

- [22] OKA K., 1939. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables III. Deuxième problème de Cousin, *Journal of Science of the Hiroshima University* 9, 7-19
- [23] OKA K., 1950. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VII. Sur quelques notions arithmétiques, *Bull. SMF* 78, 1-27
- [24] OSGOOD W., 1901. Analysis der komplexen Grössen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Grössen, *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* II.2 (1921-1928), Leipzig, Teubner, 1901-1921. pp.1-114
- [25] POINCARÉ H., 1883c. Sur les fonctions de deux variables, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 96, 238-240
- [26] SERRE J.-P., 1951-52. Application de la théorie générale à divers problèmes globaux, *Sem. Cartan, É.N.S Paris, 1951-52*, exposé 20.
- [27] SERRE J.-P., 1991. Les petits cousins (lettres à H. Cartan, 1950-1953), in [Hilton et alii 1991] p.278-291.
- [28] WEIL A., 1932. Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 194, 1304-1305.
- [29] WEIL A., 1949. *Fibre-spaces in Algebraic Geometry*, *Algebraic Geometry Conference* (mimeographed), University of Chicago, 1949. pp.55-59 = *Œuvres Scientifiques I (1926-1951)*, Springer, New-York, 1979. p. 411-413.

Divers aspects des opérations de Steenrod¹

Jean Lannes

à Henri Cartan

Dans les deux premiers paragraphes on analyse les structures de l'homologie et de la cohomologie singulières à coefficients dans \mathbb{Q} ou \mathbb{F}_2 (attention le deuxième est un peu technique!). Au troisième on montre les opérations de Steenrod en action dans deux questions de topologie algébrique, le problème de l'invariant de Hopf un et la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques. Dans le dernier paragraphe on traite brièvement de la définition des opérations de Steenrod et de la démonstration de leurs propriétés essentielles.

1. Structure de l'homologie singulière

Le foncteur « n -ième groupe d'homologie » H_n , $n \in \mathbb{N}$, associe à un espace topologique X un groupe abélien $H_n X$ et à une application continue entre espaces topologiques $f : X \rightarrow Y$ (ou plutôt à une classe d'homotopie d'une telle application) un homomorphisme de groupes abéliens $f_* : H_n X \rightarrow H_n Y$.

Soit k un anneau commutatif; on introduit plus généralement des foncteurs $H_n(X; k)$ et $H^n(X; k)$ (appelés respectivement groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans k) à valeurs dans la catégorie des k -modules. Si le groupe additif de k est sans torsion, on a $H_n(X; k) = k \otimes_{\mathbb{Z}} H_n X$; si k est un corps le k -espace vectoriel $H^n(X; k)$ est dual du k -espace vectoriel $H_n(X; k)$.

On note $H^*(X; k)$ le k -module gradué $\{H^n(X; k)\}_{n \in \mathbb{N}}$. En fait $H^*(X; k)$ possède une structure plus riche que celle de k -module gradué : c'est une k -algèbre graduée

¹ Ce texte a déjà été publié à l'occasion de la journée annuelle 1997 de la SMF consacrée à Henri Cartan.

commutative; en d'autres termes, on dispose d'un produit bilinéaire associatif $H^*(X; k) \times H^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k)$, noté $(u, v) \mapsto u \smile v$, avec $v \smile u = (-1)^{|u||v|} u \smile v$, $| \cdot |$ désignant le degré d'un élément de $H^*(X; k)$.

Pour $k = \mathbb{Q}$, c'est la fin de l'histoire. On peut donner un sens à l'assertion suivante : la cohomologie rationnelle ne possède pas de structure plus riche que celle de \mathbb{Q} -algèbre graduée commutative (nous trichons un petit peu, il faut plutôt considérer ici la structure de coalgèbre de l'homologie, voir paragraphe suivant).

Pour $k = \mathbb{F}_p$, l'histoire continue. On se limitera aujourd'hui au cas $p = 2$.

