

EN HOMMAGE À HENRI CARTAN

Henri Cartan et la rue d'Ulm¹

Michel Demazure

Henri Cartan (Ulm, Sciences, 1923), né le 8 juillet 1904 à Nancy, est décédé à Paris le 13 août 2008, à l'âge de 104 ans.

À l'occasion de son centième anniversaire, la Société Mathématique de France et l'École normale supérieure avaient organisé en commun une Journée salle Dus-sanne. Nous remercions la SMF qui nous a permis d'emprunter nombre d'éléments au dossier mis en ligne à cette occasion et que l'on pourra consulter sur son site.²

Henri naît à Nancy où enseigne son père Elie Cartan (1869-1951, Ulm 1888), fondateur de la géométrie différentielle moderne. Il rejoint Paris lorsque son père est nommé à la Sorbonne et à l'École de physique et chimie de Paris. Il fréquente le lycée Buffon à Paris, puis le lycée Hoche à Versailles.

Il entre à la rue d'Ulm en 1923, passe l'agrégation en 1926 et soutient sa thèse en 1928, sous la direction de Paul Montel³. Il est alors nommé au lycée Malherbe de Caen, puis l'année suivante à la faculté des sciences de Lille. Il est nommé à Strasbourg en novembre 1931 et y exerce jusqu'en septembre 1939, où l'université se replie à Clermont-Ferrand. Enfin, en novembre 1940, très jeune pour l'époque, il est nommé maître de conférences de mathématiques générales à la faculté des sciences de Paris et chargé de l'enseignement des mathématiques à l'École normale supérieure. Il y exerce de 1940 à 1965, à l'exception de deux années (45-47) où il est détaché à la faculté des sciences de Strasbourg. En 1965, il quitte ses fonctions à la rue d'Ulm, restant professeur à la faculté des sciences de Paris. Enfin en 1969, il est nommé professeur à la faculté des sciences d'Orsay, indépendante de Paris depuis 1965, embryon de la future Université de Paris-Sud créée en 1970, d'où il prendra sa retraite en 1975.

Les deux passages d'Henri Cartan à la rue d'Ulm, comme élève, puis comme professeur vont se révéler capitaux pour les mathématiques, à l'École, en France et dans le monde.

D'abord, c'est un groupe de normaliens des promotions 1922 (Jean Delsarte, André Weil), 1923 (Henri Cartan, Jean Coulomb, René de Possel) et 1924 (Jean

¹ Nous remercions la revue *Archicube* qui nous a autorisé à publier cet article qui paraîtra aussi dans son n° 6 en juin 2009.

² <http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/JourneeCartan/NoticeCartan.html>

³ Bien que peu significative dans le cas d'Henri Cartan, sa généalogie mathématique est la suivante : Paul Montel (Ulm 1894) a eu comme directeur de thèse Emile Borel (Ulm 1889), élève de Gaston Darboux (Ulm 1861), élève de Michel Chasles (X 1812), élève de Siméon Denis Poisson (X 1798), élève de Joseph Louis de Lagrange, immense... et sans diplôme.

Dieudonné, Charles Ehresman), animé par Weil et Cartan, complété de Claude Chevalley (Ulm 1926) et Szolem Mandelbrojt, qui constituera en 1935 le groupe Bourbaki⁴, symbolisant le renouveau des mathématiques françaises. L'élimination massive des scientifiques français au front lors de la première guerre mondiale avait en effet laissé les jeunes mathématiciens français isolés, sans prédécesseurs immédiats⁵, ne trouvant comme répondants parmi les mathématiciens français que ceux du siècle passé – à l'exception notable d'Elie Cartan et de Salomon Hadamard (Ulm 1884) – au moment même où des courants novateurs émergent à l'étranger, et avant tout en Allemagne.

Ainsi, Weil va d'abord en Italie, puis en Allemagne, notamment à Göttingen, avant de revenir soutenir à Paris sa thèse en 1928. Cartan, lui, établit en 1931 des relations suivies avec ses collègues allemands, qu'il poursuit à travers la seconde guerre mondiale⁶ et pendant toute sa vie. Comme l'écrira en 1994 Martin Grötschel, président de la DMV⁷, à l'occasion de la nomination de Cartan comme membre d'honneur de la DMV :

« Il y a 63 ans, en juin 1931, vous êtes venu à Münster pour y donner des conférences. C'est ainsi qu'ont débuté vos étroites relations scientifiques et personnelles avec Heinrich Behnke et son école d'analyse complexe, [...] L'amitié qui vous liait à Heinrich Behnke a survécu au temps de la terreur nazie et à la guerre; dès 1946 vous veniez à Oberwolfach et en 1947 de nouveau à Münster. Vous avez ainsi donné à beaucoup de mathématiciens allemands, et surtout aux plus jeunes, le sentiment que malgré les malheurs que l'Allemagne avait infligés au monde, ils n'étaient pas exclus de la communauté internationale des mathématiciens. Par là-même, vous avez, dans les incertitudes de l'après-guerre, donné à beaucoup de nos collègues force et courage [...] »

La situation universitaire parisienne n'a guère changé lorsque Cartan prend la direction des études mathématiques de la rue d'Ulm en novembre 1940. L'arrivée de l'hirondelle Cartan ne fait pas pour autant le printemps à la Sorbonne; songeons par exemple qu'il devra attendre 1955 pour qu'un second mathématicien de la nouvelle école, Gustave Choquet (Ulm 1934) le rejoigne à Paris. Mais c'est le point de départ d'une révolution qui, en une quinzaine d'années, bouleversera complètement la donne, remettra les mathématiques françaises à leur place historique, l'une des toutes premières, et fera de Paris la capitale mathématique du monde tout au long des années 50 et 60.

Qu'on en juge simplement par cet échantillon de normaliens, ceux dont il a dirigé les thèses : Roger Godement (promotion 1940), Jean-Louis Koszul (1940), René Thom (1943) Jean-Pierre Serre (1945), Jean Cerf (1947), Jean-Paul Benzécri (1950), Pierre Cartier (1950), Adrien Douady (1954), Max Karoubi (1959), Jean-Pierre Ramis (1962). Certes, avec sa modestie habituelle, il a déclaré « *Beaucoup*

⁴ Le nom de Bourbaki avait été introduit à l'occasion d'un canular par Raoul Husson (Ulm, 1923).

⁵ Weil parlera d'une « génération sans maîtres », Cartan d'un « vide ».

⁶ Notamment pour essayer d'obtenir des nouvelles de son frère physicien Louis, arrêté et déporté en 1943 pour faits de résistance. Louis fut exécuté en décembre 1943, mais sa famille n'apprit sa mort qu'en mai 1945.

⁷ Deutsche Mathematiker Vereinigung, association professionnelle des mathématiciens allemands.

d'entre eux [les élèves de l'École] ont préparé des thèses sous ma direction. On dit habituellement "direction", mais dans ce cas, ma "direction" consistait à comprendre ce qu'ils avaient en tête. Alors, j'apprenais beaucoup. » Comme me l'a écrit Jean-Pierre Serre, « *La tradition de l'époque – qui a duré jusque vers 1955-1960 – était de ne pas donner de sujet de thèse. C'était typique avec Cartan : il ne suggérait rien, mais il aidait une fois qu'on avait commencé.* » Mais, comme le savent tous ceux qui ont eu le bénéfice de rédiger un texte devant lui être soumis, aucun mot, aucune virgule n'échappait à sa vigilance.

