Des problèmes aux structures : Henri Cartan et les problèmes de Cousin

Renaud Chorlay[1]

Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures (...). ([2] p.45)

Ainsi Nicolas Bourbaki soutient-il, dans son texte sur l'Architecture des mathématiques, que les structures ne sont pas seulement des outils d'organisation et de clarification d'un divers mathématique donné par ailleurs ; bien plus, l'invention de structure s'ajoute à la gamme des gestes du mathématicien au travail. Rien dans ce texte célèbre ne laisse toutefois entrevoir comment l'on invente des structures, ni en quoi cela contribue directement à la résolution de problèmes. Le cas du travail de Henri Cartan sur les « problèmes de Cousin » éclaire remarquablement bien cet aspect : c'est à partir d'une famille de problèmes bien connus en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes que Cartan introduit en 1940-44 une nouvelle structure, qui sera décrite quelques années plus tard comme celle de faisceau analytique cohérent. La rencontre, en 1952, entre cette ligne de recherche et une cohomologie des faisceaux jusque là développée dans un cadre plus purement topologique marque une étape importante dans le développement des mathématiques au XX[e] siècle.

Des problèmes qui résistent

Cartan présente ainsi, dans une note aux Comptes Rendus de 1934, les deux « problèmes de Cousin » :

– *Premier problème de Cousin*

On suppose que le domaine considéré D est recouvert à l'aide d'une infinité dénombrable de domaines partiels D_i intérieurs à D, et que, dans chaque D_i, on a défini une fonction méromorphe f_i ; on suppose en outre que, chaque fois que deux domaines D_i et D_j ont une partie commune D_{ij}, la différence $f_i - f_j$ est holomorphe dans D_{ij}. On se propose de trouver une fonction F, méromorphe dans D, et telle que, dans chaque D_i, la différence $F - f_i$ soit holomorphe.

– *Deuxième problème de Cousin*

Mêmes hypothèses que pour le premier, sauf que les f_i sont remplacées par des φ_i holomorphes (dans D_i), et que, dans chaque D_{ij}, le quotient $\varphi_i : \varphi_j$ est supposé holomorphe et jamais nul. On se propose de trouver une fonction φ, holomorphe dans D, et telle que, dans chaque D_i, le quotient $\Phi : \varphi_i$ soit holomorphe et non nul. ([3] p.1285).

[1] Post-doctorant auprès de la Chaire d'excellence senior ANR *Ideals of Proof* (Professeur Michael Detlefsen), rattaché à l'équipe REHSEIS (UMR 7219 CNRS – Université Paris VII).

On peut formuler les problèmes plus géométriquement, en disant qu'on cherche dans le premier cas une fonction méromorphe de singularités données, dans le second cas une fonction holomorphe de lieu des zéros donné (avec multiplicités). À ces deux problèmes s'ajoute le « problème de Poincaré » : peut-on mettre toute fonction méromorphe dans un domaine D sous forme de quotient de deux fonctions holomorphes dans D ? Poincaré avait résolu le problème par l'affirmative dans le cas $D = \mathbf{C}^2$, dans un article de 1883 [25]. Il généralisait ainsi au cas de deux variables d'un théorème démontré récemment pour une variable par Weierstrass. Reposant sur des techniques de théories du potentiel annonçant sa méthode du balayage, la démonstration de Poincaré consistait à résoudre le deuxième problème de Cousin pour $\mathbf{C}^2$: si F est la fonction méromorphe donnée, le problème de Poincaré est résolu si l'on sait construire une fonctions holomorphe G telle que FG soit holomorphe dans $\mathbf{C}^2$; construire G, c'est construire une fonction holomorphe de lieu de zéros donné (avec multiplicités), correspondant au lieu singulier de F. Ainsi dans un domaine où le second problème de Cousin admet toujours une solution, le problème de Poincaré est toujours résoluble.

