

# PRIX ET DISTINCTIONS

---

## Laurent Bienvenu, prix Gilles Kahn 2008

Christian Retoré

---

Le prix de thèse de Specif<sup>1</sup> a été créé en 1998 pour récompenser chaque année une excellente thèse en informatique. Gilles Kahn (1946-2006) a présidé les trois premiers jurys du prix, étant convaincu de l'intérêt de promouvoir les jeunes talents les plus prometteurs de la science informatique. En son honneur, le prix a pris depuis 2007 le nom de Prix de thèse Gilles Kahn et il est patronné par l'Académie des Sciences qui rend ainsi hommage à un de ses membres éminents.

Le jury du millésime 2008, présidé par Antoine Petit, a attribué le prix Gilles Kahn 2008 à Laurent Bienvenu pour sa thèse intitulée : « *Game-theoretic characterizations of randomness : unpredictability and stochasticity* », effectuée à Marseille au Laboratoire d'Informatique Fondamentale (Université de Provence et CNRS) sous la direction de Bruno Durand et d'Alexander Shen.

Afin d'en dire quelques mots, imaginons deux personnes tirant à pile (P) ou face (F) dix mille fois. Le premier obtient la suite PFFFFFFF... (« dix milles fois P »), tandis que l'autre obtient une suite de type PFFPPFFFFPF... Si la théorie des probabilités affirme que ces deux suites avaient a priori la même probabilité de survenir, notre intuition nous dit en revanche qu'a posteriori la seconde semble plus « aléatoire » que la première. Comment formaliser cette intuition ? Une réponse satisfaisante fut donnée dans les années 1960 par Chaitin et Kolmogorov : la première suite ci-dessus n'est pas aléatoire car elle est simple, dans le sens où elle admet une description courte (« dix mille fois P »), où « description » s'entend au sens algorithmique du terme. Ainsi, on définit la complexité de Kolmogorov d'un objet discret fini comme étant la taille du plus petit programme informatique qui l'engendre, les objets non-aléatoires étant alors définis comme ceux de petite complexité de Kolmogorov.

Pour les objets infinis, outre l'approche par la complexité de Kolmogorov, d'autres formalisations de la notion d'aléatoire sont possibles. Celle de Martin-Löf définit comme aléatoire un objet passant tous les tests statistiques calculables par algorithme, tandis que celle de Mises-Schnorr privilégie une définition par les jeux, où un objet est aléatoire si aucune stratégie calculable ne permet de le prédire de façon satisfaisante (l'objet, tel qu'une suite infinie de P et F, étant initialement caché).

La thèse de Laurent Bienvenu est une contribution à l'étude des liens entre ces trois approches (complexité de Kolmogorov, tests, jeux), où le point de vue « jeux » est privilégié. Dans un premier temps, il montre comment classer les

---

<sup>1</sup> Société des Personnels Enseignants et Chercheurs en Informatique de France

objets non-aléatoires en fonction de la vitesse des gains des stratégies les prédisant. Il montre également comment un gain de stratégie peut s'interpréter comme une compression de données, et donne à la lumière de ce résultat une série de théorèmes reliant aléatoire et incompressibilité. Son étude porte également sur les interactions de la théorie algorithmique de l'aléatoire avec les mathématiques « classiques », bien évidemment la théorie des martingales, mais aussi des théorèmes comme le théorème de Kakutani (concernant les mesures de probabilité de Bernoulli), le lemme de Fatou, ou encore le théorème de Radon-Nikodym.

Ces questions, bel exemple du lien entre mathématiques et informatique, seront abordées dans un prochain numéro de la *Gazette*.

## Cédric Villani reçoit un prix de la Société Mathématique Européenne

Laurent Desvillettes, Alessio Figalli

---

### Parcours de Cédric Villani

Cédric Villani est âgé de 35 ans, il est professeur de mathématiques à l'ÉNS Lyon depuis 2000, après avoir été élève puis agrégé-préparateur à l'ÉNS Ulm. Il est membre de l'IUF (junior) depuis 2006.