À l'École, son action et son attention ne se limitent évidemment pas à ses thésards, ni aux seuls mathématiciens. Il donne chaque année un cours aux trois promotions, et donc à tous les scientifiques en première année. Écouter un cours de Cartan ne laisse pas indifférent. Jean-Pierre Serre en témoigne : « *Je suis entré à l'ENS en 1945 et pendant les deux premières années⁸ je n'ai eu droit qu'à des cours par Bouligand et Janet, qui étaient aussi peu enthousiasmants que possible (ceux de la Sorbonne n'étaient pas meilleurs). Ce n'est que dans ma dernière année (la 3^e) que j'ai eu des cours de Cartan, accompagnés d'un séminaire. La différence était saisissante : enfin quelqu'un qui racontait des maths!* » Pour Gérard Debreu (promotion 1941), prix Nobel d'économie en 1983 : « *Of all the teachers I had during that period, Henri Cartan was the most influential. Indirectly, N. Bourbaki also fashioned my mathematical taste.* »

Cartan suit chaque élève attentivement, comme en témoignent ses célèbres petits carnets, restés confidentiels, dans lesquels il conserve les notes obtenues aux devoirs qu'il pose, les impressions qu'il tire de leurs exposés, etc. C'est ainsi que l'archicube physicien Etienne Guyon, nommé directeur de l'École en 1990, a vu Cartan lui faire part de ses commentaires recueillis 45 ans plus tôt. C'est aussi à l'École que se tient le séminaire Cartan, chaque lundi après-midi, pendant 15 ans, entre 1948 et 1964. Chaque année, un nouveau thème est choisi. Les exposés sont faits par Cartan, par d'autres mathématiciens établis et par des plus jeunes ; à la fin de l'année, les textes écrits, soigneusement revus par Cartan, sont dactylographiés puis publiés. Il n'y a guère de bibliothèque spécialisée dans le monde qui n'ait son exemplaire des séminaires Cartan ; ce sont, encore aujourd'hui, des documents de référence indispensables.

Évidemment, l'action de Cartan ne se limite pas au périmètre de l'École. Ce bref texte passe sous silence quantités de thèmes pour lesquels on se reportera au dossier de la SMF : son apport personnel à la recherche mathématique, son rôle clé dans Bourbaki, ses responsabilités professionnelles aux niveaux national et international, son action pour les droits de l'Homme, notamment par la création du Comité des mathématiciens qui obtiendra la libération de mathématiciens injustement emprisonnés à travers le monde par des régimes totalitaires, son engagement dans le mouvement fédéraliste européen...

J'ai connu Cartan dans beaucoup de rôles : professeur, président de mon jury de thèse, président du département de mathématiques commun Paris-Orsay lors de mon élection à Orsay, « administré » lorsqu'il est venu à Orsay rejoindre le département dont j'étais directeur, et bien d'autres. Mais il y a une chose qui me fait toujours penser à lui avec tendresse, au delà de l'immense respect qu'il attirait

⁸ Comme nous l'avons dit plus haut, Cartan est à Strasbourg pendant les deux années universitaires 45-46 et 46-47.

spontanément, c'est son humour dévastateur dont les victimes ne se rendaient pas toujours compte.

Mon plus beau souvenir de lui est le suivant. Cela se passait pendant l'année 1956-1957. En prévision de l'Exposition universelle de Bruxelles 1958, un réalisateur, chargé de préparer un film sur la science française, vient tourner à l'École lors d'un cours de Cartan aux carrés mathématiciens, dont je faisais partie. Il installe sa caméra fixe au fond de la salle, tourne un moment en silence, puis interrompt Cartan :

« *Monsieur le Professeur, excusez-moi, mais il ne faut pas que vous écriviez sur la droite du tableau, car cela sort du champ.* »

« *Impossible* », lui répond imperturbablement Cartan, « *si je dois écrire une longue suite exacte,* » (c'était un cours de topologie, avec d'immenses diagrammes pleins de flèches qui remplissaient le tableau) « *je n'y penserai pas et je dépasserai.* »

Une longue discussion collective s'ensuit, où chacun fournit une solution si-possible abracadabrante, et d'où ressort *in fine* la décision de faire s'allonger un élève⁹ en travers devant le tableau, en dessous du champ de la caméra, pour marquer la limite. Le cours reprend. Heureusement le cinéaste au fond ne voit que nos dos, car nous avons de la peine à rester impassibles. Un peu plus tard, il intervient à nouveau et s'approche du tableau :

« *Excusez-moi, Monsieur le Professeur, mais si vous mettiez une flèche de ce côté-ci, par exemple là, cela ferait une image plus équilibrée.* »

« *Mais comment voulez-vous qu'il y ait une flèche là : cela voudrait dire qu'on pourrait envoyer ce groupe-ci dans celui-là. Or, si on prend l'exemple d'une sphère...* »

« *Monsieur le Professeur, ce n'est pas du tout ce que je voulais dire. Je voulais simplement faire remarquer que l'image sera très déséquilibrée.* »

« *Ce n'est rien. Je vais vous expliquer. Tout le monde peut comprendre : prenez une sphère...* »

Et ainsi de suite...

C'est pourquoi je pense que Cartan aurait apprécié certains titres de sa nécrologie dans les journaux américains comme ceux-ci :

« *Henri Cartan, a mathematician known for meticulous proofs ...* » ,

« *Founder of the Secret Society of Mathematicians* » ,

et surtout la première phrase de celui-là :

« *Henri Cartan, 104, [...], died Aug. 13 in Paris. No cause of death was reported.* »

⁹ À mon souvenir, Pierre Kaplan.

Des problèmes aux structures : Henri Cartan et les problèmes de Cousin

Renaud Chorlay¹

Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures (...). ([2] p.45)

Ainsi Nicolas Bourbaki soutient-il, dans son texte sur l'Architecture des mathématiques, que les structures ne sont pas seulement des outils d'organisation et de clarification d'un divers mathématique donné par ailleurs ; bien plus, l'invention de structure s'ajoute à la gamme des gestes du mathématicien au travail. Rien dans ce texte célèbre ne laisse toutefois entrevoir comment l'on invente des structures, ni en quoi cela contribue directement à la résolution de problèmes. Le cas du travail de Henri Cartan sur les « problèmes de Cousin » éclaire remarquablement bien cet aspect : c'est à partir d'une famille de problèmes bien connus en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes que Cartan introduit en 1940-44 une nouvelle structure, qui sera décrite quelques années plus tard comme celle de faisceau analytique cohérent. La rencontre, en 1952, entre cette ligne de recherche et une cohomologie des faisceaux jusque là développée dans un cadre plus purement topologique marque une étape importante dans le développement des mathématiques au XX^e siècle.

Des problèmes qui résistent

Cartan présente ainsi, dans une note aux Comptes Rendus de 1934, les deux « problèmes de Cousin » :

– *Premier problème de Cousin*

On suppose que le domaine considéré D est recouvert à l'aide d'une infinité dénombrable de domaines partiels D_i intérieurs à D , et que, dans chaque D_i , on a défini une fonction méromorphe f_i ; on suppose en outre que, chaque fois que deux domaines D_i et D_j ont une partie commune D_{ij} , la différence $f_i - f_j$ est holomorphe dans D_{ij} . On se propose de trouver une fonction F , méromorphe dans D , et telle que, dans chaque D_i , la différence $F - f_i$ soit holomorphe.

– *Deuxième problème de Cousin*

Mêmes hypothèses que pour le premier, sauf que les f_i sont remplacées par des φ_i holomorphes (dans D_i), et que, dans chaque D_{ij} , le quotient $\varphi_i : \varphi_j$ est supposé holomorphe et jamais nul. On se propose de trouver une fonction φ , holomorphe dans D , et telle que, dans chaque D_i , le quotient $\varphi : \varphi_i$ soit holomorphe et non nul. ([3] p.1285).

¹ Post-doctorant auprès de la Chaire d'excellence senior ANR *Ideals of Proof* (Professeur Michael Detlefsen), rattaché à l'équipe REHSEIS (UMR 7219 CNRS – Université Paris VII).

On peut formuler les problèmes plus géométriquement, en disant qu'on cherche dans le premier cas une fonction méromorphe de singularités données, dans le second cas une fonction holomorphe de lieu des zéros donné (avec multiplicités). À ces deux problèmes s'ajoute le « problème de Poincaré » : peut-on mettre toute fonction méromorphe dans un domaine D sous forme de quotient de deux fonctions holomorphes dans D ? Poincaré avait résolu le problème par l'affirmative dans le cas $D = \mathbf{C}^2$, dans un article de 1883 [25]. Il généralisait ainsi au cas de deux variables d'un théorème démontré récemment pour une variable par Weierstrass. Reposant sur des techniques de théories du potentiel annonçant sa méthode du balayage, la démonstration de Poincaré consistait à résoudre le deuxième problème de Cousin pour \mathbf{C}^2 : si F est la fonction méromorphe donnée, le problème de Poincaré est résolu si l'on sait construire une fonction holomorphe G telle que FG soit holomorphe dans \mathbf{C}^2 ; construire G , c'est construire une fonction holomorphe de lieu de zéros donné (avec multiplicités), correspondant au lieu singulier de F . Ainsi dans un domaine où le second problème de Cousin admet toujours une solution, le problème de Poincaré est toujours résoluble.