1.1. Opérations de Steenrod en cohomologie modulo 2

Il existe des applications naturelles (les carrés de Steenrod)

$$Sq^i : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{F}_2)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) $Sq^i(u + v) = Sq^i u + Sq^i v$;
- (2) $Sq^i u = 0$ pour $i > |u|$;
- (3) $Sq^{|u|} u = u \smile u$;
- (4) $Sq^0 u = u$;
- (5) $Sq^1 u = \beta u$, β désignant l'homomorphisme de Bockstein ;
- (6) $Sq^i \Sigma u = \Sigma Sq^i u$, Σ désignant l'isomorphisme naturel, de degré un, de l'homologie (réduite) d'un espace (pointé) vers l'homologie (réduite) de sa suspension ;
- (7) $Sq^i(u \smile v) = \sum_{j+k=i} Sq^j u \smile Sq^k v$ (formule de Cartan) ;
- (8) $Sq^a Sq^b = \sum_c \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c$ pour $a < 2b$ (relations d'Adem).

(Les relations d'Adem ont été démontrées indépendamment, et par des méthodes très différentes, par J. Adem et H. Cartan.)

On montre que les carrés de Steenrod sont caractérisés par leur naturalité et les propriétés (2), (3), (4) et (7).

1.2. La catégorie des \mathbf{A} -algèbres instables

Une \mathbb{F}_2 -algèbre graduée commutative (dont le produit est noté \smile) munie d'opérations Sq^i vérifiant les propriétés (8), (4), (2), (7) et (3) ci-dessus est appelée une \mathbf{A} -algèbre instable. La notation \mathbf{A} désigne ici l'algèbre de Steenrod, c'est-à-dire la \mathbb{F}_2 -algèbre graduée quotient de la \mathbb{F}_2 -algèbre tensorielle en des « indéterminées » Sq^i de degré i par les relations d'Adem et la relation $Sq^0 = \text{Id}$; le mot instable fait référence aux propriétés (2) et (3). Les \mathbf{A} -algèbres instables sont les objets d'une catégorie, notée \mathcal{K} , dont les morphismes sont les homomorphismes de \mathbb{F}_2 -algèbres graduées commutant aux opérations de Steenrod.

On a tout fait pour que $H^*(X; \mathbb{F}_2)$ soit une \mathbf{A} -algèbre instable. De même $H_*(X; \mathbb{F}_2)$ est une \mathbf{A} -coalgèbre instable ; nous ne décrivons pas en détails cette structure, disons simplement que la duale d'une \mathbf{A} -coalgèbre instable est naturellement une \mathbf{A} -algèbre instable. Cette fois encore il est impossible d'aller plus loin. Au prochain paragraphe nous donnerons un sens à l'assertion suivante : l'homologie modulo 2 ne possède pas de structure plus riche que celle de \mathbf{A} -coalgèbre instable.

2. Structures de la cohomologie rationnelle et de la cohomologie modulo 2 (suite et fin)

Afin de préciser les assertions du paragraphe précédent concernant la cohomologie rationnelle ou modulo 2 d'un espace nous avons besoin d'introduire la notion de comonade sur une catégorie.

2.1. Les notions de monade et comonade sur une catégorie

Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des \mathbb{Q} -espaces vectoriels gradués $E = \{E^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le degré est noté en exposant ; les \mathbb{Q} -algèbres graduées commutatives sont les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ que l'on note $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$. Le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{K}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ admet un adjoint à gauche, le foncteur « algèbre symétrique » (version graduée) $\text{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$; soit M le foncteur composé $\mathcal{O} \circ \text{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. L'endofoncteur M est une « monade » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$: on dispose de deux transformations naturelles $\mu : M \circ M \rightarrow M$ et $\eta : \text{Id}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}} \rightarrow M$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient la multiplication et l'élément neutre d'un monoïde (associatif avec élément neutre), voir [5]. Un « M -objet » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est un objet E muni d'un $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ -morphisme $h : M(E) \rightarrow E$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient l'action d'un monoïde sur un ensemble, voir [5] ; les M -objets sont de façon évidente les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. On constate ici que cette sous-catégorie coïncide avec $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$: on dit que la sous-catégorie $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$ de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est définie par la monade M .