C'est Pierre Cousin qui, dans sa thèse soutenue en 1895 [13], formule parallèlement les trois problèmes et démontre qu'ils sont toujours résolubles dans les polycylindres[2] de dimension finie quelconque. La restriction à ce type de domaines lui permet de s'appuyer essentiellement sur des techniques relatives aux fonctions d'une seule variable complexe ; un logarithme permet de passer de l'étude du premier problème de Cousin (problème additif) à celle du second (problème multiplicatif), pour peu qu'on arrive à contrôler la multiformité. Ces théorèmes sont rapidement intégrés dans les monographies de référence sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par exemple dans l'article de synthèse que W.F. Osgood rédige en 1901 pour l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* [24].

Il semble que Cousin ait été un peu optimiste sur son contrôle de la multiformité des fonctions auxiliaires introduites au moyen d'un logarithme complexe, mais le défaut de son argumentation n'est apparu qu'assez tard, et indirectement : en travaillant sur le problème de Poincaré (avec hypothèse de coprimalité), T.H. Gronwall trouve en 1913 un contre-exemple aux résultats de Cousin. Un travail d'analyse des preuves de Cousin, mené avec Osgood, conduit en 1917 à la conclusion suivante [16] : la démonstration relative au premier problème est valide ; la démonstration relative au second problème (d'où dérive la solution du problème de Poincaré) n'est valide que dans les polycylindres dont au plus l'une des composantes n'est pas simplement connexe. Dans le cas contraire, non seulement la démonstration de Cousin introduit des fonctions auxiliaires multiformes là où Cousin pensait avoir éliminé toute multiformité, mais le théorème n'est tout simplement pas valide : Gronwall peut alors exhiber son contre-exemple au théorème de Poincaré (avec coprimalité) dans le produit de deux surfaces annulaires $(1 < |z| < 2)$.

Dans la note de 1934 citée plus haut, un des objectifs de Cartan était de reprendre cette famille de problèmes dans des domaines plus généraux que les polycylindres, où l'« on s'aperçoit que les théorèmes de Cousin ne sont pas vrais pour tous

[2] « polycylindre » désigne un produit d'ouverts ; chaque variable complexe peut donc varier dans « son » domaine, indépendamment des autres.

les domaines, mêmes simplement connexes » ([3] p.1286). Pour ces domaines non polycylindriques, Cartan cherche à remplacer l'intégrale de Cauchy par l'« intégrale de Weil » [28]. Cartan et Weil reconnaissent toutefois bientôt que son existence n'est pas suffisamment assurée au delà de domaines définis par des inégalités polynomiales : le cas des domaines d'holomorphie[3], visé par Cartan, semble hors d'atteinte.

La longue résistance des problèmes de cette famille est illustrée par la synthèse que H. Behnke et K. Stein rédigent en 1937 pour l'union des mathématiciens allemands. L'accumulation de questions ouvertes, de résultats partiels, d'exemples et de contre-exemples élémentaires ou complexes est résumée en fin d'article par le tableau suivant ([1] p.192) :

	Cousin 1	Cousin 2	Poincaré	Möglich ?
1	+	+	+	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+
5	-	+	+	+
6	-	+	-	-
7	-	-	+	+
9	-	-	-	+

La ligne 2, par exemple, se lit ainsi : il est impossible que les problèmes de Cousin 1 et 2 soient universellement résolubles (i.e. pour toutes données) dans un domaine et que le théorème de Poincaré n'y soit pas universellement résoluble (c'est le classique Cousin 2 $\Rightarrow$ Poincaré). La ligne 5 indique qu'on dispose d'un exemple de domaine dans lequel Cousin 2 est universellement résoluble, mais pas Cousin 1.

Les premières percées importantes sur le front des problèmes de Cousin viennent du Japon, avec K. Oka. C'est Cousin 1 qui cède le premier. Oka évite le recours à l'intégrale de Weil en décrivant ses domaines rationnellement convexes comme des sous-variétés analytiques de polycylindres (ce « truc » jouera un rôle plus loin), et établit que Cousin 1 est universellement résoluble dans ces domaines [20]. L'approximation des domaines d'holomorphie par des domaines rationnellement convexes permet de leur étendre ce résultat en 1937 [21].