C'est Pierre Cousin qui, dans sa thèse soutenue en 1895 [13], formule parallèlement les trois problèmes et démontre qu'ils sont toujours résolubles dans les polycylindres² de dimension finie quelconque. La restriction à ce type de domaines lui permet de s'appuyer essentiellement sur des techniques relatives aux fonctions d'une seule variable complexe ; un logarithme permet de passer de l'étude du premier problème de Cousin (problème additif) à celle du second (problème multiplicatif), pour peu qu'on arrive à contrôler la multiformité. Ces théorèmes sont rapidement intégrés dans les monographies de référence sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par exemple dans l'article de synthèse que W.F. Osgood rédige en 1901 pour l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* [24].

Il semble que Cousin ait été un peu optimiste sur son contrôle de la multiformité des fonctions auxiliaires introduites au moyen d'un logarithme complexe, mais le défaut de son argumentation n'est apparu qu'assez tard, et indirectement : en travaillant sur le problème de Poincaré (avec hypothèse de coprimauté), T.H. Gronwall trouve en 1913 un contre-exemple aux résultats de Cousin. Un travail d'analyse des preuves de Cousin, mené avec Osgood, conduit en 1917 à la conclusion suivante [16] : la démonstration relative au premier problème est valide ; la démonstration relative au second problème (d'où dérive la solution du problème de Poincaré) n'est valide que dans les polycylindres dont au plus l'une des composantes n'est pas simplement connexe. Dans le cas contraire, non seulement la démonstration de Cousin introduit des fonctions auxiliaires multiformes là où Cousin pensait avoir éliminé toute multiformité, mais le théorème n'est tout simplement pas valide : Gronwall peut alors exhiber son contre-exemple au théorème de Poincaré (avec coprimauté) dans le produit de deux surfaces annulaires ($1 < |z| < 2$).

Dans la note de 1934 citée plus haut, un des objectifs de Cartan était de reprendre cette famille de problèmes dans des domaines plus généraux que les polycylindres, où l'« on s'aperçoit que les théorèmes de Cousin ne sont pas vrais pour tous

² « polycylindre » désigne un produit d'ouverts ; chaque variable complexe peut donc varier dans « son » domaine, indépendamment des autres.

les domaines, mêmes simplement connexes » ([3] p.1286). Pour ces domaines non polycylindriques, Cartan cherche à remplacer l'intégrale de Cauchy par l'« intégrale de Weil » [28]. Cartan et Weil reconnaissent toutefois bientôt que son existence n'est pas suffisamment assurée au delà de domaines définis par des inégalités polynomiales : le cas des domaines d'holomorphic³, visé par Cartan, semble hors d'atteinte.

La longue résistance des problèmes de cette famille est illustrée par la synthèse que H. Behnke et K. Stein rédigent en 1937 pour l'union des mathématiciens allemands. L'accumulation de questions ouvertes, de résultats partiels, d'exemples et de contre-exemples élémentaires ou complexes est résumée en fin d'article par le tableau suivant ([1] p.192) :

	Cousin 1	Cousin 2	Poincaré	Möglich ?
1	+	+	+	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+
5	-	+	+	+
6	-	+	-	-
7	-	-	+	+
9	-	-	-	+

La ligne 2, par exemple, se lit ainsi : il est impossible que les problèmes de Cousin 1 et 2 soient universellement résolubles (i.e. pour toutes données) dans un domaine et que le théorème de Poincaré n'y soit pas universellement résoluble (c'est le classique Cousin 2 \Rightarrow Poincaré). La ligne 5 indique qu'on dispose d'un exemple de domaine dans lequel Cousin 2 est universellement résoluble, mais pas Cousin 1.

Les premières percées importantes sur le front des problèmes de Cousin viennent du Japon, avec K. Oka. C'est Cousin 1 qui cède le premier. Oka évite le recours à l'intégrale de Weil en décrivant ses domaines rationnellement convexes comme des sous-variétés analytiques de polycylindres (ce « truc » jouera un rôle plus loin), et établit que Cousin 1 est universellement résoluble dans ces domaines [20]. L'approximation des domaines d'holomorphic par des domaines rationnellement convexes permet de leur étendre ce résultat en 1937 [21].

On savait depuis le travail de Gronwall que les choses n'étaient pas si simples pour Cousin 2. Quelque semblables que puissent paraître les deux problèmes, la topologie du domaine joue un rôle dans le second qu'elle ne semble pas jouer dans le premier... quant à savoir quel rôle exactement, peu d'éléments sont disponibles en 1937 encore ; la tactique de Gronwall et Osgood avait été d'ajouter des hypothèses de simple connexité (sur toutes les composantes du polycylindre, sauf au plus une) pour éviter les problèmes topologiques plus que pour les étudier. C'est Oka [22] qui apporte les premières lumières sur ces délicates questions, en étudiant les liens entre

³ Cartan présente la notion de « domaine d'holomorphic » de la manière la plus directe : « le domaine total d'existence d'une certaine fonction holomorphic » [3] p.1286.

Cousin 2 et son analogue purement topologique (le « problème généralisé ») : trouver une fonction continue de lieu de zéros localement donné par l'annulation d'une fonction continue⁴. Le problème généralisé étant purement topologique, l'étude du lien entre les deux problèmes permet de cerner le rôle de la topologie. Oka démontre en 1938 que « Quand D est un domaine d'holomorphie, s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques le sont aussi » (entendre : existent aussi [22] p.8) ; ainsi, dans un tel domaine, non seulement Cousin 2 comporte un élément topologique, mais il est essentiellement topologique. Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution continue est alors formulée par Oka en termes de « zéros balayables » ([22] p.15) : un tel lieu de zéros Σ dans D est balayable s'il existe un lieu de zéros continu dans $D \times [0, 1]$ de restriction Σ dans $D \times \{0\}$, et de restriction vide dans $D \times \{1\}$ ⁵.

Du problème à la structure

Henri Cartan reprend l'étude de Cousin 2 dans deux articles, ou plutôt un article en deux parties : *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* [4], *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* [5]. Il y introduit une nouvelle structure en mathématiques – celle d'idéal de fonctions holomorphes – et définit un programme de recherche, celui de « l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes ».

L'énoncé des problèmes de Cousin avait été remarquablement stable depuis Cousin. C'est par une reformulation à saveur algébrique que Cartan ouvre ses articles : « (...) Construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné. » Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point x de D , d'une fonction f_x holomorphe au point x , ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient f_x/f_a est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x , f_x et f_a engendrent le même idéal. Le problème posé par Cousin est alors : pour toute donnée de Cousin dans le domaine D , existe-t-il une fonction f , holomorphe dans D , telle que, pour tout point x de D , le quotient f/f_x soit holomorphe et $\neq 0$. ([5] p.149)

Ainsi formulé, Cousin 2 apparaît comme un représentant d'une famille beaucoup plus large de problèmes : « Remarquons à ce propos que le "deuxième problème de Cousin" se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée d'une seule fonction. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, me semble-t-il, l'étude globale des idéaux. » ([4] p.2). L'étude, nous dit Cartan, n'a pas à se restreindre aux idéaux principaux, ou, géométriquement parlant, aux sous-variétés analytiques de codimension (complexe) 1.

⁴ Pour obtenir un analogue continu du problème analytique, Oka suppose que le lieu des zéros est d'intérieur vide ([21] p.9).

⁵ Cette reformulation est due à H. Cartan, dans : Oka K., 1984. *Collected papers* (R. Remmert (ed.), R. Narasimhan (trans.)), Springer, NY, 1984.