Il a été Conférencier invité à l'ICM 2006, et a obtenu les distinctions suivantes :

- Prix Louis-Armand (2001)
- Cours Peccot (2003)
- Harold Grad Lecture (2004)
- Prix Jacques Herbrand (2007)
- Prix de la SME (2008)

### De la conjecture de Cercignani à l'hypocoercivité

L'analyse du comportement en temps long des systèmes dissipatifs (du type équations aux dérivées partielles ou équations intégrales) repose, lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle de Lyapounov  $H$  (ou entropie) qui prend son minimum en 0 (en un unique point appelé équilibre), et de sa dissipation  $D$ , sur des inégalités fonctionnelles (parfois dites de coercivité) du type

$$(1) \quad \forall f \in F, \quad D(f) \geq \Phi(H(f)).$$

Ici,  $F$  est un ensemble (de fonctions) stable par le flot du système dissipatif considéré, et la vitesse de convergence vers l'équilibre de la solution  $t \mapsto f(t)$  du système sera d'autant plus rapide que  $\Phi$  a une forte croissance en 0.

On sait par exemple depuis les années 70 démontrer la convergence exponentiellement rapide vers l'équilibre de nombreuses équations paraboliques de type Fokker-Planck, grâce à l'inégalité de Sobolev logarithmique (dans (1),  $D$  est dans

ce cas l'information de Fisher relative à une gaussienne, et  $H$  l'information de Kullback relative à la même gaussienne), cf. [18].

La conjecture de Cercignani (cf. [3]) consistait à obtenir (1) lorsque  $H$  et  $D$  étaient l'entropie et la dissipation d'entropie relatives au noyau de Boltzmann (avec une section efficace bien choisie),  $F$  étant l'ensemble des fonctions dont la masse, l'impulsion et l'énergie étaient fixés, et  $\Phi$  étant une fonction linéaire. Le noyau de Boltzmann (noté  $Q(f)$ ) est un opérateur intégral non linéaire qui décrit l'effet des collisions élastiques binaires sur la distribution en vitesse des molécules dans un gaz raréfié monoatomique (cf. [7]).

Bien que certains contre-exemples montraient que pour beaucoup de sections efficaces (incluant la plupart des sections efficaces rencontrées dans la physique), la conjecture ne pouvait être vraie [8], des résultats positifs se rapprochant de la conjecture furent obtenus tout au long des années 90, en particulier grâce aux travaux de E. Carlen et M.C. Carvalho (qui montrent que (1) est valable pour certains  $\Phi$  dans le cas de l'opérateur de Boltzmann), (cf. [6]), puis de L. Desvillettes et C. Villani, qui démontrent la conjecture pour le noyau de Landau (avec la section efficace des molécules maxwelliennes), (cf. [11]), et enfin de G. Toscani et C. Villani, qui démontrent (1) dans le cas du noyau de Boltzmann avec  $\Phi$  « presque linéaire » dans le cas de sections efficaces réalistes (cf. [34]).

La démonstration de ce dernier résultat est très surprenante et élégante, car elle utilise le résultat obtenu pour le noyau de Landau, ainsi que le flot de l'équation de Fokker-Planck linéaire (qui sont des objets faisant intervenir des dérivées) alors que les objets intervenant dans l'estimation finale sont purement intégraux.

Dans un article qui clarifie l'ensemble des approches précédentes, C. Villani montre enfin qu'en fait la conjecture de Cercignani est vérifiée dans le cas de sections efficaces particulières (non physiques), et qu'elle est « presque » vérifiée dans tous les cas d'intérêt physique (cf. [36]).

