MATHÉMATIQUES

La preuve originale de S. Mazur pour son théorème sur les algèbres normées

Pierre Mazet[1]

1. Introduction

Théorème 1. *Toute $\mathbb{C}$-algèbre normée qui est un corps est isomorphe au corps des nombres complexes.*

C'est une version classique d'un énoncé connu sous le nom de Théorème de Gelfand-Mazur.

Historiquement le premier énoncé de ce type est celui de Stanislaw Mazur publié dans les *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* [9] daté du 25 juin 1938 sous la forme :

Théorème 2. *Si, dans un anneau linéaire $\mathfrak{A}$, une norme est définie satisfaisant – outre des conditions habituelles – à la condition $\|A.B\| = \|A\|.\|B\|$, l'anneau $\mathfrak{A}$ équivaut (c.-à-d. peut être représenté en conservant les opérations et la norme) soit au corps des nombres réels, soit à celui des nombres complexes, soit au corps des quaternions réels ; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif) et la norme satisfait à la condition plus faible $\|A.B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$, il est isomorphe (c.-à-d. représentable homéomorphiquement avec conservation des opérations) à un des trois corps mentionnés.*

Ces résultats sont repris sous une forme légèrement différente dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* du 28 novembre 1938 [1] où l'on trouve :

Théorème 3. *Chaque domaine de rationalité du type (B^*) est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.*

(Dans la terminologie de Mazur, un domaine de rationalité est une $\mathbb{R}$-algèbre qui est un corps ; elle est dite de type B^* lorsqu'elle est munie d'une norme d'algèbre.)

En restreignant cet énoncé au cas des $\mathbb{C}$-algèbres on obtient immédiatement l'énoncé 1

Peu de temps après, Israil Moiseevic Gelfand dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* du 27 mars 1939 [2] présente son programme d'études des $\mathbb{C}$-algèbres normées et énonce :

[1] Université Pierre et Marie Curie, Institut de mathématiques de Jussieu (UMR 7586)

Théorème 4. *The ring of residues to a maximal ideal is the corpus of complex numbers.*

Ce qui est équivalent à l'énoncé 1.

Si ces notes contiennent les énoncés indiqués, elles ne contiennent aucune preuve. Toutefois la note de Gelfand annonce la parution de la démonstration des énoncés dans le Recueil Mathématique de Moscou.

Effectivement en 1941, dans son article fondateur de la théorie des algèbres normées, Gelfand [3] donne tous les développements annoncés dans la note [2] et, en particulier, la preuve du théorème 4. Cette preuve, particulièrement élégante, s'appuie sur la théorie des fonctions holomorphes et le théorème de Liouville.

Parallèlement, Mazur ne publie aucune preuve de son énoncé et, à ma connaissance, il faut attendre le livre [6] ([7] pour une version en anglais) de W. Zelazko (élève de S. Mazur) en 1968 pour lire la preuve originale de Mazur telle qu'il la lui a transmise. Cette preuve, comme celle de Gelfand, s'appuie sur le théorème de Liouville. La différence fondamentale est que, l'énoncé de Mazur étant dans le cadre des algèbres réelles, on y considère la partie réelle de $\dfrac{1}{X-\lambda}$ et des fonctions harmoniques alors que Gelfand considère $(x-\lambda e)^{-1}$ et des fonctions holomorphes.

La preuve de Mazur est donc tout aussi élégante que celle de Gelfand, c'est pourtant cette dernière qui est restée la preuve la plus utilisée pour démontrer l'énoncé 1. Il est d'ailleurs curieux de constater que, en 1987, dans sa note [5] sur les contributions de Mazur à l'analyse fonctionnelle, G. Köthe mentionne le théorème 3 mais cite immédiatement Gelfand pour la preuve de l'énoncé. De même, en 1991, dans l'article de [10] ([11] pour une version anglaise et [8] pour une version française) consacré aux théorèmes de Hopf et de Gelfand-Mazur, R. Remmert dit : *« Si Hopf avait eu connaissance en 1940 de la note aux* Comptes Rendus *de Mazur ; il aurait sans aucun doute démontré ce théorème »* . On a donc l'impression que l'absence d'une preuve par Mazur de son énoncé créait un manque réel comblé par Gelfand quelques années plus tard. Peut-être même certains mathématiciens ont douté que Mazur ait effectivement obtenu une preuve complète de son énoncé. Nous allons voir que cette preuve existait bien et comment elle a pu être retrouvée.