Les liens avec les problèmes de Cousin sont multiples. Bien sûr, on voit dans la citation précédente que la nouvelle structure est introduite à partir d'une reformulation de ce que sont les « données de Cousin », mais deux autres liens sont à signaler. Premièrement, le nouveau programme de recherche vise l'étude d'un certain nombre de questions générales telles que : une fonction holomorphe sur une sous-variété analytique d'un domaine d'holomorphie est-elle toujours la restriction d'une fonction holomorphe sur ce domaine ? Si une famille finie de fonctions holomorphes définies sur un domaine d'holomorphie est sans zéro commun, l'idéal qu'elle engendre dans l'anneau des fonctions holomorphes contient-il 1 (*Nullstellensatz* analytique, que Cartan décrit comme un analogue de Cousin 2 pour une sous-variété analytique vide et non de codimension 1) ? Ces deux problèmes proviennent de l'étude des problèmes de Cousin : le premier a été soulevé par le « truc » d'Oka ; du second dépend la démonstration de l'existence de l'intégrale de Weil.

Deuxièmement, Cartan isole dans les méthodes de démonstration communes à Cousin et Oka une « opération élémentaire » : « pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède à des assemblages successifs de morceaux » ([5] p.151). Cette étape élémentaire de recollement est triviale en codimension 1 mais repose dans le cas général sur un lemme de prolongement de matrices holomorphes de déterminant nulle part nul : c'est à la démonstration de ce lemme central qu'est consacré l'article de 1940.

Ainsi, la reformulation en partie algébrique d'un problème ancien et résistant (Cousin 2) permet-elle de définir un nouveau programme de recherche qui, bien que formulé comme étude de la nouvelle « structure », englobe une large famille de problèmes classiques, et repose sur la généralisation d'un pas de démonstration déjà familier.

L'étude de cette nouvelle structure abstraite conduit à deux types de questions. Premièrement, et c'est bien là l'enjeu de l'étude « globale », on doit étudier le lien entre l'idéal (ou le module) de fonctions holomorphes sur un domaine donné et la famille des idéaux « ponctuels »⁶ qu'il induit en chaque point ; ou encore, on doit étudier le lien entre les idéaux associés à deux domaines, l'un inclus dans l'autre. Cartan souligne à ce propos l'aspect suivant :

Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E' contenu dans E . Il en résulte que tout idéal sur E engendre un idéal sur E' , lorsque $E' \subset E$; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à coefficients holomorphes sur E' , des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal porte en puissance une foule d'idéaux, un sur chaque sous-ensemble de E . ([5] p.153)

Il s'en faut de beaucoup que les fonctions de l'idéal engendré sur un sous-domaine soient de simples restrictions de fonctions holomorphes dans E ; ce que l'on sait, c'est que les fonctions de l'idéal engendré sont combinaisons linéaires à coefficients holomorphes dans E' de restrictions de fonctions holomorphes dans E . Dans des termes qui ne sont pas ceux de Cartan en 1940-44 : le changement

⁶ La notion d'anneau des fonctions holomorphes en un point, ou associée à un sous-domaine, n'est pas explicitée en 1940. Elle l'est en 1944, sans que des notions de limites inductives ou d'anneau local soient utilisées. La notion de limite inductive est par contre explicitement utilisée en 1950 ([7] p.31).

de domaine implique un changement d'anneau de base, et c'est là que réside la question fondamentale. On doit aussi noter que cette reformulation des problèmes de Cousin affecte aussi la notion de solution au problème de Cousin. Dans le problème classique, une solution à Cousin 2 était une fonction holomorphe (de zéros donnés) ; dans le nouveau cadre, une solution est un idéal de fonctions globales de lieu de zéros donné : le problème est affaibli, on admet les solutions formées de familles finies de fonctions globales.

Une deuxième famille de questions naît dans le cadre abstrait de l'étude de structure. Lorsqu'une « donnée de Cousin » est définie à partir d'un recouvrement ouvert, la famille d'idéaux ponctuels vérifie automatiquement une propriété qui n'est pas contenue dans la définition d'une famille d'idéaux ponctuels de fonctions holomorphes. Comme Cartan le note en 1950, « (...) avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement » ([7] p.30). C'est ici qu'il introduit la notion abstraite de cohérence :

Définition. Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier ≥ 1 donné une fois pour toute. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module M_x (à q dimensions) de fonctions holomorphes au point x . Nous disons que les modules ponctuels M_x forment un système cohérent, si tout point a de E possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $V \cap E$, engendre le module ponctuel M_x . ([5] p.156)

En 1944, Cartan reconnaît qu'il n'a pas réussi à démontrer la cohérence de ce que nous nommerions le faisceau des relations entre un nombre fini de fonctions holomorphes dans un domaine ([5] p.160). Ces questions de cohérence s'imposent comme un chantier prioritaire : la cohérence du faisceau associé à une sous-variété analytique est démontrée par Cartan en 1950 [7] ; celle du faisceau des relations par Oka [23]. Dans ce dernier article (rédigé en 1948 par Oka alors qu'il connaissait l'article de Cartan de 1940 mais pas celui de 1944) contient la version « Oka » de la structure introduite par Cartan : celle d'« idéal holomorphe de domaines indéterminés ».

Fibrés, faisceaux

À partir de 1945 les questions de topologie algébrique passent au premier plan dans les travaux de Cartan, sans interaction directe avec le programme de recherche en théorie globale des idéaux de fonctions holomorphes. L'article *Méthodes modernes en topologie algébrique* [6] marque cette réorientation ; les deux traits « modernes » soulignés par Cartan sont d'une part le recours à l'homologie de Čech – qui permet de définir des invariants pour des espaces topologiques à partir de recouvrements ouverts, sans passer par des complexes et des triangulations – et, d'autre part, la formulation d'un unique théorème central algébrique en termes de suite exacte longue de groupes⁷.

⁷ Le terme de « suite exacte longue » est anachronique. Il n'y a pas non plus de flèches dans la présentation de Cartan en 1945 : il décrit une « suite de représentations canoniques... $\Gamma^r(F), \Gamma^r(E), \Gamma^r(U), \Gamma^{r-1}(E), \Gamma^{r-1}(E)...$ » (où $U = E - F$) et explique le lien, pour trois groupes consécutifs, entre des images et des éléments annulés ([6] p.6).

Les problèmes de Cousin ne demeurent pas entièrement intouchés par la vague topologique, mais la première rencontre réelle n'est peut-être pas celle qu'on imagine. Dans une conférence de 1950 à l'ICM sur les *Problèmes globaux dans théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Cartan présente une nouvelle formulation de Cousin 2 :

Une donnée de Cousin dans B définit un nouvel espace topologique E que voici : un point de E sera, par définition, un couple (z, f) formé d'un point z de B et d'un élément générateur f de l'idéal principal I_z attaché au point z ; on identifiera les couples (z, f) et (z', f') si $z = z'$ et si le quotient f/f' (qui est holomorphe et $\neq 0$ au point z) est égal à un au point z . Faisons opérer, dans cet espace E , le groupe multiplicatif \mathbf{C}^* des nombres complexes $\neq 0$. (...) Dans le langage de la topologie moderne, E est un espace fibré principal, de groupe \mathbf{C}^* , ayant B pour base. L'hypothèse selon laquelle les idéaux I_z forment un système cohérent exprime que chaque fibre possède un voisinage isomorphe au produit $U \times \mathbf{C}^*$ d'un ensemble ouvert U de B par la fibre \mathbf{C}^* ; ceci permet de définir, sur E , une structure de variété analytique-complexe. (...) On voit aussitôt qu'une solution du problème de Cousin définit une section analytique de cet espace fibré. (...) Ainsi, pour que le problème de Cousin ait une solution (...) notre espace fibré E doit être trivial ; ([8] p.161)

Quoique cette structure d'espace fibré principal ait été introduite par Ehresmann et Feldbau quelques années auparavant [14], c'est à André Weil que Cartan doit cette reformulation de problèmes classiques au moyen de la notion de fibré. C'est du côté de la géométrie algébrique que Weil commençait à introduire systématiquement les structures de fibré (la variété de base étant munie de la topologie de Zariski) pour reformuler des problèmes classiques et établir des ponts avec la topologie. On en trouve une trace dans la conférence de 1949 intitulée *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* [29]. Notons que dans cette formulation du problème de Cousin, la notion de *solution* redevient la notion classique : on cherche une fonction (maintenant vue comme section d'un fibré) et non un idéal de l'anneau des fonctions globales. Autre avantage : l'existence d'une question purement topologique sous-jacente à la question analytique apparaît ici en toute clarté.