Au début des années 2000, la preuve de la conjecture de Cercignani permettait de bien comprendre le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann spatialement homogène (i.e. lorsque toutes les molécules d'un gaz raréfié ont la même distribution de vitesses en chaque point de l'espace). Par contre, le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann complète, qui s'écrit

$$(2) \quad \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f),$$

où  $f := f(t, x, v)$  est la densité de molécules d'un gaz raréfié (monoatomique) qui au temps  $t$  et au point  $x$  (dans un domaine borné) possèdent la vitesse  $v$ , restait presque complètement inconnu.

La méthode d'étude qui repose sur les inégalités de coercivité telles que (1) était inopérante pour des équations du type (2) car la dissipation d'entropie  $D$  ne contrôlait pas le comportement de  $f$  par rapport à la variable  $x$ . L'existence d'un équilibre unique était néanmoins assurée grâce à un calcul de H. Grad datant des années 60 (cf. [17]), qui utilise de manière astucieuse le terme non coercif  $v \cdot \nabla_x f$  (sauf dans des géométries très spécifiques liées à l'invariance galiléenne). On se trouvait donc vis-à-vis du comportement en temps long dans une situation semblable à celle des opérateurs hypoelliptiques vis-à-vis de la régularité. Le terme d'hypo-coercivité apparaîtrait peu après du fait de cette analogie.

Un premier travail, réalisé par L. Desvillettes et C. Villani au début des années 2000 pour le cas très simplifié dans lequel  $Q$  était remplacé par un opérateur du type Fokker-Planck (donc linéaire), permettait de mettre en place une méthode reposant sur l'étude d'un système d'inéquations différentielles permettant d'obtenir la convergence « plus rapide que toute puissance négative » (ce que l'on note parfois  $O(t^{-\infty})$ ) vers l'équilibre (cf. [12]). Ce travail a depuis été largement amélioré par B. Helffer et F. Nier ainsi que F. Hérau et F. Nier d'une part (qui ont développé des méthodes reposant sur les Laplaciens de Witten) (cf. [20] and [21]), et C. Villani d'autre part (dans le cadre de la mise en place des bases de la théorie de l'hypocoercivité dans le cas linéaire) (cf. [35]).

De nombreuses améliorations techniques ont permis au milieu des années 2000 d'obtenir un résultat équivalent de convergence en  $O(t^{-\infty})$  vers l'équilibre dans le cas où  $Q$  est le véritable opérateur de Boltzmann, sous réserve que les solutions considérées soient régulières (par exemple pour les solutions perturbatives de Y. Guo) (cf. [14]). Ce résultat peut être vu comme une version quantitative des calculs de H. Grad, il utilise également une version raffinée des inégalités de Korn (qui relie la distance à une rotation rigide au gradient symétrisé d'un champ de  $\mathbf{R}^3$  dans  $\mathbf{R}^3$ ) (cf. [13]). L'interprétation physique de ce résultat est la suivante : un gaz raréfié (monoatomique) confiné dans une boîte (avec des conditions de réflexion spéculaire au bord) relaxe « plus rapidement que toute puissance négative » vers son état d'équilibre (une maxwellienne indépendante du point de l'espace considéré sauf dans quelques cas non génériques que l'on peut décrire).

Les conditions dans lesquelles apparaît l'hypocoercivité ont depuis été formalisées par C. Villani (cf. [35]) ainsi que par C. Mouhot et L. Neumann (cf. [28]), en particulier dans le cadre linéaire. Le cas non-linéaire, beaucoup plus complexe, reste imparfaitement connu et continue de faire l'objet de recherches intenses. Il est à présent possible de se passer du système d'inéquations différentielles et de raisonner directement sur les opérateurs dont un certain nombre de propriétés abstraites doivent être vérifiées : il s'agit là d'une avancée cruciale que les travaux de C. Villani ont précipitée.

