Laure Saint-Raymond reçoit un prix de la Société Mathématiques Européenne

Isabelle Gallagher, François Golse

À moins de trente-quatre ans, Laure Saint-Raymond est l'une des mathématiciennes les plus actives de sa génération. Lauréate de l'un des prix de la Société Mathématique Européenne décernés au Congrès Européen de Mathématiques en 2008, elle vient de recevoir tout récemment le Ruth Lyttle Satter Prize de l'American Mathematical Society.

Elle est actuellement Professeur à l'École Normale Supérieure de Paris, après avoir été Chargée de Recherches au CNRS de 2000 à 2002, et Professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie de 2002 à 2007. Ses travaux portent sur deux thèmes bien distincts des équations aux dérivées partielles : d'une part l'étude des modèles cinétiques pour les gaz et les plasmas, et d'autre part l'analyse de modèles de la mécanique des fluides intervenant en géophysique. Ses contributions à l'un et l'autre de ces deux sujets ont été décisives, et nous allons essayer d'en donner une idée.

Le problème de la cohérence entre les équations classiques de la mécanique des fluides (c'est-à-dire des équations d'Euler ou de Navier-Stokes) et l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz s'est posé très tôt. Mentionné explicitement dans les articles fondateurs de Maxwell et de Boltzmann sur le sujet, il sera formalisé par Hilbert qui le cite en exemple d'axiomatisation des lois de la physique dans son sixième problème (1900), et en propose une première approche mathématique (dans une variante linéarisée), comme application de ses travaux sur les équations intégrales (1912). La stratégie de Hilbert ne sera d'ailleurs complètement mise en œuvre qu'en 1980 par Caflisch, qui démontre que toute solution régulière locale en temps des équations d'Euler de la dynamique des gaz parfaits monoatomiques est limite d'une suite de solutions de l'équation de Boltzmann dans la limite où le libre parcours moyen des molécules est petit devant les distances typiques de l'écoulement ainsi modélisé. Malheureusement, cette stratégie n'est envisageable que dans la phase de régularité de l'écoulement limite décrit par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Or, dans le cas des équations d'Euler des fluides compressibles, on sait depuis les travaux de Sideris (1986) que les solutions régulières développent en général des singularités au bout d'un temps fini. Dans le cas des équations d'Euler ou de Navier-Stokes en régime incompressible et en dimension d'espace égale à trois, le même problème est, à ce jour, encore ouvert.

En revanche, il existe, pour certaines équations de la mécanique des fluides, des solutions faibles (au sens des distributions) définies globalement. Dans le cas des équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles en dimension trois, l'existence globale de solutions faibles fut démontrée par Leray en 1934 ; pour ce qui est de l'équation de Boltzmann, R. DiPerna et P.-L. Lions obtinrent, en 1990, l'existence globale de solutions faibles – en un sens toutefois un peu différent des solutions au sens des distributions. L'analogie entre les deux constructions est frappante : par exemple, le théorème H de Boltzmann, qui n'est rien d'autre que le second principe de la thermodynamique dans le contexte de la théorie cinétique des gaz, joue, dans la construction de DiPerna-Lions, un rôle analogue à celui de la conservation de l'énergie dans l'argument de Leray. Il était donc naturel de poser le problème étudié par Hilbert dans ce cadre – c'est-à-dire de montrer que les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes en régime incompressible s'obtiennent comme limites de solutions au sens de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann dans un certain régime asymptotique. Ce régime correspond à des écoulements gazeux à vitesse très faible devant la vitesse du son, pour lesquels le mouvement peut être considéré comme approximativement incompressible. Les solutions de Leray et de DiPerna-Lions n'étant a priori que des solutions faibles, on ne peut leur appliquer la stratégie proposée par Hilbert. C'est pourquoi un programme reposant sur des méthodes de compacité fut proposé à la fin des années 1980 pour démontrer la convergence des solutions de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann vers les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes ; les différentes étapes de ce programme furent réalisées au cours des années 1990 par différents auteurs. Mais un dernier obstacle demeurait, à savoir l'éventualité d'une accumulation, dans le processus de limite vers l'hydrodynamique, de particules de vitesses arbitrairement grandes. Cette dernière difficulté paraissait considérable, car les seules estimations dont on dispose sur les solutions, découlant du théorème H de Boltzmann, ne permettent pas de contrôler ce phénomène. En 2000, Laure Saint-Raymond proposa, pour y parvenir, un argument reposant sur les propriétés de dispersion de l'opérateur de transport, et sur le terme de production d'entropie. La mise en œuvre de cet argument dans le cas de l'équation de Boltzmann aboutit finalement en 2004 à une démonstration complète de la limite hydrodynamique, valable globalement en temps, et robuste à des pertes éventuelles de régularité des solutions.