On savait depuis le travail de Gronwall que les choses n'étaient pas si simples pour Cousin 2. Quelque semblables que puissent paraître les deux problèmes, la topologie du domaine joue un rôle dans le second qu'elle ne semble pas jouer dans le premier... quant à savoir quel rôle exactement, peu d'éléments sont disponibles en 1937 encore ; la tactique de Gronwall et Osgood avait été d'ajouter des hypothèses de simple connexité (sur toutes les composantes du polycylindre, sauf au plus une) pour éviter les problèmes topologiques plus que pour les étudier. C'est Oka [22] qui apporte les premières lumières sur ces délicates questions, en étudiant les liens entre

3 Cartan présente la notion de « domaine d'holomorphie » de la manière la plus directe : « le domaine total d'existence d'une certaine fonction holomorphe » [3] p.1286.

Cousin 2 et son analogue purement topologique (le « problème généralisé ») : trouver une fonction continue de lieu de zéros localement donné par l'annulation d'une fonction continue[4]. Le problème généralisé étant purement topologique, l'étude du lien entre les deux problèmes permet de cerner le rôle de la topologie. Oka démontre en 1938 que « Quand D est un domaine d'holomorphie, s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques le sont aussi » (entendre : existent aussi [22] p.8) ; ainsi, dans un tel domaine, non seulement Cousin 2 comporte un élément topologique, mais il est essentiellement topologique. Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution continue est alors formulée par Oka en termes de « zéros balayables » ([22] p.15) : un tel lieu de zéros Σ dans D est balayable s'il existe un lieu de zéros continu dans $D \times [0,1]$ de restriction Σ dans $D \times \{0\}$, et de restriction vide dans $D \times \{1\}$[5].

Du problème à la structure

Henri Cartan reprend l'étude de Cousin 2 dans deux articles, ou plutôt un article en deux parties : *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* [4], *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* [5]. Il y introduit une nouvelle structure en mathématiques – celle d'idéal de fonctions holomorphes – et définit un programme de recherche, celui de « l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes ».

L'énoncé des problèmes de Cousin avait été remarquablement stable depuis Cousin. C'est par une reformulation à saveur algébrique que Cartan ouvre ses articles : *« (...) Construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné. »* Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point x de D, d'une fonction f_x holomorphe au point x, ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient f_x/f_a est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, f_x et f_a engendrent le même idéal. Le problème posé par Cousin est alors : pour toute donnée de Cousin dans le domaine D, existe-t-il une fonction f, holomorphe dans D, telle que, pour tout point x de D, le quotient f/f_x soit holomorphe et $\neq 0$. ([5] p.149)

Ainsi formulé, Cousin 2 apparaît comme un représentant d'une famille beaucoup plus large de problèmes : *« Remarquons à ce propos que le "deuxième problème de Cousin ? se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée d'une seule fonction. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, me semble-t-il, l'étude globale des idéaux. »* ([4] p.2). L'étude, nous dit Cartan, n'a pas à se restreindre aux idéaux principaux, ou, géométriquement parlant, aux sous-variétés analytiques de codimension (complexe) 1.

[4] Pour obtenir un analogue continu du problème analytique, Oka suppose que le lieu des zéros est d'intérieur vide ([21] p.9).

[5] Cette reformulation est due à H. Cartan, dans : Oka K., 1984. Collected papers (R. Remmert (ed.), R. Narasimhan (trans.)), Springer, NY, 1984.

