

# LIVRES

---

---

## Non-linear elliptic equations in conformal geometry

SUN-YUNG ALICE CHANG

European Mathematical Society, 2004. 100 p.

ISBN : 978-3-03719-006-7. 24€

---

Une transformation conforme est un difféomorphisme qui préserve les angles (en tout point la différentielle étant par conséquent la composée d'une rotation et d'une homothétie). Dans son sens original, la géométrie conforme étudie les propriétés géométriques qui sont préservées par les transformations conformes. Ce sujet de recherche a connu de nombreux développements au cours des 30 dernières années. Le livre d'Alice Chang forme une version révisée d'un cours qui a été donné pour les étudiants de niveau Master 2 de l'ETH de Zürich. Il constitue en quelque sorte une introduction à la géométrie conforme. L'approche développée dans ce livre est essentiellement analytique : c'est l'un des attraits et l'une des richesses de cet ouvrage, montrer comment aborder des problèmes de géométrie conforme en utilisant des techniques d'analyse. Nous allons donner quelques exemples afin de mieux faire comprendre de quoi il s'agit.

Deux métriques  $g$  et  $g'$  sur une variété compacte et lisse  $(M, g)$  de dimension  $n \geq 2$  sont dites conformes si  $g' = e^\varphi g$  où  $\varphi$  est une fonction lisse. La classe conforme de  $g$  est donc l'ensemble de toutes les métriques pouvant s'écrire de cette façon. Il est maintenant classique que l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$  est un opérateur géométrique naturel au sens où celui-ci véhicule de nombreuses propriétés géométriques (on prendra garde au fait qu'ici l'opérateur de Laplace-Beltrami est l'opposé de celui considéré par les analystes, de telle façon que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles). Si on prend le cas d'une surface l'opérateur de Laplace-Beltrami est conformément covariant au sens où pour  $g$  et  $g'$  deux métriques conformes ( $g' = e^\varphi g$ ) on a  $\Delta_{g'} = e^{-\varphi} \Delta_g$ . De plus on a une relation très simple qui relie la courbure de Gauss  $K_g$  pour la métrique  $g$  à la courbure de Gauss  $K_{g'}$  pour la métrique  $g'$  :

$$\Delta_g \varphi + K_g = K_{g'} e^\varphi.$$

En intégrant cette relation sur la surface on s'aperçoit immédiatement que la quantité  $\int K_g dv_g$  est constante sur une classe conforme donnée. En fait, la formule de Gauss-Bonnet nous dit que c'est même un invariant topologique.

En dimension plus grande que 2, le même genre de relation d'invariance conforme est vraie mais pour un opérateur (d'ordre 2) légèrement différent du laplacien, opérateur appelé laplacien conforme  $L_g = \frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g + \text{Scal}_g$ . On a, si  $\tilde{g} = e^{2w} g$ , pour tout  $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}w} L_g \left( e^{\frac{n-2}{2}w} \varphi \right).$$

D'une façon plus générale, on dira qu'un opérateur  $A_g$  dépendant de la métrique est conformétement covariant de bi-degré  $(a, b)$  si, sous le changement conforme de métrique  $\tilde{g} = e^{2w}g$ , les opérateurs  $A_{\tilde{g}}$  et  $A_g$  sont reliés par la relation

$$A_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-bw}A_g(e^{aw}\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Un opérateur d'ordre 4 particulièrement intéressant fut découvert en 1983 par S. Paneitz. Cet opérateur défini sur les variétés de dimension 4 est donné par

$$P_g\varphi = \Delta_g^2\varphi - \operatorname{div}_g \left( \frac{2}{3} \operatorname{Scal}_g g - 2 \operatorname{Ric}_g \right) d\varphi.$$

Cet opérateur est conformétement covariant de bidegré  $(0, 4)$ , i.e. si  $\tilde{g} = e^{2w}g$

$$P_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-4w}P_g(\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

L'opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 présente beaucoup de similitudes avec l'opérateur laplacien sur les surfaces. Sur une variété de dimension 4 on a  $P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}}e^{4w}$ , où  $Q_g$  est l'invariant de courbure défini par (on appelle souvent  $Q_g$  la  $Q$ -courbure)  $Q_g = \frac{1}{12}(-\Delta \operatorname{Scal}_g + \operatorname{Scal}_g^2 - 3|\operatorname{Ric}_g|^2)$ . L'analogie entre  $K$  et  $Q$  est encore plus flagrante si on considère la formule de Gauss-Bonnet. Sur une surface on a