Ce n'est qu'un peu plus tard qu'a lieu la rencontre réelle avec la cohomologie des faisceaux⁸. On doit constater que le programme de recherche sur les idéaux de domaines indéterminés ne se coulait pas directement dans le cadre de la cohomologie des faisceaux. Quelque « structural » qu'il ait été, le cadre proposé par Cartan en 1940-44 n'introduisait aucune notion de morphisme entre modules analytiques ; aucune notion d'image, de noyau ou de quotient n'intervenait, ne serait-ce que dans la définition du faisceau des relations. On peut faire l'hypothèse suivante : l'introduction d'anneaux ou de modules quotients aurait fait quitter le sol « concret » des familles de « vraies » fonctions, qui, dans la théorie de 1940-44, sont les éléments des idéaux et modules. Du côté des faisceaux c'est déjà le schéma général de mesure de l'inexactitude à droite du foncteur des sections qui organise l'exposé, comme

⁸ Il ne peut être question de retracer ici en quelques lignes l'histoire des débuts de la cohomologie des faisceaux sur la période 1945-1952 ; nous renvoyons aux études de référence sur ce point ([15], [18], [19]). Par ailleurs, soulignons que le choix du travail de Henri Cartan comme fil directeur de la narration nous conduit à passer sous silence les travaux allemands de la même période, en particulier ceux de K. Stein.

on le voit dans le séminaire Cartan de 1950-51, consacré aux cohomologies des groupes et des faisceaux.

Des extraits de la correspondance entre Cartan et Serre montrent le lien en train de se faire, au printemps 1952. Dans une lettre datée du 30 avril 1952 ([27] p.278), Serre reformule les problèmes de Cousin au moyens des faisceaux (de modules) des fonctions holomorphes et méromorphes, ainsi que des faisceaux (de groupes multiplicatifs) des fonctions holomorphes (invertibles) et méromorphes (non nulles). Il énonce la condition de résolubilité de Cousin 1 et 2 en termes d'annulation de certains H^1 et énonce encore comme une conjecture l'annulation des H^n ($n \geq 2$) du faisceau structural pour un domaine d'holomorphie. Le truc classique consistant à utiliser une exponentielle pour relier les deux problèmes de Cousin est aussi repris sous forme de suite exacte, les aspects purement topologique étant capturés dans $H^2(X, \mathbf{Z})$.

Ces conjectures sont devenues des théorèmes lorsque Cartan et Serre rédigent à l'automne 1952 les derniers exposés du séminaire Cartan consacré aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Le théorème A consiste en une reformulation dans le langage des faisceaux (mais pas de la *cohomologie* des faisceaux) du principal résultat du programme né en 1940 :

Théorème A. Soit X une variété de Stein⁹, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X . Alors, pour tout point $x \in X$, l'image, dans le O_x -module I_x , du module des sections $H^0(X, F)$, engendre I_x pour sa structure de module sur O_x . ([10] p.7)

Quoique ce soient les mêmes outils mis au point par Cartan qui permettent de démontrer le théorème B, l'idée de travailler au-delà de H^1 semble être celle de Serre :

Théorème B. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X . Alors les modules de cohomologie $H^q(X, F)$ sont nuls pour tout entier $q \geq 1$. ([10] p.7)

Dans l'exposé consacré aux applications de ces théorèmes, Serre reformule les problèmes de Cousin en termes de surjectivité de l'application entre espaces de sections globales d'un faisceau et d'un faisceau quotient : un classique « système de parties principales » est interprété comme une section du faisceau quotient \mathbf{M}/\mathbf{O} , où \mathbf{M} est le faisceau des germes de fonctions méromorphes, et \mathbf{O} faisceau structural ([26] p.2) ; un diviseur (non nécessairement positif) est interprété comme une section globale du faisceau quotient \mathbf{G}/\mathbf{F} , où \mathbf{G} est le faisceau multiplicatif des germes de fonctions méromorphes, et \mathbf{F} celui des germes de fonctions holomorphes invertibles ([26] p.11).

Dans cette rencontre entre les deux lignes de recherche – théorie des idéaux de fonctions analytiques d'une part, cohomologie des faisceaux d'autre part – il semble que la première apporte les questions et la seconde les réponses. Il faut toutefois souligner que c'est la première qui apporte la notion de cohérence, ainsi

⁹ Dans [9] : Après avoir défini la notion d'enveloppe d'holomorphie \bar{K} d'un compact K , Cartan appelle variété de Stein une variété analytique complexe E , réunion dénombrable de compacts, et satisfaisant aux trois conditions : (α') « tout compact $K \subset E$ possède un voisinage ouvert V tel que l'intersection $V \cap \bar{K}$ soit compacte », (β) les fonctions holomorphes sur E séparent les points, (γ) tout point de E possède des coordonnées locales constituées par des éléments de $H(E)$, où $H(E)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur E .

que l'idée de changement d'anneau de base associé à un changement d'ouvert ; on voit l'importance de cette rencontre pour les développements ultérieurs de la géométrie algébrique.

Concluons sur une note humoristique. Cartan et Serre présentent leur nouvelle théorie lors du *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes*, à Bruxelles en mars 1953. R. Remmert rapporte qu'après avoir entendu leurs exposés, un auditeur allemand aurait commenté :

« *Nous avons des arcs et des flèches ; les Français, eux, ont des tanks.* »¹⁰

Références

- [1] BEHNKE H., Stein K., 1937. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null und Polstellenflächen, *Jahr. DM-V* 47, 177-193.
- [2] BOURBAKI N., 1948. L'architecture des mathématiques, in F. Le Lionnais (ed.) *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948. pp.35-47.
- [3] CARTAN H., 1934. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 199, 1284-1287.
- [4] CARTAN H., 1940. Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *Jour. Math. Pures Appl.* 19, 1-26.
- [5] CARTAN H., 1944. Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, *Ann. Sci. ÉNS* 61 3^e série, 149-197.
- [6] CARTAN H., 1945. Méthodes modernes en topologie algébrique, *Com. Math. Helv.* 18, 1-15.
- [7] CARTAN H., 1950. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, *Bull. SMF* 78, 29-64.
- [8] CARTAN H., 1950. Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, *Proc. ICM (Cambridge Mas. 30.8-6.9 1950)*, AMS, Providence (R.I.), 1952. pp.152-164.
- [9] CARTAN H., 1951-52. Théorie de la convexité (II), *Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52*, exposé 9.
- [10] CARTAN H., 1951-52. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein, *Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52*, exposé 18.
- [11] CHORLAY R., 2007. L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953), *Thèse d'histoire des mathématiques*, Université Denis Diderot, Paris, 2007.
- [12] CHORLAY R., 2009. From Problems to Structures : The Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept, *Archive for History of Exat Sciences*, à paraître.
- [13] COUSIN P., 1895. Sur les fonctions analytiques de n variables complexes, *Acta Math.* 19, 1-61.
- [14] EHRESMANN C., 1941. Espaces fibrés associés, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 213, 762-764.
- [15] GRAY JOHN, 1979. Fragments in the History of Sheaf Theory, in M.P. Fourman, C.J Mulvey, D.S. Scott (eds.), *Application of Sheaves*, London Mathematical Society - Springer, NY, 1979. pp.1-79.
- [16] GRONWALL T., 1917. On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, *Trans. AMS* 18, 50-64
- [17] HILTON P., HIRZEBRUCH F., REMMERT R. (EDS.), 1991. *Miscellanea Mathematica*, Springer, Berlin, 1991.
- [18] HOUZEL C., 1990. A Short History : les débuts de la théorie des faisceaux, in M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer, New-York, 1990. pp. 7-22.
- [19] HOUZEL C., 1998. Histoire de la théorie des faisceaux, in SMF, *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle, Séminaires et Congrès 3*, Paris, 1998. pp.101-119.
- [20] OKA K., 1936. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *Journal of Science of the Hiroshima University* 6, 245-255
- [21] OKA K., 1937. Domaines d'holomorphie, *Journal of Science of the Hiroshima University* 7, 115-130