Les liens avec les problèmes de Cousin sont multiples. Bien sûr, on voit dans la citation précédente que la nouvelle structure est introduite à partir d'une reformulation de ce que sont les « données de Cousin », mais deux autres liens sont à signaler. Premièrement, le nouveau programme de recherche vise l'étude d'un certain nombre de questions générales telles que : une fonction holomorphe sur une sous-variété analytique d'un domaine d'holomorphie est-elle toujours la restriction d'une fonction holomorphe sur ce domaine ? Si une famille finie de fonctions holomorphes définies sur un domaine d'holomorphie est sans zéro commun, l'idéal qu'elle engendre dans l'anneau des fonctions holomorphes contient-il 1 (*Nullstellensatz* analytique, que Cartan décrit comme un analogue de Cousin 2 pour une sous-variété analytique vide et non de codimension 1) ? Ces deux problèmes proviennent de l'étude des problèmes de Cousin : le premier a été soulevé par le « truc » d'Oka ; du second dépend la démonstration de l'existence de l'intégrale de Weil.

Deuxièmement, Cartan isole dans les méthodes de démonstration communes à Cousin et Oka une « opération élémentaire » : « pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède à des assemblages successifs de morceaux » ([5] p.151). Cette étape élémentaire de recollement est triviale en codimension 1 mais repose dans le cas général sur un lemme de prolongement de matrices holomorphes de déterminant nulle part nul : c'est à la démonstration de ce lemme central qu'est consacré l'article de 1940.

Ainsi, la reformulation en partie algébrique d'un problème ancien et résistant (Cousin 2) permet-elle de définir un nouveau programme de recherche qui, bien que formulé comme étude de la nouvelle « structure », englobe une large famille de problèmes classiques, et repose sur la généralisation d'un pas de démonstration déjà familier.

L'étude de cette nouvelle structure abstraite conduit à deux types de questions. Premièrement, et c'est bien là l'enjeu de l'étude « globale », on doit étudier le lien entre l'idéal (ou le module) de fonctions holomorphes sur un domaine donné et la famille des idéaux « ponctuels » [6] qu'il induit en chaque point ; ou encore, on doit étudier le lien entre les idéaux associés à deux domaines, l'un inclus dans l'autre. Cartan souligne à ce propos l'aspect suivant :

Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E' contenu dans E. Il en résulte que tout idéal sur E engendre un idéal sur E', lorsque $E' \subset E$; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à coefficients holomorphes sur E', des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal porte en puissance une foule d'idéaux, un sur chaque sous-ensemble de E. ([5] p.153)

Il s'en faut de beaucoup que les fonctions de l'idéal engendré sur un sous-domaine soient de simples restrictions de fonctions holomorphes dans E ; ce que l'on sait, c'est que les fonctions de l'idéal engendré sont combinaisons linéaires à coefficients holomorphes dans E' de restrictions de fonctions holomorphes dans E. Dans des termes qui ne sont pas ceux de Cartan en 1940-44 : le changement

[6] La notion d'anneau des fonctions holomorphes en un point, ou associée à un sous-domaine, n'est pas explicitée en 1940. Elle l'est en 1944, sans que des notions de limites inductives ou d'anneau local soient utilisées. La notion de limite inductive est par contre explicitement utilisée en 1950 ([7] p.31).

de domaine implique un changement d'anneau de base, et c'est là que réside la question fondamentale. On doit aussi noter que cette reformulation des problèmes de Cousin affecte aussi la notion de solution au problème de Cousin. Dans le problème classique, une solution à Cousin 2 était une fonction holomorphe (de zéros donnés) ; dans le nouveau cadre, une solution est un idéal de fonctions globales de lieu de zéros donné : le problème est affaibli, on admet les solutions formées de familles finies de fonctions globales.