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_g dv_g,$$

où  $\chi(M)$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $M$ . En dimension 4, on a

$$(1) \quad 4\pi^2\chi(M) = \int_M \left( \frac{1}{8} |\operatorname{Weyl}_g|_g^2 + Q_g \right) dv_g.$$

Il faut noter que, puisque  $|\operatorname{Weyl}_g|_g^2 dv_g$  est invariant par changement conforme, c'est le terme  $Q_g dv_g$  qui mesure le changement conforme. Notons aussi que compte tenu de la formule de Gauss-Bonnet et de l'invariance conforme de  $|\operatorname{Weyl}_g|_g^2 dv_g$ , la quantité  $\int_M Q_g dv_g$  (que l'on note en général  $k_P$ ) est un invariant conforme.

Le livre d'Alice Chang couvre ces sujets d'une manière introductive. La première partie de l'ouvrage porte sur l'étude de problèmes de géométrie conforme sur les surfaces, en particulier le problème de l'uniformisation. Bien que la première preuve qui en fut donnée relève de l'analyse complexe (preuve due à Poincaré, Koebe et Weil, et récemment une preuve simplifiée a été donnée par Demailly), la preuve qu'Alice Chang donne est celle due à Osgood, Philipps et Sarnak, preuve utilisant la fonction  $\zeta$  associée aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami et la recherche de métriques extrémales pour la fonctionnelle associée. La seconde partie de son ouvrage porte sur la généralisation à des opérateurs d'ordre supérieur ou égal à 4 (opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 par exemple). Là encore, en s'appuyant sur des travaux de Branson et Orsted elle introduit la fonction  $\zeta$  associée à ces opérateurs et aborde les problèmes de recherche de métriques extrémales (par exemple la recherche d'une métrique extrémale ayant une  $Q$ -courbure constante). L'accent est mis, dans cette partie, sur le rôle central que joue l'invariant  $k_P$  dans ces problèmes. L'ouvrage aborde aussi, bien que de manière plus marginale, le cas des opérateurs différentiels de degré plus élevé et covariants conformes de bidegré  $(a, b)$ . Enfin la troisième partie porte sur l'étude des fonctions symétriques

liées à certains tenseurs. Par exemple si on regarde le tenseur de Schouten  $A_g = Ric_g - \frac{1}{6}R_g g$  (où  $Ric_g$  est le tenseur de Ricci de  $g$  et  $R_g$  la courbure scalaire) sur une variété de dimension 4, on peut voir celui-ci comme un endomorphisme symétrique sur l'espace tangent de la variété et considérer ses 4 valeurs propres  $\lambda_i$  ; dans ce cas on définit la deuxième fonction symétrique par

$$\sigma_2(A_g) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4.$$

$\sigma_2$  possède des propriétés remarquables et l'ouvrage d'Alice Chang nous en propose quelques exemples (essentiellement en dimension 4, avec par exemple une preuve complète de l'existence d'une métrique à courbure de Ricci strictement positive dans une classe conforme donnée sous l'hypothèse que la courbure scalaire de la variété est strictement positive et que  $k_P$  est strictement positif).

L'ouvrage d'Alice Chang est écrit avec une très grande clarté et constitue une introduction idéale pour tous ceux qui voudraient s'initier à l'analyse non linéaire sur les variétés. L'ouvrage n'a comme seul défaut d'être trop court... Mais il semble que ce soit la règle dans cette collection.

Zidine Djadli,  
Université Joseph Fourier, Grenoble

---

### Random Fragmentation and Coagulation Processes

JEAN BERTOIN

University Press, Cambridge (UK), 2006. 288 p.

ISBN : 9780521867283. 40£

---

Les processus de fragmentation et de coalescence stochastiques décrivent des systèmes d'objets qui se disloquent ou coagulent de façon aléatoire et répétée au cours du temps. Le présent ouvrage est le premier à se concentrer sur l'étude de tels processus, où l'un de ces phénomènes a lieu (mais non les deux à la fois) d'une façon markovienne. Les hypothèses de base faites sur les modèles considérés sont que :

- Les différents objets ne sont représentés que par leur taille (masse, diamètre,...). Ceci exclut toute structure spatiale ou géométrique, et correspond à l'hypothèse de « champ moyen » en physique.
- Pour le cas de la fragmentation, les processus vérifient une propriété de branchement : les différents objets présents à l'instant  $t$  se disloquent de façon indépendante les uns des autres après  $t$ .
- Pour le cas de la coalescence, la façon dont un groupe d'objets coagule ne dépend que des caractéristiques de ce groupe (nombre et tailles des objets) et non du reste du système.