¹⁰ « *Wir haben Pfeil une Bogen, die Franzosen haben Panzer* » ([16] p.277)

- [22] OKA K., 1939. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables III. Deuxième problème de Cousin, *Journal of Science of the Hiroshima University* 9, 7-19
- [23] OKA K., 1950. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VII. Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. SMF* 78, 1-27
- [24] OSGOOD W., 1901. Analysis der komplexen Grössen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Grössen, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* II.2 (1921-1928), Leipzig, Teubner, 1901-1921. pp.1-114
- [25] POINCARÉ H., 1883c. Sur les fonctions de deux variables, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 96, 238-240
- [26] SERRE J.-P., 1951-52. Application de la théorie générale à divers problèmes globaux, *Sem. Cartan, É.N.S Paris, 1951-52*, exposé 20.
- [27] SERRE J.-P., 1991. Les petits cousins (lettres à H. Cartan, 1950-1953), in [Hilton et alii 1991] p.278-291.
- [28] WEIL A., 1932. Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 194, 1304-1305.
- [29] WEIL A., 1949. *Fibre-spaces in Algebraic Geometry*, Algebraic Geometry Conference (mimeographed), University of Chicago, 1949. pp.55-59 = *Œuvres Scientifiques I (1926-1951)*, Springer, New-York, 1979. p. 411-413.

Divers aspects des opérations de Steenrod¹

Jean Lannes

à Henri Cartan

Dans les deux premiers paragraphes on analyse les structures de l'homologie et de la cohomologie singulières à coefficients dans \mathbb{Q} ou \mathbb{F}_2 (attention le deuxième est un peu technique!). Au troisième on montre les opérations de Steenrod en action dans deux questions de topologie algébrique, le problème de l'invariant de Hopf un et la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques. Dans le dernier paragraphe on traite brièvement de la définition des opérations de Steenrod et de la démonstration de leurs propriétés essentielles.

1. Structure de l'homologie singulière

Le foncteur « n -ième groupe d'homologie » H_n , $n \in \mathbb{N}$, associe à un espace topologique X un groupe abélien $H_n X$ et à une application continue entre espaces topologiques $f : X \rightarrow Y$ (ou plutôt à une classe d'homotopie d'une telle application) un homomorphisme de groupes abéliens $f_* : H_n X \rightarrow H_n Y$.

Soit k un anneau commutatif; on introduit plus généralement des foncteurs $H_n(X; k)$ et $H^n(X; k)$ (appelés respectivement groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans k) à valeurs dans la catégorie des k -modules. Si le groupe additif de k est sans torsion, on a $H_n(X; k) = k \otimes_{\mathbb{Z}} H_n X$; si k est un corps le k -espace vectoriel $H^n(X; k)$ est dual du k -espace vectoriel $H_n(X; k)$.

On note $H^*(X; k)$ le k -module gradué $\{H^n(X; k)\}_{n \in \mathbb{N}}$. En fait $H^*(X; k)$ possède une structure plus riche que celle de k -module gradué : c'est une k -algèbre graduée

¹ Ce texte a déjà été publié à l'occasion de la journée annuelle 1997 de la SMF consacrée à Henri Cartan.

commutative; en d'autres termes, on dispose d'un produit bilinéaire associatif $H^*(X; k) \times H^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$, noté $(u, v) \mapsto u \smile v$, avec $v \smile u = (-1)^{|u||v|} u \smile v$, $| \cdot |$ désignant le degré d'un élément de $H^*(X; k)$.

Pour $k = \mathbb{Q}$, c'est la fin de l'histoire. On peut donner un sens à l'assertion suivante : la cohomologie rationnelle ne possède pas de structure plus riche que celle de \mathbb{Q} -algèbre graduée commutative (nous trichons un petit peu, il faut plutôt considérer ici la structure de coalgèbre de l'homologie, voir paragraphe suivant).

Pour $k = \mathbb{F}_p$, l'histoire continue. On se limitera aujourd'hui au cas $p = 2$.

1.1. Opérations de Steenrod en cohomologie modulo 2

Il existe des applications naturelles (les carrés de Steenrod)

$$Sq^i : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{F}_2)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $Sq^i(u + v) = Sq^i u + Sq^i v$;
- (2) $Sq^i u = 0$ pour $i > |u|$;
- (3) $Sq^{|u|} u = u \smile u$;
- (4) $Sq^0 u = u$;
- (5) $Sq^1 u = \beta u$, β désignant l'homomorphisme de Bockstein ;
- (6) $Sq^i \Sigma u = \Sigma Sq^i u$, Σ désignant l'isomorphisme naturel, de degré un, de l'homologie (réduite) d'un espace (pointé) vers l'homologie (réduite) de sa suspension ;
- (7) $Sq^i(u \smile v) = \sum_{j+k=i} Sq^j u \smile Sq^k v$ (formule de Cartan) ;
- (8) $Sq^a Sq^b = \sum_c \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c$ pour $a < 2b$ (relations d'Adem).

(Les relations d'Adem ont été démontrées indépendamment, et par des méthodes très différentes, par J. Adem et H. Cartan.)

On montre que les carrés de Steenrod sont caractérisés par leur naturalité et les propriétés (2), (3), (4) et (7).

1.2. La catégorie des \mathbf{A} -algèbres instables

Une \mathbb{F}_2 -algèbre graduée commutative (dont le produit est noté \smile) munie d'opérations Sq^i vérifiant les propriétés (8), (4), (2), (7) et (3) ci-dessus est appelée une \mathbf{A} -algèbre instable. La notation \mathbf{A} désigne ici l'algèbre de Steenrod, c'est-à-dire la \mathbb{F}_2 -algèbre graduée quotient de la \mathbb{F}_2 -algèbre tensorielle en des « indéterminées » Sq^i de degré i par les relations d'Adem et la relation $Sq^0 = \text{Id}$; le mot instable fait référence aux propriétés (2) et (3). Les \mathbf{A} -algèbres instables sont les objets d'une catégorie, notée \mathcal{K} , dont les morphismes sont les homomorphismes de \mathbb{F}_2 -algèbres graduées commutant aux opérations de Steenrod.

On a tout fait pour que $H^*(X; \mathbb{F}_2)$ soit une \mathbf{A} -algèbre instable. De même $H_*(X; \mathbb{F}_2)$ est une \mathbf{A} -coalgèbre instable ; nous ne décrivons pas en détails cette structure, disons simplement que la duale d'une \mathbf{A} -coalgèbre instable est naturellement une \mathbf{A} -algèbre instable. Cette fois encore il est impossible d'aller plus loin. Au prochain paragraphe nous donnerons un sens à l'assertion suivante : l'homologie modulo 2 ne possède pas de structure plus riche que celle de \mathbf{A} -coalgèbre instable.

2. Structures de la cohomologie rationnelle et de la cohomologie modulo 2 (suite et fin)

Afin de préciser les assertions du paragraphe précédent concernant la cohomologie rationnelle ou modulo 2 d'un espace nous avons besoin d'introduire la notion de comonade sur une catégorie.

2.1. Les notions de monade et comonade sur une catégorie

Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels gradués $E = \{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le degré est noté en exposant ; les \mathbb{Q} -algèbres graduées commutatives sont les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ que l'on note $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$. Le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{K}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ admet un adjoint à gauche, le foncteur « algèbre symétrique » (version graduée) $\text{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$; soit M le foncteur composé $\mathcal{O} \circ \text{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. L'endofoncteur M est une « monade » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$: on dispose de deux transformations naturelles $\mu : M \circ M \rightarrow M$ et $\eta : \text{Id}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}} \rightarrow M$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient la multiplication et l'élément neutre d'un monoïde (associatif avec élément neutre), voir [5]. Un « M -objet » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est un objet E muni d'un $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ -morphisme $h : M(E) \rightarrow E$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient l'action d'un monoïde sur un ensemble, voir [5] ; les M -objets sont de façon évidente les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. On constate ici que cette sous-catégorie coïncide avec $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$: on dit que la sous-catégorie $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$ de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est définie par la monade M .