C. Villani a sans aucun doute joué un rôle décisif dans l'émergence de la théorie de l'hypocoercivité, qui dépasse maintenant largement le cadre des seules équations cinétiques. De même son apport avait été essentiel lors de l'établissement des inégalités de coercivité reliées à la conjecture de Cercignani dans les années 90. Enfin les questions d'entropie n'épuisent pas les contributions de C. Villani à la théorie cinétique : celui-ci a également marqué l'étude des questions de régularité et d'existence en particulier grâce à des articles en collaboration avec R. Alexandre, L. Desvillettes et B. Wennberg (cf. [2]) d'une part, et R. Alexandre d'autre part (cf. [1]).

### Transport optimal

Après les travaux fondateurs de Brenier à la fin des années 80, le transport optimal a été un domaine de recherche très actif, dans lequel Cédric Villani a joué un rôle très important. Son intérêt s'est porté sur plusieurs points de la théorie.

Dans [30], en collaboration avec Otto, il s'est intéressé aux liens entre les équations de diffusion et le problème du transport, en essayant surtout d'utiliser le transport optimal et le point de vue de Otto (qui avait étudié les équations de

la chaleur et des milieux poreux en les voyant comme un flot gradient par rapport à la distance de Wasserstein [29]) pour étudier des inégalités du type Sobolev (en particulier les inégalités de Sobolev logarithmiques) et pour démontrer des résultats de convergence vers l'équilibre pour des équations aux dérivées partielles de type diffusion. Cet article a été un point de départ pour deux directions de recherche : d'abord c'est la première fois que des inégalités « de type Sobolev » (autres que l'isopérimétrique) apparaissent en connexion avec le transport, et en un certain sens cet article a annoncé beaucoup des développements qui ont suivi par la suite. De plus, toujours pour la première fois, la courbure de Ricci apparaît dans le transport optimal. Ces lignes de recherche ont été toutes deux développées par Villani.

Dans un papier avec Cordero-Erausquin et Nazaret [10], il utilise le transport optimal pour démontrer des inégalités de Sobolev et Gagliardo-Nirenberg optimales sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette approche, simple et efficace, permet aussi de traiter les cas d'égalité et peut être généralisée au cas où on change la norme euclidienne en n'importe quelle autre norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

Concernant les liens entre transport optimal et courbure de Ricci, Otto et Villani [30] et d'autres auteurs [9, 31] avaient montré que le transport optimal sur une variété (et plus particulièrement les propriétés des géodésiques dans l'espace des mesures de probabilité avec la distance de Wasserstein) avait un lien très fort avec la courbure de Ricci de la variété. Ce fait a été le point de départ pour Lott et Villani [26] et Sturm [32, 33] pour développer une théorie de la courbure de Ricci sur les espaces métriques (voir aussi [22]). L'idée est que des bornes par au-dessous sur la courbure de Ricci peuvent être exprimées en terme de certaines inégalités de convexité pour des fonctionnelles sur l'espace de mesure de probabilité. Alors ces inégalités deviennent le point de départ pour définir une notion de courbure de Ricci  $\geq K$  en dimension  $N$  (ce qui rappelle la notion de courbure-dimension à la Bakry-Émery). Cette notion est d'une part assez robuste pour être stable pour la convergence par Gromov-Hausdorff, et d'autre part assez forte pour démontrer des résultats non-triviaux, comme par exemple des inégalités de Sobolev, le théorème de Bishop-Gromov et aussi une version faible du théorème de Bonnet-Myers.