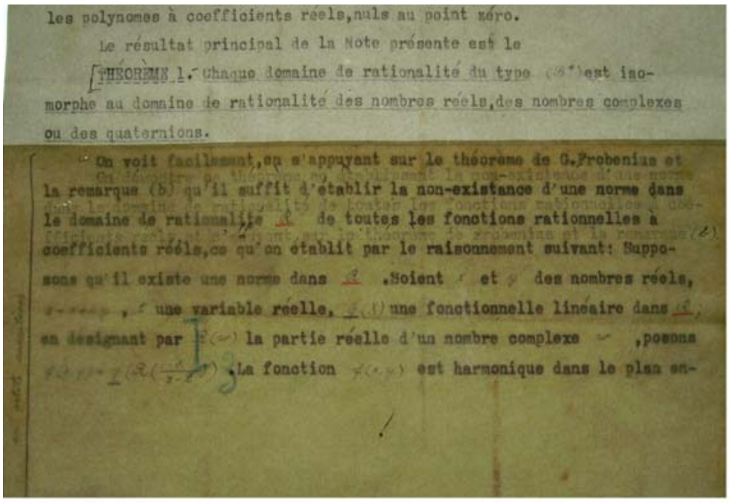
2. La preuve de Mazur retrouvée

C'est pour répondre à une question demandant une preuve élémentaire du théorème de Gelfand-Mazur que j'ai voulu trouver la preuve originelle de Mazur. Constatant qu'elle n'avait jamais été publiée j'ai essayer de retrouver dans les livres une explication à cette absence de publication. c'est alors que j'ai été intrigué par une note en bas de page dans le livre [6] de W. Zelazko. Le livre étant rédigé en polonais (j'ignorais alors l'existence de la version anglaise [7]), je n'ai pas réalisé tout de suite qu'il comportait la preuve transmise par Mazur à Zelazko. C'est donc en faisant traduire cette note en bas de page que j'ai appris que le manuscrit original de S. Mazur comportait la démonstration mais que celle-ci avait dû être supprimée car la première version de la note avait été jugée trop longue.

Afin d'approfondir ce point j'ai demandé à C. Gilain d'aller voir aux archives de l'académie des sciences de Paris sous quelle forme était le manuscrit originel de Mazur. C'est ainsi qu'il a découvert qu'immédiatement après l'énoncé principal (théorème 3) le manuscrit était caché par une feuille de papier collée qui recouvrait toute la démonstration et sur laquelle se trouve la petite phrase que l'on trouve actuellement dans la note indiquant très succinctement la démarche :

On démontre ce théorème en établissant la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, et en s'appuyant sur le théorème de Frobenius et la remarque b.

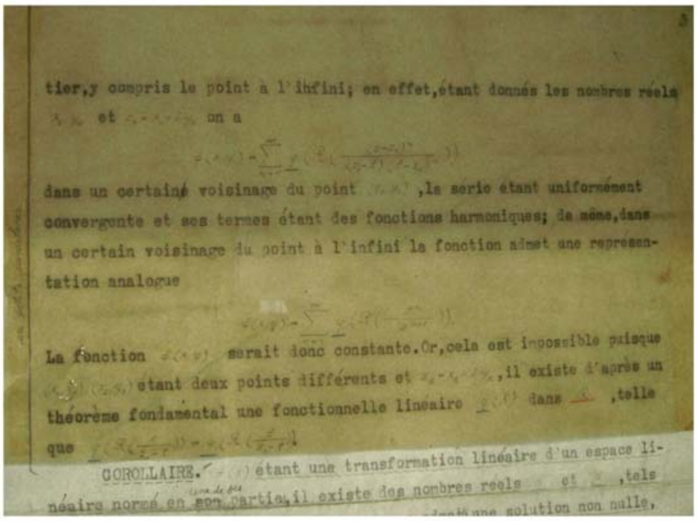
Heureusement, les feuilles de papier utilisées sont suffisamment fines pour que l'on puisse lire les parties cachées par transparence. On trouvera ci-dessous les photos des zones concernées ; la démonstration cachée apparaît dans les parties plus foncées de la photo qui sont vues par transparence. La phrase indiquée précédemment apparaît en plus clair par dessus le texte de la preuve dans la première photo.


les polynomes à coefficients réels, nuls au point zéro.