Autres exemples. Soit k un anneau, l'endofoncteur $k \otimes_{\mathbb{Z}} -$ de la catégorie des groupes abéliens possède une structure de monade et la sous-catégorie correspondante est celle des k -modules. De même la catégorie des groupes peut être définie par une monade de la catégorie des ensembles.

La notion de comonade est duale (au sens cette fois des catégories) de celle de monade ; comme précédemment à une comonade d'une catégorie est associée une sous-catégorie.

Revenons maintenant à l'homologie rationnelle ou modulo 2. Nous notons :

- \mathcal{E}_* (resp. $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels (resp. \mathbb{Q} -espaces vectoriels) gradués $E = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le degré est noté en indice (nous sommes parfaitement conscient de ce que les catégories $\mathcal{E}^{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ sont équivalentes!);
- \mathcal{K}_* (resp. $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des \mathbf{A} -coalgèbres instables (resp. des \mathbb{Q} -coalgèbres graduées commutatives).

On vérifie que les sous-catégories \mathcal{K}_* et $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ des catégories \mathcal{E}_* et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ peuvent être définies par des comonades.

Soit \mathcal{H} la catégorie homotopique des espaces topologiques (ses objets sont les espaces topologiques et ses morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues). Pour pouvoir formuler ce qui va suivre on distingue (provisoirement) les foncteurs homologie modulo 2 définis sur \mathcal{H} et à valeurs respectivement dans \mathcal{E}_* et \mathcal{K}_* par les notations $H_*(-; \mathbb{F}_2)$ et $H_*^e(-; \mathbb{F}_2)$; on introduit de même la notation $H_*^e(-; \mathbb{Q})$. Le foncteur $H_*(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*$ est donc le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{E}_*$; même chose pour l'homologie rationnelle. En fait ces factorisations sont optimales :

Théorème 1. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ définie par une comonade. Si le foncteur $H_*(-; \mathbb{Q}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ alors $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ est une sous-catégorie de \mathcal{C} et le foncteur F est le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{Q}) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{C}$.
Mutatis mutandis,

Théorème 2. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de \mathcal{E}_* définie par une comonade. Si le foncteur $H_*(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}_*$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_*$ alors \mathcal{K}_* est une sous-catégorie de \mathcal{C} et le foncteur F est le composé du foncteur $H_*^e(-; \mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{C}$.

Indications sur les démonstrations. Les démonstrations de ces deux théorèmes sont formellement les mêmes. Cependant, l'ingrédient essentiel, le calcul de la cohomologie rationnelle (resp. modulo 2) des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Q}, n)$ (resp. $K(\mathbb{F}_2, n)$), coûte moins cher dans le cas de l'homologie rationnelle; dans les deux cas, ce calcul est dû à J.-P. Serre. Ci-dessous on traite seulement de l'homologie modulo 2.

Soit E un objet de \mathcal{E}_* , on montre qu'il existe un espace topologique $K(E)$ ($K(E)$ est un espace d'Eilenberg-MacLane « généralisé »), dépendant fonctoriellement de E , possédant les propriétés (1) et (2) ci-après.

(1) L'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{H}}(X, K(E))$ (il s'agit donc de l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $K(E)$ que l'on note aussi $[X, K(E)]$) est fonctoriellement en bijection avec l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{E}_*}(H_*(X; \mathbb{F}_2), E)$.

Soit $\mathcal{O} : \mathcal{K}_* \rightarrow \mathcal{E}_*$ le foncteur oubli. Ce foncteur admet un adjoint à droite que l'on note $G : \mathcal{E}_* \rightarrow \mathcal{K}_*$; \mathcal{K}_* est définie par la comonade $\mathcal{O} \circ G$ de \mathcal{E}_* . Soient $\iota : H_*(K(E); \mathbb{F}_2) = \mathcal{O}(H_*^e(K(E); \mathbb{F}_2)) \rightarrow E$ le \mathcal{E}_* -morphisme correspondant à $\text{Id}_{K(E)}$ via la bijection de (1) et $\tilde{\iota} : H_*^e(K(E); \mathbb{F}_2) \rightarrow G(E)$ le \mathcal{K}_* -morphisme adjoint. Le calcul de Serre évoqué ci-dessus se reformule ainsi :

(2) Le \mathcal{K}_* -morphisme $\tilde{\iota}$ est un isomorphisme.