Plus récemment, Cédric Villani s'est intéressé à la régularité du transport optimal sur les variétés. En fait il est bien connu que la régularité du transport revient à étudier des équations du type Monge-Ampère, mais seulement récemment, après les papiers de Ma, Trudinger et Wang [27] et Loeper [23], on a découvert que : d'abord, la régularité du transport optimal sur une variété est très différente du cas de  $\mathbb{R}^n$  et la géométrie de la variété joue un rôle important ; ensuite, pour avoir la régularité, une condition nécessaire et (presque) suffisante est qu'une certaine combinaison des dérivées quatrièmes de la distance ait un signe (maintenant cette condition est appelée « MTW-condition »). Cette condition assez mystérieuse impose des restrictions très fortes sur la variété : elle implique que la courbure sectionnelle soit positive et dit aussi que la courbure ne peut pas « bouger trop vite ». Un modèle de variété qui satisfait à cette condition est la sphère  $n$ -dimensionnelle [24] et, en dimension 2, ses perturbations [15]. Cédric Villani s'est intéressé surtout à la stabilité de la condition de MTW, en montrant une stabilité « faible » de cette condition sous la convergence de Gromov-Hausdorff [39]. Enfin, dans un papier avec Loeper [25], il étudie les liens entre cette condition et la géométrie du cut-locus de la variété en arrivant à montrer que si une variété non-focale satisfait

à la condition de MTW, alors pour tout  $x \in M$  chaque cut-locus  $\text{cut}(x)$ , vu de  $T_x M$  grâce à l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine convexe. Ce résultat est le premier de ce type où on arrive à déduire une propriété géométrique aussi forte du cut-locus, et la découverte de ce lien a été un point de départ pour toute une théorie qui est encore en train d'être développée. Par exemple, en utilisant ce point de vue, Figalli et Rifford [15] ont démontré que, si on perturbe la métrique de la sphère 2-dimensionnelle, alors pour tout point  $x$  chaque cut-locus  $\text{cut}(x)$ , vu de  $T_x M$  grâce à l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine strictement convexe, ce qui est un résultat géométrique complètement nouveau. Ce résultat est poussé encore plus loin par Figalli, Rifford et Villani [16], où ils montrent la présence d'une connexion très forte en dimension 2 entre la condition de MTW et la convexité des lieux focaux.

On rappelle enfin que Villani a écrit deux livres très importants [37, 38], qui sont devenus des textes de référence pour les jeunes chercheurs qui se lancent dans le sujet, et qui mettent de l'ordre dans un domaine qui continue à se développer dans plusieurs directions.

## Références

- [1] ALEXANDRE R., AND VILLANI C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. *Comm. Pure Appl. Math.* 55, 1 (2002), 30–70.
- [2] ALEXANDRE R., DESVILLETES L., VILLANI C. AND WENNBERG B. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 152, (2000), 327–355.
- [3] BOBYLEV A. V., CERCIGNANI C. On the rate of entropy production for the Boltzmann equation *J. Statist. Phys.* 94, 3-4 (1999), 603–618.
- [4] BRENIER Y. Polar decomposition and increasing rearrangement of vector fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305, 19 (1987), 805–808.
- [5] BRENIER Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.* 44, 4 (1991), 375–417.
- [6] CARLEN E., AND CARVALHO M. Entropy production estimates for Boltzmann equations with physically realistic collision kernels. *J. Statist. Phys.* 74, 3-4 (1994), 743–782.
- [7] CERCIGNANI C. The Boltzmann equation and its applications. Springer, Berlin, 1988.
- [8] CERCIGNANI C. H-theorem and trend to equilibrium in the kinetic theory of gases. *Arch. Mech.* 34, (1982), 231–241.
- [9] CORDERO-ERAUSQUIN D., MCCANN R.J., AND SCHMUCKENSLAGER M. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Invent. Math.* 146, 2 (2001), 219–257.
- [10] CORDERO-ERAUSQUIN D., NAZARET B., AND VILLANI C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math.* 182, 2 (2004), 307–332.
- [11] DESVILLETES L., AND VILLANI C. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. *H*-theorem and applications. *Comm. Partial Differential Equations* 25, 1-2 (2000), 261–298.
- [12] DESVILLETES L., AND VILLANI C. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 54, 1 (2001), 1–42.
- [13] DESVILLETES L., AND VILLANI C. On a variant of Korn's inequality arising in statistical mechanics. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 8, (2002), 603–619 (electronic). A tribute to J.-L. Lions.
- [14] DESVILLETES L., AND VILLANI C. On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation. *Invent. Math.* 159, 2 (2005), 245–316.
- [15] FIGALLI A., AND RIFFORD L. Continuity of optimal transport maps on small deformations of  $\mathbb{S}^2$ . Preprint, 2008.