Une deuxième famille de questions naît dans le cadre abstrait de l'étude de structure. Lorsqu'une « donnée de Cousin » est définie à partir d'un recouvrement ouvert, la famille d'idéaux ponctuels vérifie automatiquement une propriété qui n'est pas contenue dans la définition d'une famille d'idéaux ponctuels de fonctions holomorphes. Comme Cartan le note en 1950, « (...) avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement » ([7] p.30). C'est ici qu'il introduit la notion abstraite de cohérence :

Définition. Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier $\geqslant 1$ donné une fois pour toute. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module M_x (à q dimensions) de fonctions holomorphes au point x. Nous disons que les modules ponctuels M_x forment un système cohérent, si tout point a de E possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $V \cap E$, engendre le module ponctuel M_x. ([5] p.156)

En 1944, Cartan reconnaît qu'il n'a pas réussi à démontrer la cohérence de ce que nous nommerions le faisceau des relations entre un nombre fini de fonctions holomorphes dans un domaine ([5] p.160). Ces questions de cohérence s'imposent comme un chantier prioritaire : la cohérence du faisceau associé à une sous-variété analytique est démontrée par Cartan en 1950 [7] ; celle du faisceau des relations par Oka [23]. Dans ce dernier article (rédigé en 1948 par Oka alors qu'il connaissait l'article de Cartan de 1940 mais pas celui de 1944) contient la version « Oka » de la structure introduite par Cartan : celle d'« idéal holomorphe de domaines indéterminés ».

Fibrés, faisceaux

À partir de 1945 les questions de topologie algébrique passent au premier plan dans les travaux de Cartan, sans interaction directe avec le programme de recherche en théorie globale des idéaux de fonctions holomorphes. L'article *Méthodes modernes en topologie algébrique* [6] marque cette réorientation ; les deux traits « modernes » soulignés par Cartan sont d'une part le recours à l'homologie de Čech – qui permet de définir des invariants pour des espaces topologiques à partir de recouvrements ouverts, sans passer par des complexes et des triangulations – et, d'autre part, la formulation d'un unique théorème central algébrique en termes de suite exacte longue de groupes[7].

[7] Le terme de « suite exacte longue » est anachronique. Il n'y a pas non plus de flèches dans la présentation de Cartan en 1945 : il décrit une « suite de représentations canoniques... $\Gamma^r(F), \Gamma^r(E), \Gamma^r(U), \Gamma^{r-1}(E), \Gamma^{r-1}(E)$... » (où $U = E - F$) et explique le lien, pour trois groupes consécutifs, entre des images et des éléments annulés ([6] p.6).

Les problèmes de Cousin ne demeurent pas entièrement intouchés par la vague topologique, mais la première rencontre réelle n'est peut-être pas celle qu'on imagine. Dans une conférence de 1950 à l'ICM sur les *Problèmes globaux dans théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Cartan présente une nouvelle formulation de Cousin 2 :

Une donnée de Cousin dans B définit un nouvel espace topologique E que voici : un point de E sera, par définition, un couple (z, f) formé d'un point z de B et d'un élément générateur f de l'idéal principal I_z attaché au point z ; on identifiera les couples (z, f) et (z', f') si $z = z'$ et si le quotient f/f' (qui est holomorphe et $\neq 0$ au point z) est égal à un au point z. Faisons opérer, dans cet espace E, le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$. (...) Dans le langage de la topologie moderne, E est un espace fibré principal, de groupe $\mathbf{C}^*$, ayant B pour base. L'hypothèse selon laquelle les idéaux I_z forment un système cohérent exprime que chaque fibre possède un voisinage isomorphe au produit $U \times \mathbf{C}^*$ d'un ensemble ouvert U de B par la fibre $\mathbf{C}^*$; ceci permet de définir, sur E, une structure de variété analytique-complexe. (...) On voit aussitôt qu'une solution du problème de Cousin définit une section analytique de cet espace fibré. (...) Ainsi, pour que le problème de Cousin ait une solution (...) notre espace fibré E doit être trivial ; ([8] p.161)

Quoique cette structure d'espace fibré principal ait été introduite par Ehresmann et Feldbau quelques années auparavant [14], c'est à André Weil que Cartan doit cette reformulation de problèmes classiques au moyen de la notion de fibré. C'est du côté de la géométrie algébrique que Weil commençait à introduire systématiquement les structures de fibré (la variété de base étant munie de la topologie de Zariski) pour reformuler des problèmes classiques et établir des ponts avec la topologie. On en trouve une trace dans la conférence de 1949 intitulée *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* [29]. Notons que dans cette formulation du problème de Cousin, la notion de *solution* redevient la notion classique : on cherche une fonction (maintenant vue comme section d'un fibré) et non un idéal de l'anneau des fonctions globales. Autre avantage : l'existence d'une question purement topologique sous-jacente à la question analytique apparaît ici en toute clarté.