Décrivons à présent sommairement les travaux de Laure Saint-Raymond dans le domaine des fluides géophysiques. Le programme qu'elle développe avec divers collaborateurs consiste à tenter de traduire en termes mathématiques puis en théorèmes, certains résultats connus des physiciens et océanographes et obtenus par des raisonnements heuristiques reposant sur des expériences physiques ou numériques ; un objectif à plus long terme étant de permettre d'approfondir leur propre connaissance et leur compréhension des modèles, afin d'améliorer par exemple leurs prévisions de phénomènes exceptionnels. Il s'agit là d'un vaste programme, les difficultés se situant tout d'abord dans la compréhension profonde des phénomènes physiques en question, puis dans leur formulation mathématique, et enfin dans l'énoncé et la démonstration de théorèmes pouvant ensuite être présentés à des physiciens (et susceptibles de les intéresser, donc dans des cadres physiques réalistes, et qui peuvent effectivement conduire à une compréhension nouvelle des phénomènes en question).

Donnons un exemple : on imagine sans peine que les équations régissant le mouvement des océans sur la planète sont extrêmement complexes et font intervenir de nombreux paramètres. Afin d'étudier ces équations (c'est-à-dire de montrer qu'elles possèdent effectivement des solutions, d'analyser leur stabilité par rapport aux paramètres ou à des perturbations, de connaître leur comportement qualitatif), il convient tout d'abord de les simplifier en identifiant et en isolant les caractéristiques principales permettant de décrire la dynamique de manière satisfaisante. Une analyse formelle des ordres de grandeur des différents paramètres permet ainsi par exemple, dans le cas d'une analyse à grande échelle du mouvement, de réduire les équations à un système d'équations aux dérivées partielles du même type que les équations de Navier-Stokes. Un travail mathématique important consiste alors à justifier ces simplifications, en démontrant que la solution de l'équation approchée possède bien une dynamique comparable à celle du système de départ. Cette question est en général extrêmement difficile, et pour la plupart des modèles utilisés par les physiciens ou océanographes, elle n'est pas résolue. Par rapport aux classiques équations de Navier-Stokes, les équations simplifiées des océans possèdent plusieurs facteurs caractéristiques, dus à la faible profondeur de l'océan par rapport à son étendue horizontale (à grande échelle), au forçage par le vent à l'interface avec l'atmosphère, et à l'effet de la force de Coriolis (les équations étant posées dans un repère en rotation : la Terre). Chacune de ces caractéristiques a une influence propre sur la dynamique, qui est susceptible d'expliquer certains phénomènes observés dans les océans. Par exemple, à des latitudes moyennes il est connu des physiciens (il s'agit d'un célèbre résultat dû à Taylor et Proudman au dix-neuvième siècle) que les particules de fluide tendent, sous l'effet de la force de Coriolis, à s'organiser en colonnes verticales et ainsi le mouvement tend à se stratifier et à ne plus dépendre de la variable de profondeur. Lorsque l'on se rapproche de l'équateur, l'effet de la force de Coriolis s'amoindrit, et de nouvelles structures et de nouveaux courants apparaissent. L'une des contributions récentes de Laure Saint-Raymond et de ses co-auteurs a été de mettre en évidence de manière rigoureuse la présence d'ondes nouvelles provoquées par ces variations de l'amplitude de la force de Coriolis, et à analyser leurs interactions avec les autres ondes présentes dans les océans (en montrant que ces ondes sont essentiellement découplées). Aux environs de l'équateur, il est également établi heuristiquement par les océanographes qu'il existe des zones de recirculation et des zones de ventilation : plus précisément dans certaines zones de l'océan, sous l'effet d'un vent suffisamment fort à la surface de l'eau, ces nouvelles ondes se retrouvent piégées. Dans un travail en cours, Laure Saint-Raymond a formalisé mathématiquement ce phénomène (sous forme de l'analyse microlocale du front d'onde des solutions) et ce piégeage a pu être mis en évidence par des techniques empruntées à la fois à l'optique géométrique et aux systèmes dynamiques.

Les travaux de Laure Saint-Raymond témoignent de la variété et de la profondeur des problèmes mathématiques que posent la mécanique des fluides et la physique statistique, auxquels elle a apporté des contributions remarquables.