- [16] FIGALLI A., RIFFORD L., AND VILLANI C. On the stability of Ma-Trudinger-Wang curvature conditions. In preparation.
- [17] GRAD H. On Boltzmann's  $H$ -theorem. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 13, 1 (1965), 259–277.
- [18] GROSS L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.* 97, (1975), 1061–1083.
- [19] GUO Y. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 169, 4 (2003), 305–353.
- [20] HELFFER B., AND NIER F. In *Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Vol. 1862 of lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2005.
- [21] HERAU F., AND NIER F. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 171, 2 (2004), 151–218.
- [22] LEDOUX M. Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm. *Séminaire Bourbaki*, 2008.
- [23] LOEPER G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems. *Acta Math.*, to appear.
- [24] LOEPER G. Regularity of optimal maps on the sphere : The quadratic cost and the reflector antenna. Preprint, 2008.
- [25] LOEPER G., AND VILLANI C. Regularity of optimal transport in curved geometry : the nonfocal case. Preprint, 2008.
- [26] LOTT J., AND VILLANI C. Ricci curvature via optimal transport. *Ann. of Math.*, to appear.
- [27] MA X. N., TRUDINGER N. S., AND WANG X. J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 177, 2 (2005), 151–183.
- [28] MOUHOT C., AND NEUMANN L. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus *Nonlinearity* 19, (2006), 969–998.
- [29] OTTO F. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations* 26, 1-2 (2001), 101–174.
- [30] OTTO F., AND VILLANI C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal.* 173, 2 (2000), 361–400.
- [31] VON RENESSE M.-K., AND STURM K.T. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math.* 58, 7 (2005), 923–940.
- [32] STURM K.T. On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math.* 196, 1 (2006), 65–131.
- [33] STURM K.T. On the geometry of metric measure spaces. II. *Acta Math.* 196, 1 (2006), 133–177.
- [34] TOSCANI G., AND VILLANI C. Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Comm. Math. Phys.* 203, 3 (1999), 667–706.
- [35] VILLANI C. Hypocoercivity. *Memoirs Amer. Math. Soc.* (to appear).
- [36] VILLANI C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Commun. Math. Phys.* 234 (2003), 455–490.
- [37] VILLANI C. Topics in optimal transportation. *Graduate Studies in Mathematics*, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [38] VILLANI C. Optimal transport, old and new. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 338. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [39] VILLANI C. Stability of a 4th-order curvature condition arising in optimal transport theory. Preprint, 2008.

## Laure Saint-Raymond reçoit un prix de la Société Mathématiques Européenne

Isabelle Gallagher, François Golse

---

À moins de trente-quatre ans, Laure Saint-Raymond est l'une des mathématiciennes les plus actives de sa génération. Lauréate de l'un des prix de la Société Mathématique Européenne décernés au Congrès Européen de Mathématiques en 2008, elle vient de recevoir tout récemment le Ruth Lyttle Satter Prize de l'American Mathematical Society.

Elle est actuellement Professeur à l'École Normale Supérieure de Paris, après avoir été Chargée de Recherches au CNRS de 2000 à 2002, et Professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie de 2002 à 2007. Ses travaux portent sur deux thèmes bien distincts des équations aux dérivées partielles : d'une part l'étude des modèles cinétiques pour les gaz et les plasmas, et d'autre part l'analyse de modèles de la mécanique des fluides intervenant en géophysique. Ses contributions à l'un et l'autre de ces deux sujets ont été décisives, et nous allons essayer d'en donner une idée.

