème de Paul Malliavin, C.R. Acad. Sci. A-248 (1959) 2943-2944.
[5] J.-P. Kahane.– Travaux de Beurling et Malliavin, Séminaire Bourbaki, Décembre 1961, exposé 225.
[6] J.-P. Kahane.– Une nouvelle réciproque du théorème de Wiener-Lévy, C.R. Acad. Sci. A-264 (1967), 104-106.
[7] Jean-Pierre Kahane et R. Salem.– Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris, Hermann 1963.
[8] Y. Katznelson.– Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C.R. Acad. Sci. A-247 (1958), 404-406.
[9] Y. Katznelson et P. Malliavin.– Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbre de restriction, C.R. Acad. Sci. A-262 (1966), 490-492.
[10] R. Kaufman.– Gap series and an example to Malliavin's theorem, Pacific J. Math. 28 (1969), 117-119.
[11] T. Körner.– A pseudofunction on a Helson set, Astérisque 5 (1973), 3-224 et 231-239.
[12] P. Koosis.– The logarithmic integral, vol. I et II, Cambridge University Press, 1988 et 1992.
[13] P. Koosis.– Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin, Montreal, Publications CRM, 1996.
[14] P. Malliavin.– (thèse) Acta Math 93 (1954), 179-255.
[15] P. Malliavin.– Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, C.R. Acad. Sci. A-248, 2155-2157.
[16] P. Malliavin.– Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts, Publ. Math. I.H.É.S. 1959, 61-68.
[17] P. Malliavin.– Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque-périodiques, C.R. Acad. Sci. A-248 (1959) 1756-1758 ; voir aussi Calcul symbolique et sous-algèbres de $L^1(G)$, Bull. Soc. Math., 8(1959), 180-190.
[18] P. Malliavin.– Ensembles de résolution spectrale, Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm 1962, 368-378.
[19] P. Malliavin et M.-P. Malliavin.– Caractérisation arithmétique d'une classe d'ensembles de Helson, C.R. Acad. Sci. A-264 (1967), 192-193.
[20] G. Pisier.– Arithmetical characterisation of Sidon sets, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), 87-89.
[21] W. Rudin.– Fourier Analysis on Groups, Wiley 1962.
[22] L. Schwartz.– Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C.R. Acad. Sci. A-227 (1948), 424-426.
[23] N. Varopoulos.– Sur un théorème de M. Paul Malliavin, C.R. Acad. Sci. 263 (1967), 834-836.