Autres exemples. Soit k un anneau, l'endofoncteur $k \otimes_{\mathbb{Z}} -$ de la catégorie des groupes abéliens possède une structure de monade et la sous-catégorie correspondante est celle des k -modules. De même la catégorie des groupes peut être définie par une monade de la catégorie des ensembles.

La notion de comonade est duale (au sens cette fois des catégories) de celle de monade ; comme précédemment à une comonade d'une catégorie est associée une sous-catégorie.

Revenons maintenant à l'homologie rationnelle ou modulo 2. Nous notons :

- \mathcal{E}_* (resp. $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels (resp. \mathbb{Q} -espaces vectoriels) gradués $E = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le degré est noté en indice (nous sommes parfaitement conscient de ce que les catégories $\mathcal{E}^{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ sont équivalentes!);
- \mathcal{K}_* (resp. $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des \mathbf{A} -coalgèbres instables (resp. des \mathbb{Q} -coalgèbres graduées commutatives).

On vérifie que les sous-catégories \mathcal{K}_* et $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ des catégories \mathcal{E}_* et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ peuvent être définies par des comonades.

Soit \mathcal{H} la catégorie homotopique des espaces topologiques (ses objets sont les espaces topologiques et ses morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues). Pour pouvoir formuler ce qui va suivre on distingue (provisoirement) les foncteurs homologie modulo 2 définis sur \mathcal{H} et à valeurs respectivement dans \mathcal{E}_* et \mathcal{K}_* par les notations $H_*(-; \mathbb{F}_2)$ et $H_*^e(-; \mathbb{F}_2)$; on introduit de même la notation $H_*^e(-; \mathbb{Q})$. Le foncteur $H_*(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*$ est donc le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{E}_*$; même chose pour l'homologie rationnelle. En fait ces factorisations sont optimales :

Théorème 1. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ définie par une comonade. Si le foncteur $H_*(-; \mathbb{Q}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ alors $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ est une sous-catégorie de \mathcal{C} et le foncteur F est le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{Q}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{C}$.
Mutatis mutandis,

Théorème 2. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de \mathcal{E}_* définie par une comonade. Si le foncteur $H_*(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_*$ alors \mathcal{K}_* est une sous-catégorie de \mathcal{C} et le foncteur F est le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{C}$.

Indications sur les démonstrations. Les démonstrations de ces deux théorèmes sont formellement les mêmes. Cependant, l'ingrédient essentiel, le calcul de la cohomologie rationnelle (resp. modulo 2) des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Q}, n)$ (resp. $K(\mathbb{F}_2, n)$), coûte moins cher dans le cas de l'homologie rationnelle; dans les deux cas, ce calcul est dû à J.-P. Serre. Ci-dessous on traite seulement de l'homologie modulo 2.

Soit E un objet de \mathcal{E}_* , on montre qu'il existe un espace topologique $K(E)$ ($K(E)$ est un espace d'Eilenberg-MacLane « généralisé »), dépendant fonctoriellement de E , possédant les propriétés (1) et (2) ci-après.

(1) L'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, K(E))$ (il s'agit donc de l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $K(E)$ que l'on note aussi $[X, K(E)]$) est fonctoriellement en bijection avec l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{E}_*}(H_*(X; \mathbb{F}_2), E)$.

Soit $\mathcal{O} : \mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{E}_*$ le foncteur oubli. Ce foncteur admet un adjoint à droite que l'on note $G : \mathcal{E}_* \rightarrow \mathcal{K}_*$; \mathcal{K}_* est définie par la comonade $\mathcal{O} \circ G$ de \mathcal{E}_* . Soient $\iota : H_*(K(E); \mathbb{F}_2) = \mathcal{O}(H_*^e(K(E); \mathbb{F}_2)) \rightarrow E$ le \mathcal{E}_* -morphisme correspondant à $\text{Id}_{K(E)}$ via la bijection de (1) et $\tilde{\iota} : H_*^e(K(E); \mathbb{F}_2) \rightarrow G(E)$ le \mathcal{K}_* -morphisme adjoint. Le calcul de Serre évoqué ci-dessus se reformule ainsi :

(2) Le \mathcal{K}_* -morphisme $\tilde{\iota}$ est un isomorphisme.

Le théorème résulte maintenant formellement de (1) et (2). Nous n'en dirons pas plus (nous avons déjà infligé trop de jargon catégorique au lecteur!). Le lecteur désireux d'achever la démonstration pourra s'inspirer de la démonstration de l'implication (i) \Rightarrow (ii) du théorème de Beck que l'on trouve dans le livre [5].

3. Les opérations de Steenrod en action

3.1. Le problème de l'invariant de Hopf un

Le « problème de l'invariant de Hopf un » peut se formuler de la façon suivante : soit $n \geq 1$ un entier. Existe-t-il un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une « algèbre polynomiale tronquée » de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n ? On voit que la réponse est positive pour $n = 1, 2, 4, 8$ en exhibant les plans projectifs $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}a)$ ($\mathbb{C}a$ pour Cayley). Le fait que la réponse soit négative pour toute autre valeur de n est le fameux théorème de J.F. Adams :

Théorème 3. *Soit $n \geq 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n , alors n est égal à 1, 2, 4 ou 8.*

À l'origine Adams a démontré ce théorème en utilisant, entre autres, certaines relations dans l'algèbre de Steenrod ; la « bonne » démonstration, découverte peu de temps après par Adams et Atiyah, utilise les opérations d'Adams en K-théorie qui sont à cette théorie ce que sont les opérations de Steenrod à la cohomologie modulo 2.

Pendant Adem, à l'aide des seules opérations de Steenrod, avait auparavant obtenu le résultat partiel suivant :

Théorème 4. *Soit $n \geq 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n , alors n est une puissance de 2.*

Ce théorème est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit $n \geq 1$ un entier. La \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n admet une structure de \mathbf{A} -algèbre instable si et seulement si n est une puissance de 2.*

Démonstration du « seulement si ». Si $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ admet une structure de \mathbf{A} -algèbre instable alors on a $u^2 = \text{Sq}^n u$. Par ailleurs, les relations d'Adem montrent que si n n'est pas une puissance de 2 alors Sq^n est une combinaison linéaire de $\text{Sq}^i \text{Sq}^j$ avec i et j strictement positifs. Comme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ est zéro en degrés strictement compris entre n et $2n$, il en résulte $\text{Sq}^n u = 0$. Contradiction.

Nous terminons ce sous-paragraphe par une illustration du fait que les opérations de Steenrod commutent à la suspension (relation (6) du paragraphe 1).

Soient X_1 , X_2 , X_4 et X_8 les quatre plans projectifs évoqués ci-dessus. L'espace X_n est obtenu en « accrochant » une boule B^{2n} à la sphère S^n par une application $h : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ que l'on appelle l'application de Hopf. Soit r un entier, puisque l'opération de Steenrod $\text{Sq}^n : H^n(X_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n}(X_n; \mathbb{F}_2)$ est non triviale, il en est de même pour $\text{Sq}^n : H^{n+r}(\Sigma^r X_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n+r}(\Sigma^r X_n; \mathbb{F}_2)$, $\Sigma^r X_n$ désignant la r -ième suspension de l'espace X_n ; on en déduit que la r -ième suspension de l'application de Hopf, $\Sigma^r h : S^{2n-1+r} \rightarrow S^{n+r}$, est homotopiquement non triviale pour tout r .

3.2. Autour de la conjecture de Sullivan

Dans les années 80 l'algèbre de Steenrod a à nouveau joué un rôle-clé dans la solution de la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques [6][3][2][1][4] et dans les développements qui en ont résulté.