Le problème de la cohérence entre les équations classiques de la mécanique des fluides (c'est-à-dire des équations d'Euler ou de Navier-Stokes) et l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz s'est posé très tôt. Mentionné explicitement dans les articles fondateurs de Maxwell et de Boltzmann sur le sujet, il sera formalisé par Hilbert qui le cite en exemple d'axiomatisation des lois de la physique dans son sixième problème (1900), et en propose une première approche mathématique (dans une variante linéarisée), comme application de ses travaux sur les équations intégrales (1912). La stratégie de Hilbert ne sera d'ailleurs complètement mise en œuvre qu'en 1980 par Caflisch, qui démontre que toute solution régulière locale en temps des équations d'Euler de la dynamique des gaz parfaits monoatomiques est limite d'une suite de solutions de l'équation de Boltzmann dans la limite où le libre parcours moyen des molécules est petit devant les distances typiques de l'écoulement ainsi modélisé. Malheureusement, cette stratégie n'est envisageable que dans la phase de régularité de l'écoulement limite décrit par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Or, dans le cas des équations d'Euler des fluides compressibles, on sait depuis les travaux de Sideris (1986) que les solutions régulières développent en général des singularités au bout d'un temps fini. Dans le cas des équations d'Euler ou de Navier-Stokes en régime incompressible et en dimension d'espace égale à trois, le même problème est, à ce jour, encore ouvert.

En revanche, il existe, pour certaines équations de la mécanique des fluides, des solutions faibles (au sens des distributions) définies globalement. Dans le cas des équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles en dimension trois, l'existence globale de solutions faibles fut démontrée par Leray en 1934 ; pour ce qui est de l'équation de Boltzmann, R. DiPerna et P.-L. Lions obtinrent, en 1990, l'existence globale de solutions faibles – en un sens toutefois un peu différent des solutions au sens des distributions. L'analogie entre les deux constructions est frappante : par exemple, le théorème H de Boltzmann, qui n'est rien d'autre que le second principe de la thermodynamique dans le contexte de la théorie cinétique

des gaz, joue, dans la construction de DiPerna-Lions, un rôle analogue à celui de la conservation de l'énergie dans l'argument de Leray. Il était donc naturel de poser le problème étudié par Hilbert dans ce cadre – c'est-à-dire de montrer que les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes en régime incompressible s'obtiennent comme limites de solutions au sens de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann dans un certain régime asymptotique. Ce régime correspond à des écoulements gazeux à vitesse très faible devant la vitesse du son, pour lesquels le mouvement peut être considéré comme approximativement incompressible. Les solutions de Leray et de DiPerna-Lions n'étant a priori que des solutions faibles, on ne peut leur appliquer la stratégie proposée par Hilbert. C'est pourquoi un programme reposant sur des méthodes de compacité fut proposé à la fin des années 1980 pour démontrer la convergence des solutions de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann vers les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes ; les différentes étapes de ce programme furent réalisées au cours des années 1990 par différents auteurs. Mais un dernier obstacle demeurait, à savoir l'éventualité d'une accumulation, dans le processus de limite vers l'hydrodynamique, de particules de vitesses arbitrairement grandes. Cette dernière difficulté paraissait considérable, car les seules estimations dont on dispose sur les solutions, découlant du théorème H de Boltzmann, ne permettent pas de contrôler ce phénomène. En 2000, Laure Saint-Raymond proposa, pour y parvenir, un argument reposant sur les propriétés de dispersion de l'opérateur de transport, et sur le terme de production d'entropie. La mise en œuvre de cet argument dans le cas de l'équation de Boltzmann aboutit finalement en 2004 à une démonstration complète de la limite hydrodynamique, valable globalement en temps, et robuste à des pertes éventuelles de régularité des solutions.