Le résultat principal de la Note présente est le

THÉORÈME 1. Chaque domaine de rationalité du type est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.

On voit facilement, en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existance d'une norme dans le domaine de rationalité de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant: Supposons qu'il existe une norme dans . Soient et des nombres réels, , une variable réelle, une fonctionnelle linéaire dans , en désignant par la partie réelle d'un nombre complexe , posons . La fonction est harmonique dans le plan en-


tier, y compris le point à l'infini; en effet, étant donnés les nombres réels et on a

dans un certain voisinage du point , la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques; de même, dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue

La fonction serait donc constante. Or, cela est impossible puisque étant deux points différents et , il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire dans , telle que

COROLLAIRE. étant une transformation linéaire d'un espace linéaire normé en son partie, il existe des nombres réels et , tels

une solution non nulle,

On pourra noter sur la marge gauche l'inscription verticale « en petits caractères ». Il s'agit probablement d'une tentative de S. Mazur pour raccourcir le manuscrit sans faire disparaître la preuve.

Voici donc le texte de cette preuve :

On voit facilement en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité $\mathcal{R}$ de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant : supposons qu'il existe une norme dans $\mathcal{R}$. Soient x et y des nombres réels, $z = x + iy$, t une variable réelle, $\varphi(X)$ une fonctionnelle linéaire dans $\mathcal{R}$; en désignant par $\mathcal{R}(w)$ la partie réelle d'un nombre complexe w, posons $f(x, y) = \varphi(\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z-t})\Big)$. La fonction $f(x, y)$ est harmonique dans le plan entier, y compris le point à l'infini ; en effet, étant donnés les nombres réels x_0, y_0 et $z_0 = x_0 + iy_0$ on a

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{(z-z_0)^n}{(z_0-t)(t-z_0)^n})\Big)$$

dans un certain voisinage du point (x_0, y_0), la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques ; de même dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\Big(\mathcal{R}(\frac{t^n}{z^{n+1}})\Big) \ .$$

La fonction $f(x, y)$ serait donc constante. Or cela est impossible puisque $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ étant deux points différents et $z_k = x_k + iy_k$, il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire $\varphi(X)$ dans $\mathcal{R}$ telle que

$$\varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z_1-t})\Big) \neq \varphi\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z_2-t})\Big) \ .$$

On notera d'ailleurs une légère erreur dans ce manuscrit puisque la sommation dans les développements en série indiqués doit être faite pour n allant de 0 à l'infini et non de 1 à l'infini.

3. Commentaires sur les énoncés de Mazur et de Gelfand et sur les preuves respectives.

Bien que très voisins, les énoncés de Mazur et de Gelfand relèvent de préoccupations différentes. Le travail de Mazur est dans la lignée du théorème de G. Frobenius [4] qui affirme essentiellement que les seuls corps qui soient des $\mathbb{R}$-algèbres de dimension finie sont, à isomorphisme près, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$. On trouvera d'ailleurs une intéressante étude sur les problèmes de ce type dans l'article de R. Remmert de [10] (ou [11] ou [8]).

En fait G. Frobenius montre que les corps mentionnés sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres sans diviseur de 0 qui ne possèdent pas d'élément transcendant (ce qui s'applique évidemment aux corps de dimension finie). Le but de Mazur est d'étendre ce résultat en remplaçant l'hypothèse « de dimension finie » par l'hypothèse « normée ». Tout revient donc à prouver qu'il n'y a pas de norme d'algèbre sur le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients réels. L'étude se place donc délibérément dans le cadre des scalaires réels.