Ce n'est qu'un peu plus tard qu'a lieu la rencontre réelle avec la cohomologie des faisceaux[8]. On doit constater que le programme de recherche sur les idéaux de domaines indéterminés ne se coulait pas directement dans le cadre de la cohomologie des faisceaux. Quelque « structural » qu'il ait été, le cadre proposé par Cartan en 1940-44 n'introduisait aucune notion de morphisme entre modules analytiques ; aucune notion d'image, de noyau ou de quotient n'intervenait, ne serait-ce que dans la définition du faisceau des relations. On peut faire l'hypothèse suivante : l'introduction d'anneaux ou de modules quotients aurait fait quitter le sol « concret » des familles de « vraies » fonctions, qui, dans la théorie de 1940-44, sont les éléments des idéaux et modules. Du côté des faisceaux c'est déjà le schéma général de mesure de l'inexactitude à droite du foncteur des sections qui organise l'exposé, comme

8 Il ne peut être question de retracer ici en quelques lignes l'histoire des débuts de la cohomologie des faisceaux sur la période 1945-1952 ; nous renvoyons aux études de référence sur ce point ([15], [18], [19]). Par ailleurs, soulignons que le choix du travail de Henri Cartan comme fil directeur de la narration nous conduit à passer sous silence les travaux allemands de la même période, en particulier ceux de K. Stein.

on le voit dans le séminaire Cartan de 1950-51, consacré aux cohomologies des groupes et des faisceaux.

Des extraits de la correspondance entre Cartan et Serre montrent le lien en train de se faire, au printemps 1952. Dans une lettre datée du 30 avril 1952 ([27] p.278), Serre reformule les problèmes de Cousin au moyens des faisceaux (de modules) des fonctions holomorphes et méromorphes, ainsi que des faisceaux (de groupes multiplicatifs) des fonctions holomorphes (inversibles) et méromorphes (non nulles). Il énonce la condition de résolubilité de Cousin 1 et 2 en termes d'annulation de certains H^1 et énonce encore comme une conjecture l'annulation des H^n $(n \geqslant 2)$ du faisceau structural pour un domaine d'holomorphie. Le truc classique consistant à utiliser une exponentielle pour relier les deux problèmes de Cousin est aussi repris sous forme de suite exacte, les aspects purement topologique étant capturés dans $H^2(X, \mathbf{Z})$.

Ces conjectures sont devenues des théorèmes lorsque Cartan et Serre rédigent à l'automne 1952 les derniers exposés du séminaire Cartan consacré aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Le théorème A consiste en une reformulation dans le langage des faisceaux (mais pas de la *cohomologie* des faisceaux) du principal résultat du programme né en 1940 :

Théorème A. Soit X une variété de Stein[9], ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors, pour tout point $x \in X$, l'image, dans le O_x-module I_x, du module des sections $H^0(X, I)$, engendre I_x pour sa structure de module sur O_x. ([10] p.7)

Quoique ce soient les mêmes outils mis au point par Cartan qui permettent de démontrer le théorème B, l'idée de travailler au-delà de H^1 semble être celle de Serre :

Théorème B. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors les modules de cohomologie $H^q(X, F)$ sont nuls pour tout entier $q \geqslant 1$. ([10] p.7)

Dans l'exposé consacré aux applications de ces théorèmes, Serre reformule les problèmes de Cousin en termes de surjectivité de l'application entre espaces de sections globales d'un faisceau et d'un faisceau quotient : un classique « système de parties principales » est interprété comme une section du faisceau quotient $\mathbf{M}/\mathbf{O}$, où $\mathbf{M}$ est le faisceau des germes de fonctions méromorphes, et $\mathbf{O}$ faisceau structural ([26] p.2) ; un diviseur (non nécessairement positif) est interprété comme une section globale du faisceau quotient $\mathbf{G}/\mathbf{F}$, où $\mathbf{G}$ est le faisceau multiplicatif des germes de fonctions méromorphes, et $\mathbf{F}$ celui des germes de fonctions holomorphes inversibles ([26] p.11).