Le théorème résulte maintenant formellement de (1) et (2). Nous n'en dirons pas plus (nous avons déjà infligé trop de jargon catégorique au lecteur!). Le lecteur désireux d'achever la démonstration pourra s'inspirer de la démonstration de l'implication (i) \Rightarrow (ii) du théorème de Beck que l'on trouve dans le livre [5].

3. Les opérations de Steenrod en action

3.1. Le problème de l'invariant de Hopf un

Le « problème de l'invariant de Hopf un » peut se formuler de la façon suivante : soit $n \geq 1$ un entier. Existe-t-il un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une « algèbre polynomiale tronquée » de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n ? On voit que la réponse est positive pour $n = 1, 2, 4, 8$ en exhibant les plans projectifs $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{Ca})$ (\mathbb{Ca} pour Cayley). Le fait que la réponse soit négative pour toute autre valeur de n est le fameux théorème de J.F. Adams :

Théorème 3. *Soit $n \geq 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n , alors n est égal à 1, 2, 4 ou 8.*

À l'origine Adams a démontré ce théorème en utilisant, entre autres, certaines relations dans l'algèbre de Steenrod ; la « bonne » démonstration, découverte peu de temps après par Adams et Atiyah, utilise les opérations d'Adams en K-théorie qui sont à cette théorie ce que sont les opérations de Steenrod à la cohomologie modulo 2.

Pendant Adem, à l'aide des seules opérations de Steenrod, avait auparavant obtenu le résultat partiel suivant :

Théorème 4. *Soit $n \geq 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n , alors n est une puissance de 2.*

Ce théorème est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit $n \geq 1$ un entier. La \mathbb{F}_2 -algèbre commutative graduée $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n admet une structure de \mathbf{A} -algèbre instable si et seulement si n est une puissance de 2.*

Démonstration du « seulement si ». Si $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ admet une structure de \mathbf{A} -algèbre instable alors on a $u^2 = \text{Sq}^n u$. Par ailleurs, les relations d'Adem montrent que si n n'est pas une puissance de 2 alors Sq^n est une combinaison linéaire de $\text{Sq}^i \text{Sq}^j$ avec i et j strictement positifs. Comme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ est zéro en degrés strictement compris entre n et $2n$, il en résulte $\text{Sq}^n u = 0$. Contradiction.

Nous terminons ce sous-paragraphe par une illustration du fait que les opérations de Steenrod commutent à la suspension (relation (6) du paragraphe 1).

Soient X_1 , X_2 , X_4 et X_8 les quatre plans projectifs évoqués ci-dessus. L'espace X_n est obtenu en « accrochant » une boule B^{2n} à la sphère S^n par une application $h : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ que l'on appelle l'application de Hopf. Soit r un entier, puisque l'opération de Steenrod $\text{Sq}^n : H^n(X_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n}(X_n; \mathbb{F}_2)$ est non triviale, il en est de même pour $\text{Sq}^n : H^{n+r}(\Sigma^r X_n; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n+r}(\Sigma^r X_n; \mathbb{F}_2)$, $\Sigma^r X_n$ désignant la r -ième suspension de l'espace X_n ; on en déduit que la r -ième suspension de l'application de Hopf, $\Sigma^r h : S^{2n-1+r} \rightarrow S^{n+r}$, est homotopiquement non triviale pour tout r .

3.2. Autour de la conjecture de Sullivan

Dans les années 80 l'algèbre de Steenrod a à nouveau joué un rôle-clé dans la solution de la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques [6][3][2][1][4] et dans les développements qui en ont résulté.