L'auteur donne un panorama des principaux modèles vérifiant ces hypothèses et dépendant d'un petit nombre de paramètres, en fonction desquels certains phénomènes typiques sont mis en évidence. Ainsi, Bertoin part de l'étude des chaînes de fragmentation (chapitre 1), où chaque objet reste dans le même état pendant un temps strictement positif avant de se fragmenter. Un outil crucial est que l'on dispose dans ce cas d'une notion discrète de généalogie du processus. Afin de procéder à la description de modèles plus complexes, où cette notion de généalogie disparaît, il est nécessaire de développer différentes notions de

partitions aléatoires, dont la notion de partition échangeable des entiers est la plus cruciale. Ceci est l'objet du chapitre 2. Sont alors introduites les fragmentations échangeables (chapitre 3), où les dislocations peuvent se produire sitôt après la formation des objets. Le chapitre 4 porte sur l'étude des processus de coalescence échangeables, dont la construction présente de fortes analogies avec celle des fragmentations échangeables. Enfin, le cinquième et dernier chapitre porte sur les coalescents stochastiques, où des paires d'objets fusionnent à des taux dépendant des masses des objets, et sur les relations existant entre ces processus et la célèbre équation de coagulation de Smoluchowski.

La littérature portant sur ces modèles et leurs ramifications forme un volume très important. Par souci de clarté et de pédagogie, l'auteur a choisi de présenter pour chacun de ces modèles les théorèmes fondamentaux et quelques applications, afin de permettre au lecteur de se faire facilement une idée des nombreuses méthodes impliquées dans leur étude. À la fin de chaque chapitre se trouve une abondante section de notes bibliographiques qui sont un précieux guide pour le lecteur désireux d'en apprendre plus sur un point particulier. L'ouvrage ne contient pas d'introduction à la théorie des probabilités, et s'adresse donc à un lecteur ayant déjà de bonnes notions dans ce domaine, disons de niveau M2. Le texte est cependant « auto-contenu », et rappelle au moment voulu les définitions et propriétés des chaînes de Markov de saut pur, des subordinateurs, des lois de Poisson-Dirichlet et de la théorie de Kingman des partitions échangeables, qui sont nécessaires à l'exposé.

Nous donnons un rapide aperçu linéaire des résultats. Dans le chapitre 1, les processus de fragmentation considérés sont tels que chaque fragment a un temps de vie strictement positif, au terme duquel il se brise en plusieurs morceaux, non-nécessairement en nombre fini. Ces processus peuvent se décrire par le biais de chaînes markoviennes branchantes, où les objets du système sont décrits par un élément de

$$\mathcal{S}^\downarrow = \{s = (s_1, s_2, \dots) : s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0 \text{ et } \lim s_i = 0\}$$

donnant la suite de leurs tailles. À chaque paire  $(\alpha, \nu)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\nu$  est une mesure finie sur  $\mathcal{S}^\downarrow$  portée par les suites  $s$  telles que  $s_1 \leq 1$ , Bertoin associe un processus de fragmentation *auto-similaire* d'indice  $\alpha$  et de *mesure de dislocation*  $\nu$ , dont la dynamique est la suivante. Chaque fragment de taille  $x$  laisse place avec un taux égal à  $\nu(\mathcal{S}^\downarrow)x^\alpha$  à une famille de fragments de tailles  $xs_j, j \geq 1$ , où  $s$  est une suite tirée aléatoirement selon la mesure  $\nu/\nu(\mathcal{S}^\downarrow)$ . On note  $(X(t), t \geq 0)$ , où  $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots) \in \mathcal{S}^\downarrow$ , le processus ainsi construit. Une définition différente, inspirée des cascades multiplicatives de Mandelbrot, en est également donnée, utilisant un système de marques aléatoires sur l'arbre généalogique constitué par l'ensemble des mots d'entiers. Bertoin base son étude des chaînes de fragmentations sur des méthodes issues de l'étude des marches aléatoires branchantes et des cascades multiplicatives. Ainsi, sous l'hypothèse *malthusienne* d'existence d'un  $p^* \geq 0$  et de  $p > 1$  tels que