Dans cette rencontre entre les deux lignes de recherche – théorie des idéaux de fonctions analytiques d'une part, cohomologie des faisceaux d'autre part – il semble que la première apporte les questions et la seconde les réponses. Il faut toutefois souligner que c'est la première qui apporte la notion de cohérence, ainsi

9 Dans [9] : Après avoir défini la notion d'enveloppe d'holomorphie $\bar{K}$ d'un compact K, Cartan appelle variété de Stein une variété analytique complexe E, réunion dénombrable de compacts, et satisfaisant aux trois conditions : (α') « tout compact $K \subset E$ possède un voisinage ouvert V tel que l'intersection $V \cap \bar{K}$ soit compacte », (β) les fonctions holomorphes sur E séparent les points, (γ) tout point de E possède des coordonnées locales constituées par des éléments de $H(E)$, où $H(E)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur E.

que l'idée de changement d'anneau de base associé à un changement d'ouvert ; on voit l'importance de cette rencontre pour les développements ultérieurs de la géométrie algébrique.

Concluons sur une note humoristique. Cartan et Serre présentent leur nouvelle théorie lors du *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes*, à Bruxelles en mars 1953. R. Remmert rapporte qu'après avoir entendu leurs exposés, un auditeur allemand aurait commenté :

« Nous avons des arcs et des flèches ; les Français, eux, ont des tanks. » [10]

Références

[1] BEHNKE H., Stein K., 1937. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null und Polstellenflächen, Jahr. DM-V 47, 177-193.
[2] BOURBAKI N., 1948. L'architecture des mathématiques, in F. Le Lionnais (ed.) Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud, 1948. pp.35-47.
[3] CARTAN H., 1934. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, Compt. Rend. Acad. Sci. 199, 1284-1287.
[4] CARTAN H., 1940. Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, Jour. Math. Pures Appl. 19, 1-26.
[5] CARTAN H., 1944. Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Sci. ÉNS 61 3e série, 149-197.
[6] CARTAN H., 1945. Méthodes modernes en topologie algébrique, Com. Math. Helv. 18, 1-15.
[7] CARTAN H., 1950. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. SMF 78, 29-64.
[8] CARTAN H., 1950. Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. ICM (Cambridge Mas. 30.8-6.9 1950), AMS, Providence (R.I)., 1952. pp.152-164.
[9] CARTAN H., 1951-52. Théorie de la convexité (II), Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52, exposé 9.
[10] CARTAN H., 1951-52. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein, Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52, exposé 18.
[11] CHORLAY R., 2007. L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953), Thèse d'histoire des mathématiques, Université Denis Diderot, Paris, 2007.
[12] CHORLAY R., 2009. From Problems to Structures : The Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept, Archive for History of Exat Sciences, à paraître.
[13] COUSIN P., 1895. Sur les fonctions analytiques de *n* variables complexes, Acta Math. 19, 1-61.
[14] EHRESMANN C., 1941. Espaces fibrés associés, Compt. Rend. Acad. Sci. 213, 762-764.
[15] GRAY JOHN, 1979. Fragments in the History of Sheaf Theory, in M.P. Fourman, C.J Mulvey, D.S. Scott (eds.), Application of Sheaves, London Mathematical Society - Springer, NY, 1979. pp.1-79.
[16] GRONWALL T., 1917. On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, Trans. AMS 18, 50-64
[17] HILTON P., HIRZEBRUCH F., REMMERT R. (EDS.), 1991. Miscellanea Mathematica, Springer, Berlin, 1991.
[18] HOUZEL C., 1990. A Short History : les débuts de la théorie des faisceaux, in M. Kashiwara, P. Schapira, Sheaves on Manifolds, Springer, New-York, 1990. pp. 7-22.
[19] HOUZEL C., 1998. Histoire de la théorie des faisceaux, in SMF, Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle, Séminaires et Congrès 3, Paris, 1998. pp.101-119.
[20] OKA K., 1936. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, Journal of Science of the Hiroshima University 6, 245-255
[21] OKA K., 1937. Domaines d'holomorphie, Journal of Science of the Hiroshima University 7, 115-130