Soit X un espace muni d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2$. L'espace des points fixes homotopiques de cette action, que l'on note $X^{h\mathbb{Z}/2}$, est l'espace des applications continues $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes de S^∞ dans X (la sphère S^∞ est la limite directe des sphères S^n , elle est munie de l'action antipodale). À la fin des années 60, D. Sullivan avait énoncé la conjecture suivante :

Si X est un CW-complexe fini alors l'application canonique de l'espace $X^{\mathbb{Z}/2}$ des points fixes ordinaires dans l'espace $X^{h\mathbb{Z}/2}$ des points fixes homotopiques induit un isomorphisme en homologie modulo 2.

Dans le cas où l'action est triviale, la conjecture dit que l'application canonique de X dans l'espace $\mathbf{hom}(P^\infty(\mathbb{R}), X)$ des applications continues de l'espace projectif infini $P^\infty(\mathbb{R})$ dans X induit un isomorphisme en homologie modulo 2. En fait, H. R. Miller a montré que cette application canonique est une équivalence d'homotopie [6].

Voici maintenant quelques résultats homotopiques reliés à cette théorie dont la formulation fait intervenir l'algèbre de Steenrod (on rappelle que \mathcal{K} désigne la catégorie des **A**-algèbres instables) :

Théorème 6. *Pour tout espace simplement connexe X dont la cohomologie modulo 2 est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle :*

$$[P^\infty(\mathbb{R}), X] \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(X; \mathbb{F}_2), H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2))$$

est une bijection.

Préthéorème 7. *Il existe un endofoncteur $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ et une transformation naturelle*

$$T(H^*(X; \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^*(\mathbf{hom}(P^\infty(\mathbb{R}), X); \mathbb{F}_2)$$

qui est un \mathcal{K} -isomorphisme, pour tout espace X vérifiant des conditions raisonnables.

Préthéorème 8. *Pour tout espace muni d'une action de $\mathbb{Z}/2$, vérifiant des conditions raisonnables, le \mathcal{K} -objet $H^*(X^{h\mathbb{Z}/2}; \mathbb{F}_2)$ s'exprime fonctoriellement en termes du \mathcal{K} -morphisme $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(S^\infty \times_{\mathbb{Z}/2} X; \mathbb{F}_2)$.*

Le lecteur trouvera une forme précise des énoncés 7 et 8 dans [4]. Leur démonstration fait essentiellement intervenir les propriétés « magiques » de la **A**-algèbre instable $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Celle-ci est en fait facile à décrire :

- on a $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre graduée commutative ;
- l'action des carrés de Steenrod est déterminée par les propriétés (3), (2) et (7) du paragraphe 1 : on obtient $Sq^i t^n = \binom{n}{i} t^{n+i}$ (formule encore due à H. Cartan).

4. Indications sur la définition des opérations de Steenrod et la démonstration de leurs propriétés

Introduisons tout d'abord quelques notations :

Soit G un groupe discret. On note BG l'espace classifiant de G ; BG est donc un espace connexe pointé dont le groupe fondamental est égal à G et dont le revêtement universel, que l'on note EG , est contractile. En particulier $B\mathbb{Z}/2$ a le type d'homotopie de $P^\infty(\mathbb{R})$.

Soient m un entier et X un espace topologique, on note \mathfrak{S}_m le m -ième groupe symétrique et on pose $\mathfrak{S}_m X = E\mathfrak{S}_m \times_{\mathfrak{S}_m} X^m$.

Soit s un entier. On note

$$\Delta_s : B(\mathbb{Z}/2)^s \times X \rightarrow \mathfrak{S}_{2^s} X$$

une « diagonale de Steenrod ». Cette application est induite par la diagonale ordinaire $X \rightarrow X^{2^s}$ et le plongement $(\mathbb{Z}/2)^s \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2^s}$ déterminé par une numérotation des points de $(\mathbb{Z}/2)^s$; on vérifie que la classe d'homotopie de Δ_s est indépendante de cette numérotation.

Venons-en maintenant à la théorie des carrés de Steenrod. Celle-ci repose essentiellement sur l'énoncé suivant (voir [7]) :

Théorème 9. *Soient m et n deux entiers. Soient :*

– $Q_m : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(X^m; \mathbb{F}_2)$ l'application naturelle $u \mapsto u \times u \times \dots \times u$, m fois u ;

– $\rho : H^{mn}(\mathfrak{S}_m X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(X^m; \mathbb{F}_2)$ l'application naturelle induite par le revêtement $E\mathfrak{S}_m \times X^m \rightarrow \mathfrak{S}_m X$.

Il existe une unique application naturelle

$$P_m : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(\mathfrak{S}_m X; \mathbb{F}_2)$$

telle que l'on a $Q_m = \rho \circ P_m$.

On rappelle que l'on a $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1 ; compte tenu de la formule de Künneth, $H^*(B\mathbb{Z}/2 \times X; \mathbb{F}_2)$ s'identifie donc à l'anneau de polynômes $H^*(X; \mathbb{F}_2)[t]$. On définit les $Sq^i u$ comme les « coefficients » de $\Delta_1^* P_2 u$:

$$\Delta_1^* P_2 u = \sum_{i=0}^n Sq^i u t^{n-i} \quad .$$

Le fait qu'il n'y ait pas au second membre de monômes de degré strictement supérieur à n tient à ce que toute application naturelle de $H^n(-; \mathbb{F}_2)$ dans $H^{n'}(-; \mathbb{F}_2)$ avec $n' < n$ est nulle ; on peut s'en convaincre par exemple en observant que toute classe d'homologie singulière de degré n est par définition « portée » par un CW-complexe de dimension n .

La propriété (1) du premier paragraphe est conséquence de la relation $P_2(u + v) = P_2 u + P_2 v + \text{tr}(u \times v)$, tr désignant l'application naturelle définie par le transfert du revêtement double $E\mathfrak{S}_2 \times X^2 \rightarrow \mathfrak{S}_2 X$.

La propriété (3) résulte de la factorisation $Q_2 = \rho \circ P_2$ de l'énoncé 9. La propriété (2) devient une convention.

La formule de Cartan est conséquence de la relation $P_2(u \smile v) = P_2u \smile P_2v$. La formule de Cartan implique également (6).

Enfin les relations d'Adem se démontrent en faisant appel à la diagonale de Steenrod Δ_2 . Donnons quelques détails. On observe que l'on dispose d'une application naturelle $\nu : \mathcal{G}_2\mathcal{G}_2X \rightarrow \mathcal{G}_4X$ et que l'on a $\nu^*P_4u = P_2P_2u$. On en déduit, identifiant cette fois $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^2 \times X; \mathbb{F}_2)$ à $H^*(X; \mathbb{F}_2)[t_1, t_2]$:

$$\Delta_2^*P_4u = \sum_{i_1, i_2} Sq^{i_1}Sq^{i_2}u \ t_1^{n+i_2-i_1}(t_2(t_1+t_2))^{n-i_2}.$$

Les relations d'Adem résultent de ce que le second membre doit être symétrique en t_1 et t_2 . Ce dernier point est impliqué par le fait suivant : pour tout automorphisme α de $(\mathbb{Z}/2)^2$ l'application $\Delta_2 \circ (B\alpha \times \text{Id})$ est homotope à Δ_2 .

5. Références

- [1] G. CARLSSON, Equivariant stable homotopy and Sullivan's conjecture, *Invent. math.*, **103** (1991), 497-527.
- [2] W. G. DWYER, H. R. MILLER et J. A. NEISENDORFER, Fibrewise completion and unstable Adams spectral sequence, *Israel J. Math.*, **66** (1989), 160-178.
- [3] J. LANNES, Sur la cohomologie modulo p des p -groupes abéliens élémentaires, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory, 1985, *Math. Soc. L.N.S.*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 97-116.
- [4] J. LANNES, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire, *Publi. Math. I.H.E.S.*, **75** (1992), 135-244.
- [5] S. MAC LANE, Categories for the Working Mathematician, *Graduate Texts in Math.*, **5**, Springer, 1971.
- [6] H. R. MILLER, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.
- [7] N. E. STEENROD et D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, 1962.