Soit X un espace muni d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2$. L'espace des points fixes homotopiques de cette action, que l'on note $X^{h\mathbb{Z}/2}$, est l'espace des applications continues $\mathbb{Z}/2$ -équivariantes de S^∞ dans X (la sphère S^∞ est la limite directe des sphères S^n , elle est munie de l'action antipodale). À la fin des années 60, D. Sullivan avait énoncé la conjecture suivante :

Si X est un CW-complexe fini alors l'application canonique de l'espace $X^{\mathbb{Z}/2}$ des points fixes ordinaires dans l'espace $X^{h\mathbb{Z}/2}$ des points fixes homotopiques induit un isomorphisme en homologie modulo 2.

Dans le cas où l'action est triviale, la conjecture dit que l'application canonique de X dans l'espace $\mathbf{hom}(P^\infty(\mathbb{R}), X)$ des applications continues de l'espace projectif infini $P^\infty(\mathbb{R})$ dans X induit un isomorphisme en homologie modulo 2. En fait, H. R. Miller a montré que cette application canonique est une équivalence d'homotopie [6].

Voici maintenant quelques résultats homotopiques reliés à cette théorie dont la formulation fait intervenir l'algèbre de Steenrod (on rappelle que \mathcal{K} désigne la catégorie des **A**-algèbres instables) :

Théorème 6. *Pour tout espace simplement connexe X dont la cohomologie modulo 2 est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle :*

$$[P^\infty(\mathbb{R}), X] \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(H^*(X; \mathbb{F}_2), H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2))$$

est une bijection.

Préthéorème 7. *Il existe un endofoncteur $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ et une transformation naturelle*

$$T(H^*(X; \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^*(\mathbf{hom}(P^\infty(\mathbb{R}), X); \mathbb{F}_2)$$

qui est un \mathcal{K} -isomorphisme, pour tout espace X vérifiant des conditions raisonnables.

Préthéorème 8. *Pour tout espace muni d'une action de $\mathbb{Z}/2$, vérifiant des conditions raisonnables, le \mathcal{K} -objet $H^*(X^{h\mathbb{Z}/2}; \mathbb{F}_2)$ s'exprime fonctoriellement en termes du \mathcal{K} -morphisme $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^*(S^\infty \times_{\mathbb{Z}/2} X; \mathbb{F}_2)$.*

Le lecteur trouvera une forme précise des énoncés 7 et 8 dans [4]. Leur démonstration fait essentiellement intervenir les propriétés « magiques » de la **A**-algèbre instable $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Celle-ci est en fait facile à décrire :

- on a $H^*(P^\infty(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1, en tant que \mathbb{F}_2 -algèbre graduée commutative ;
- l'action des carrés de Steenrod est déterminée par les propriétés (3), (2) et (7) du paragraphe 1 : on obtient $Sq^i t^n = \binom{n}{i} t^{n+i}$ (formule encore due à H. Cartan).

4. Indications sur la définition des opérations de Steenrod et la démonstration de leurs propriétés

Introduisons tout d'abord quelques notations :

Soit G un groupe discret. On note BG l'espace classifiant de G ; BG est donc un espace connexe pointé dont le groupe fondamental est égal à G et dont le revêtement universel, que l'on note EG , est contractile. En particulier $B\mathbb{Z}/2$ a le type d'homotopie de $P^\infty(\mathbb{R})$.

Soient m un entier et X un espace topologique, on note \mathfrak{S}_m le m -ième groupe symétrique et on pose $\mathfrak{S}_m X = E\mathfrak{S}_m \times_{\mathfrak{S}_m} X^m$.

Soit s un entier. On note

$$\Delta_s : B(\mathbb{Z}/2)^s \times X \rightarrow \mathfrak{S}_{2^s} X$$

une « diagonale de Steenrod ». Cette application est induite par la diagonale ordinaire $X \rightarrow X^{2^s}$ et le plongement $(\mathbb{Z}/2)^s \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2^s}$ déterminé par une numérotation des points de $(\mathbb{Z}/2)^s$; on vérifie que la classe d'homotopie de Δ_s est indépendante de cette numérotation.