[10] *« Wir haben Pfeil une Bogen, die Franzosen haben Panzer »* ([16] p.277)

[22] Oka K., 1939. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables III. Deuxième problème de Cousin, Journal of Science of the Hiroshima University 9, 7-19
[23] Oka K., 1950. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VII. Sur quelques notions arithmétiques, Bull. SMF 78, 1-27
[24] Osgood W., 1901. Analysis der komplexen Grössen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Grössen, Encyclopädie der mathematischen Wisenschaften II.2 (1921-1928), Leipzig, Teubner, 1901-1921. pp.1-114
[25] Poincaré H., 1883c. Sur les fonctions de deux variables, Compt. Rend. Acad. Sci. 96, 238-240
[26] Serre J.-P., 1951-52. Application de la théorie générale à divers problèmes globaux, Sem. Cartan, É.N.S Paris, 1951-52, exposé 20.
[27] Serre J.-P., 1991. Les petits cousins (lettres à H. Cartan, 1950-1953), in [Hilton et alii 1991] p.278-291.
[28] Weil A., 1932. Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, Compt. Rend. Acad. Sci. 194, 1304-1305.
[29] Weil A., 1949. Fibre-spaces in Algebraic Geometry, Algebraic Geometry Conference (mimeographed), University of Chicago, 1949. pp.55-59 = Œuvres Scientifiques I (1926-1951), Springer, New-York, 1979. p. 411-413.

Divers aspects des opérations de Steenrod[1]

Jean Lannes

à Henri Cartan

Dans les deux premiers paragraphes on analyse les structures de l'homologie et de la cohomologie singulières à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_2$ (attention le deuxième est un peu technique !). Au troisième on montre les opérations de Steenrod en action dans deux questions de topologie algébrique, le problème de l'invariant de Hopf un et la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques. Dans le dernier paragraphe on traite brièvement de la définition des opérations de Steenrod et de la démonstration de leurs propriétés essentielles.

1. Structure de l'homologie singulière

Le foncteur « n-ième groupe d'homologie » H_n, $n \in \mathbb{N}$, associe à un espace topologique X un groupe abélien H_nX et à une application continue entre espaces topologiques $f : X \to Y$ (ou plutôt à une classe d'homotopie d'une telle application) un homomorphisme de groupes abéliens $f_* : \mathrm{H}_nX \to \mathrm{H}_nY$.

Soit k un anneau commutatif ; on introduit plus généralement des foncteurs $\mathrm{H}_n(X; k)$ et $\mathrm{H}^n(X; k)$ (appelés respectivement groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans k) à valeurs dans la catégorie des k-modules. Si le groupe additif de k est sans torsion, on a $\mathrm{H}_n(X; k) = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_nX$; si k est un corps le k-espace vectoriel $\mathrm{H}^n(X; k)$ est dual du k-espace vectoriel $\mathrm{H}_n(X; k)$.

On note $\mathrm{H}^*(X; k)$ le k-module gradué $\{\mathrm{H}^n(X; k)\}_{n\in\mathbb{N}}$. En fait $\mathrm{H}^*(X; k)$ possède une structure plus riche que celle de k-module gradué : c'est une k-algèbre graduée

[1] Ce texte a déjà été publié à l'occasion de la journée annuelle 1997 de la SMF consacrée à Henri Cartan.