$$\int_{\mathcal{S}^\downarrow} \left(1 - \sum_{i \geq 1} s_i^{p^*}\right) \nu(ds) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \left(\sum_{i \geq 1} s_i^{p^*}\right)^p \nu(ds) < \infty,$$

l'auteur introduit une *martingale intrinsèque* et une notion de lignée généalogique marquée au hasard. Ces deux principaux outils permettent de déterminer le comportement des chaînes de fragmentation en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\nu$ . Lorsque  $\alpha < 0$ , les petits fragments tendent à être détruits plus vite, ce qui entraîne un emballement du système et une surprenante propriété de *formation de poussière* : tous les fragments sont de taille nulle au bout d'un temps fini. Quand  $\alpha = 0$ , les tailles des fragments décroissent à vitesse exponentielle, ce qui est mis en évidence par le comportement en temps grand de la mesure

$$\rho_t = \sum_{i \geq 1} X_i(t)^{\rho^*} \delta_{t^{-1} \log X_i(t)}.$$

Cette dernière tend à se concentrer en une masse de Dirac, tandis que dans l'échelle  $t^{-1/2}$ , les logarithmes des tailles des fragments se répartissent de façon gaussienne autour de la valeur typique, un phénomène déjà observé par Kolmogorov dans des cas simples. Dans le cas  $\alpha > 0$ , les tailles des fragments décroissent comme  $t^{-\alpha}$ , et non plus à vitesse exponentielle. Le chapitre se conclut par l'étude de martingales additives et les résultats de grandes déviations pour  $\rho_t$  qui s'en déduisent, permettant l'étude de fragments atypiquement grands ou petits.

Le chapitre 2 se penche sur les relations qu'entretiennent trois notions différentes de partitions (de masse, d'intervalle ou des entiers). L'élément le plus important est la théorie de Kingman, montrant qu'une partition aléatoire des nombres entiers, invariante par l'action des permutations, est déterminée par la loi des fréquences asymptotiques (masses) de ses blocs. Cette dernière est une loi sur l'ensemble  $\mathcal{P}_m$  des partitions d'une masse unité, c'est-à-dire le sous-ensemble de  $S^1$  formé des éléments de somme au plus 1. Le chapitre décrit également une famille importante de partitions de masse aléatoires, obtenues via une partition de l'intervalle  $(0, 1)$  induite par un subordonateur, ce qui permet en particulier de définir les lois de Poisson-Dirichlet à deux paramètres. Ce chapitre est une excellente introduction à ces lois classiques et aux manières de calculer avec elles, et contient également quelques résultats moins connus de continuité en loi pour les réordonnements des partitions de masse biaisés par la taille (Proposition 2.3) et pour les partitions échangeables en fonction de leurs fréquences asymptotiques (Proposition 2.9).

Dans le chapitre 3, Bertoin introduit les fragmentations échangeables, qui sont en quelque sorte l'analogie des chaînes de fragmentation du chapitre 1 mais dans le cas où la mesure  $\nu$  peut être infinie. L'idée maîtresse est une méthode de « discrétisation de l'espace », consistant à jeter à l'origine des temps des marques aléatoires indépendantes  $U_1, U_2, \dots$  sur l'objet se fragmentant, puis à définir un processus échangeable à valeurs dans les partitions des entiers, dont les blocs à l'instant  $t$  sont constitués des indices des marques se retrouvant dans un même sous-objet de l'objet initial. Les masses des sous-objets se retrouvent en prenant les fréquences asymptotiques des blocs de la partition au temps  $t$ . Ceci impose néanmoins une restriction importante, qui est que les fragmentations ne peuvent être que conservatives ou dissipatives, c'est-à-dire que la masse totale des objets du système ne peut que décroître au cours du temps (on parlera à présent de masse des objets plutôt que de leur taille). Les fragmentations échangeables sont donc à valeurs dans les partitions de  $\mathbb{N}$ , et sont invariantes par l'action des permutations. Les fragmentations dites *homogènes*  $(\Pi(t), t \geq 0)$  sont telles que sachant

$\Pi(t) = \pi$ , l'évolution de  $\Pi$  au-delà du temps  $t$  s'obtient en intersectant (fragmentant) chaque bloc de  $\pi$  avec une copie indépendante de  $\Pi$ . La propriété cruciale est que l'étude de ces processus se ramène à celle des restrictions  $\Pi|_{[n]}$  de  $\Pi$  aux  $n$  premiers entiers. L'étude des taux de transition de ces chaînes restreintes permet de classifier les lois des fragmentations échangeables homogènes en fonction d'un couple  $(c, \nu)$ , où