Venons-en maintenant à la théorie des carrés de Steenrod. Celle-ci repose essentiellement sur l'énoncé suivant (voir [7]) :

Théorème 9. *Soient m et n deux entiers. Soient :*

– $Q_m : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(X^m; \mathbb{F}_2)$ l'application naturelle $u \mapsto u \times u \times \dots \times u$, m fois u ;

– $\rho : H^{mn}(\mathfrak{S}_m X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(X^m; \mathbb{F}_2)$ l'application naturelle induite par le revêtement $E\mathfrak{S}_m \times X^m \rightarrow \mathfrak{S}_m X$.

Il existe une unique application naturelle

$$P_m : H^n(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{mn}(\mathfrak{S}_m X; \mathbb{F}_2)$$

telle que l'on a $Q_m = \rho \circ P_m$.

On rappelle que l'on a $H^*(B\mathbb{Z}/2; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1 ; compte tenu de la formule de Künneth, $H^*(B\mathbb{Z}/2 \times X; \mathbb{F}_2)$ s'identifie donc à l'anneau de polynômes $H^*(X; \mathbb{F}_2)[t]$. On définit les $Sq^i u$ comme les « coefficients » de $\Delta_1^* P_2 u$:

$$\Delta_1^* P_2 u = \sum_{i=0}^n Sq^i u t^{n-i} \quad .$$

Le fait qu'il n'y ait pas au second membre de monômes de degré strictement supérieur à n tient à ce que toute application naturelle de $H^n(-; \mathbb{F}_2)$ dans $H^{n'}(-; \mathbb{F}_2)$ avec $n' < n$ est nulle ; on peut s'en convaincre par exemple en observant que toute classe d'homologie singulière de degré n est par définition « portée » par un CW-complexe de dimension n .

La propriété (1) du premier paragraphe est conséquence de la relation $P_2(u + v) = P_2 u + P_2 v + \text{tr}(u \times v)$, tr désignant l'application naturelle définie par le transfert du revêtement double $E\mathfrak{S}_2 \times X^2 \rightarrow \mathfrak{S}_2 X$.

La propriété (3) résulte de la factorisation $Q_2 = \rho \circ P_2$ de l'énoncé 9. La propriété (2) devient une convention.

La formule de Cartan est conséquence de la relation $P_2(u \smile v) = P_2u \smile P_2v$. La formule de Cartan implique également (6).

Enfin les relations d'Adem se démontrent en faisant appel à la diagonale de Steenrod Δ_2 . Donnons quelques détails. On observe que l'on dispose d'une application naturelle $\nu : \mathcal{G}_2\mathcal{G}_2X \rightarrow \mathcal{G}_4X$ et que l'on a $\nu^*P_4u = P_2P_2u$. On en déduit, identifiant cette fois $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^2 \times X; \mathbb{F}_2)$ à $H^*(X; \mathbb{F}_2)[t_1, t_2]$:

$$\Delta_2^*P_4u = \sum_{i_1, i_2} Sq^{i_1}Sq^{i_2}u \ t_1^{n+i_2-i_1}(t_2(t_1+t_2))^{n-i_2}.$$

Les relations d'Adem résultent de ce que le second membre doit être symétrique en t_1 et t_2 . Ce dernier point est impliqué par le fait suivant : pour tout automorphisme α de $(\mathbb{Z}/2)^2$ l'application $\Delta_2 \circ (B\alpha \times \text{Id})$ est homotope à Δ_2 .

5. Références

- [1] G. CARLSSON, Equivariant stable homotopy and Sullivan's conjecture, *Invent. math.*, **103** (1991), 497-527.
- [2] W. G. DWYER, H. R. MILLER et J. A. NEISENDORFER, Fibrewise completion and unstable Adams spectral sequence, *Israel J. Math.*, **66** (1989), 160-178.
- [3] J. LANNES, Sur la cohomologie modulo p des p -groupes abéliens élémentaires, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory, 1985, *Math. Soc. L.N.S.*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 97-116.
- [4] J. LANNES, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire, *Publi. Math. I.H.E.S.*, **75** (1992), 135-244.
- [5] S. MAC LANE, Categories for the Working Mathematician, *Graduate Texts in Math.*, **5**, Springer, 1971.
- [6] H. R. MILLER, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.
- [7] N. E. STEENROD et D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, 1962.