Décrivons à présent sommairement les travaux de Laure Saint-Raymond dans le domaine des fluides géophysiques. Le programme qu'elle développe avec divers collaborateurs consiste à tenter de traduire en termes mathématiques puis en théorèmes, certains résultats connus des physiciens et océanographes et obtenus par des raisonnements heuristiques reposant sur des expériences physiques ou numériques ; un objectif à plus long terme étant de permettre d'approfondir leur propre connaissance et leur compréhension des modèles, afin d'améliorer par exemple leurs prévisions de phénomènes exceptionnels. Il s'agit là d'un vaste programme, les difficultés se situant tout d'abord dans la compréhension profonde des phénomènes physiques en question, puis dans leur formulation mathématique, et enfin dans l'énoncé et la démonstration de théorèmes pouvant ensuite être présentés à des physiciens (et susceptibles de les intéresser, donc dans des cadres physiques réalistes, et qui peuvent effectivement conduire à une compréhension nouvelle des phénomènes en question).

Donnons un exemple : on imagine sans peine que les équations régissant le mouvement des océans sur la planète sont extrêmement complexes et font intervenir de nombreux paramètres. Afin d'étudier ces équations (c'est-à-dire de montrer qu'elles possèdent effectivement des solutions, d'analyser leur stabilité par rapport aux paramètres ou à des perturbations, de connaître leur comportement qualitatif), il convient tout d'abord de les simplifier en identifiant et en isolant les caractéristiques principales permettant de décrire la dynamique de manière satisfaisante. Une analyse formelle des ordres de grandeur des différents paramètres

permet ainsi par exemple, dans le cas d'une analyse à grande échelle du mouvement, de réduire les équations à un système d'équations aux dérivées partielles du même type que les équations de Navier-Stokes. Un travail mathématique important consiste alors à justifier ces simplifications, en démontrant que la solution de l'équation approchée possède bien une dynamique comparable à celle du système de départ. Cette question est en général extrêmement difficile, et pour la plupart des modèles utilisés par les physiciens ou océanographes, elle n'est pas résolue. Par rapport aux classiques équations de Navier-Stokes, les équations simplifiées des océans possèdent plusieurs facteurs caractéristiques, dus à la faible profondeur de l'océan par rapport à son étendue horizontale (à grande échelle), au forçage par le vent à l'interface avec l'atmosphère, et à l'effet de la force de Coriolis (les équations étant posées dans un repère en rotation : la Terre). Chacune de ces caractéristiques a une influence propre sur la dynamique, qui est susceptible d'expliquer certains phénomènes observés dans les océans. Par exemple, à des latitudes moyennes il est connu des physiciens (il s'agit d'un célèbre résultat dû à Taylor et Proudman au dix-neuvième siècle) que les particules de fluide tendent, sous l'effet de la force de Coriolis, à s'organiser en colonnes verticales et ainsi le mouvement tend à se stratifier et à ne plus dépendre de la variable de profondeur. Lorsque l'on se rapproche de l'équateur, l'effet de la force de Coriolis s'amoindrit, et de nouvelles structures et de nouveaux courants apparaissent. L'une des contributions récentes de Laure Saint-Raymond et de ses co-auteurs a été de mettre en évidence de manière rigoureuse la présence d'ondes nouvelles provoquées par ces variations de l'amplitude de la force de Coriolis, et à analyser leurs interactions avec les autres ondes présentes dans les océans (en montrant que ces ondes sont essentiellement découplées). Aux environs de l'équateur, il est également établi heuristiquement par les océanographes qu'il existe des zones de recirculation et des zones de ventilation : plus précisément dans certaines zones de l'océan, sous l'effet d'un vent suffisamment fort à la surface de l'eau, ces nouvelles ondes se retrouvent piégées. Dans un travail en cours, Laure Saint-Raymond a formalisé mathématiquement ce phénomène (sous forme de l'analyse microlocale du front d'onde des solutions) et ce piégeage a pu être mis en évidence par des techniques empruntées à la fois à l'optique géométrique et aux systèmes dynamiques.

Les travaux de Laure Saint-Raymond témoignent de la variété et de la profondeur des problèmes mathématiques que posent la mécanique des fluides et la physique statistique, auxquels elle a apporté des contributions remarquables.