- $c \geq 0$  est un paramètre d'érosion déterminant le taux auquel des singletons aléatoires se détachent de chaque fragment : ceci correspond à un phénomène de « fonte » continue des fragments, qui n'existait pas dans les cas étudiés au chapitre 1

- $\nu(ds)$  est une certaine mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{P}_m$  gouvernant, comme au chapitre 1, le taux auquel un objet de masse  $x$  se disloque soudainement en fragments de masses  $xs_1, xs_2, \dots$

Bertoin donne une construction poissonnienne des fragmentations homogènes, qui rappelle fortement la décomposition de Lévy-Itô des processus de Lévy, et montre la propriété de Markov des fragmentations de masses qui leur sont associées. L'évolution du fragment marqué est également étudiée, et se décrit comme un sous-ordonneur multiplicatif dont les caractéristiques dépendent de façon simple de  $\nu$  et  $c$ . En utilisant une notion de *ligne d'arrêt*, on peut enfin construire une famille de fragmentations échangeables auto-similaires d'indice  $\alpha$  en partant de la construction des fragmentations homogènes, qui sont celles pour lesquelles  $\alpha = 0$ , et en effectuant des changements de temps cohérents dans l'évolution des différents fragments. Le chapitre s'achève par une loi des grands nombres pour la mesure empirique  $\rho_t$  généralisant celle prouvée au chapitre 1.

Le chapitre 4 étudie les coalescents échangeables, dont la caractérisation présente de nombreuses similarités avec les fragmentations échangeables. Bertoin commence par introduire le coalescent de Kingman, intervenant dans la limite du modèle de population de Wright-Fisher. Pour ce coalescent, toutes les collisions font intervenir deux fragments, pris uniformément au hasard parmi toutes les paires de fragments. C'est à nouveau un argument de restriction des partitions aux premiers entiers qui permet de faire partir ce processus d'un nombre infini de blocs. Plus généralement, un coalescent échangeable  $(\Pi(t), t \geq 0)$  est un processus échangeable tel que sachant  $\Pi(t) = \pi$ , l'évolution de  $\Pi$  après le temps  $t$  s'obtient en coagulant les blocs de  $\pi$  à l'aide d'une copie indépendante de  $\Pi$ . Ici, la coagulation  $\text{Coag}(\pi, \pi')$  d'une partition  $\pi$  par  $\pi'$  est la partition obtenue en numérotant les blocs de  $\pi$  en  $\pi_1, \pi_2, \dots$  et en prenant les réunions des  $\pi_i$  dont les indices sont dans le même bloc de  $\pi'$ . Comme pour les fragmentations échangeables, la loi d'un coalescent échangeable se caractérise par un couple  $(c, \nu)$ , où

- $c \geq 0$  est le taux auquel chaque paire de blocs fusionne, et correspond à une partie « coalescent de Kingman », et

- $\nu$  est une mesure  $\sigma$ -finie sur  $\mathcal{P}_m$ , qui détermine les coagulations soudaines et simultanées : avec un taux  $\nu(ds)$ , on prend une partition échangeable  $\pi'$  avec fréquences asymptotiques  $\mathbf{s}$ , et on fait sauter le processus de l'état  $\pi$  à l'état  $\text{Coag}(\pi, \pi')$ .

Il est ensuite donné une représentation des coalescents dits « simples », pour lesquels  $\nu$  est portée par les éléments  $\mathbf{s}$  tels que  $s_2 = 0$ , à l'aide de *flots de ponts*. Ici,

un pont est un processus croissant de  $[0, 1]$  dans lui-même, valant 0 en 0 et 1 en 1, à accroissements échangeables. Par un procédé d'approximation, partant d'un coalescent où la mesure  $\nu$  est finie, il est montré comment on peut construire un flot aléatoire  $(B_{t,t'}, -\infty < t \leq t' < \infty)$  de tels ponts, tels que le processus des sauts de  $(B_{0,t}, t \geq 0)$  vu comme processus à valeurs dans  $\mathcal{P}_m$  est le processus des masses du coalescent simple associé à  $\nu$ . L'un des intérêts des coalescents est qu'ils peuvent être interprétés comme des modèles de population étudiés lorsque l'on retourne le temps. On peut ainsi interpréter le flot de pont dual,  $(B_{-t',-t}, -\infty < t \leq t' < \infty)$  comme un modèle de population, décrit comme processus à valeurs mesures qui généralise les processus de Fleming-Viot, et dont les propriétés de *fixation* (situation où la population à l'instant présent descend d'un unique ancêtre) sont étudiées. Enfin, le chapitre se termine par l'étude du coalescent de Bolthausen-Sznitman, qui apparaît entre autres dans l'étude de verres de spin (modèle GREM), et dont le flot de ponts associé s'exprime en termes de ponts de subordinateurs stables, faisant intervenir des propriétés notables de « composition » et de dualité coalescence-fragmentation des lois de Poisson-Dirichlet.

Enfin, le chapitre 5 se penche sur l'étude de processus de coalescence d'objets massifs, où chaque paire d'objets de masses  $x, y$  fusionne en un unique objet à un taux  $\kappa(x, y)$ , pour une fonction  $\kappa$  symétrique et positive, ce qui peut être vu comme généralisation du coalescent de Kingman ( $\kappa(x, y) = 1$ ). Cependant, les méthodes employées sont très différentes, du fait de l'absence de structure échangeable. *A priori*, un tel processus n'est correctement défini que si le système d'objets est fini. Le résultat fondamental de cette partie est que si le noyau  $\kappa$  vérifie des conditions de type « Lipschitz-local » : pour tout  $a > 0$ , il existe  $c_a > 0$  tel que

$$|\kappa(x, y) - \kappa(x', y')| \leq c_a(|x - x'| + |y - y'|), \quad x, y, x', y' \in [0, a],$$

alors il est possible de construire un tel processus issu de n'importe quel état initial, avec masses  $s_1 \geq s_2 \geq \dots$  de limite nulle et de somme finie, et ce processus s'obtient par approximation par des systèmes finis. Le chapitre se poursuit par l'obtention de limites hydrodynamiques lorsque le noyau  $\kappa$  est sous-multiplicatif,  $\kappa(x, y) \leq xy$ . Précisément, on considère le processus  $(X^{[k]}(t), t \geq 0)$  issu de  $k$  objets de masse 1 et donnant à l'instant  $t$  les masses des différents objets contenus dans le système, rangés par ordre décroissant. Si

$$n_t^{[k]}(x) = \frac{1}{k} \text{Card} \{j \geq 1 : X_j^{[k]}(t/k) = x\}, \quad x \geq 1$$

est la concentration des objets de masse  $x$  à l'instant  $t/k$ , alors pour  $0 \leq t \leq 1$ ,  $n_t^{[k]}(x)$  converge dans  $L^2$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  vers une fonction déterministe  $(n_t(x), x \in \mathbb{N}, t \geq 0)$  qui est solution de l'équation de Smoluchowski :

$$\frac{dn_t(x)}{dt} = -n_t(x) \sum_{y \in \mathbb{N}} n_t(y) \kappa(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{y=1}^{x-1} n_t(y) n_t(x-y) \kappa(y, x-y).$$

La preuve repose sur une construction remarquable du coalescent multiplicatif  $\kappa(x, y) = xy$  en termes du graphe d'Erdős-Rényi, et un argument de couplage du coalescent sous-multiplicatif avec le coalescent multiplicatif. Le livre s'achève avec l'étude du coalescent additif  $\kappa(x, y) = x + y$ , que l'on peut construire, partant de  $n$  objets de masse 1, à l'aide d'un processus de forêts coalescentes à  $n$  sommets.

Ceci permet de construire le *coalescent additif standard*, issu au temps  $-\infty$  d'objets de masses infinitésimales. La boucle est bouclée par le fait que le processus renversé en temps du coalescent additif standard est le processus des masses d'une fragmentation auto-similaire échangeable (!) dont les caractéristiques  $(\alpha, c, \nu)$  sont données explicitement.

Le lecteur aura sans doute pu se rendre compte de la grande richesse des méthodes intervenant dans l'étude des processus de fragmentation et de coalescence. Un ouvrage donnant une introduction à ces méthodes et des structures sous-jacentes était plus que nécessaire. Une remarquable efficacité pédagogique, un style concis et limpide et une bibliographie très fournie en feront certainement une référence indispensable pour tout étudiant ou chercheur en probabilités intéressé par l'étude de ces processus, qui interviennent dans de très nombreux domaines appliqués.

Gregory Miermont,  
Université Paris-Sud