De son côté, Gelfand souhaite montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et ses caractères (c'est-à-dire les morphismes de cette algèbre vers $\mathbb{C}$). Le contexte est donc celui des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach. Ce contexte permet alors de développer la théorie des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ vers une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et d'obtenir la preuve que nous connaissons. Cette preuve est alors très rapide mais suppose des préliminaires sur la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, ce qui prend plusieurs pages dans l'article de Gelfand. La preuve de Mazur paraît donc sensiblement plus rapide. On doit cependant noter qu'elle est très succincte au niveau des justifications. Il suffit, pour s'en convaincre de voir la preuve détaillée présentée par Zelazko dans [6] ou [7].

Il faut par ailleurs remarquer que le fait que les espaces normés considérés par Gelfand sont complets est utile pour définir la notion de fonction holomorphe alors que la preuve de Mazur montre que cette hypothèse de complétude est inutile (il est d'ailleurs facile de déduire les cas général à partir du cas des algèbres complètes). On peut donc dire que, si le cadre utilisé par Gelfand lui permet une preuve particulièrement élégante, celui de Mazur consistant à prouver la non existence d'une norme d'algèbre sur $\mathbb{R}(X)$ permet d'expliciter plus clairement le fond du problème.

La similitude des deux preuves peut donner à penser qu'il y a eu un échange entre Mazur et Gelfand mais je n'ai pas pu élucider ce point.

Il est par ailleurs intéressant de noter que les deux preuves font appel au théorème de Hahn-Banach et donc à l'axiome du choix pour appliquer le théorème de Liouville à des fonctions à valeurs scalaires. Plus précisément, Mazur fait référence à « un théorème fondamental » sans le citer plus explicitement tandis que Gelfand invoque un « théorème de Hahn ». Il est cependant facile de contourner cette utilisation de l'axiome du choix en utilisant le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques et en remarquant que la norme de la fonction utilisée est sous-harmonique.

Ainsi, le théorème de Gelfand-Mazur est réputé pour avoir une démonstration très simple pourvu que l'on utilise quelques notions assez sophistiquées comme la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de dimension infinie et le théorème de Hahn-Banach. En fait il est assez facile de contourner ces notions délicates en revenant aux deux principes fondamentaux de cette preuve (que ce soit dans la version de Mazur ou celle de Gelfand) à savoir la formule de la moyenne et le principe du maximum qui en découle. C'est une telle preuve que je propose dans la sections suivante.

4. Une preuve élémentaire ?

Il s'agit donc de prouver le théorème 1.

Raisonnons par l'absurde et considérons une $\mathbb{C}$-algèbre normée A qui est un corps différent de $\mathbb{C}$. En notant e l'élément unité de A, il y a donc un élément a dans A qui n'appartient pas $\mathbb{C}e$. Ainsi, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $a - \lambda e$ n'est pas nul, donc est inversible, ce qui permet d'introduire la fonction $\varphi : \lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ de $\mathbb{C}$ vers A. Montrons alors que l'étude de cette fonction aboutit à une contradiction.

4.1. Quelques remarques simples.

La relation $\dfrac{\lambda}{X-\lambda} = \dfrac{X}{X-\lambda} - 1$ prouve $\lambda\varphi(\lambda) = a\varphi(\lambda) - 1$, d'où

$$|\lambda| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \|a\| \cdot \|\varphi(\lambda)\| + 1 \qquad \text{et, si } |\lambda| > \|a\|,\ \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

En particulier on a :

$$\|\varphi(\lambda)\| \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad |\lambda| \to +\infty \cdot \tag{1}$$

La relation $\dfrac{1}{X-\lambda} - \dfrac{1}{X-\mu} = \dfrac{\lambda-\mu}{(X-\lambda)(X-\mu)}$ donne

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) = (\lambda-\mu)\varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ .$$

On en déduit $\big|\|\varphi(\lambda)\| - \|\varphi(\mu)\|\big| \leqslant |\lambda-\mu| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \cdot \|\varphi(\mu)\|$, d'où l'on tire

$$\Big|\frac{1}{\|\varphi(\lambda)\|} - \frac{1}{\|\varphi(\mu)\|}\Big| \leqslant |\lambda-\mu|\ .$$

Cela prouve la continuité de $\dfrac{1}{\|\varphi(\lambda)\|}$ et donc de $\|\varphi(\lambda)\|$ comme fonction de λ.

4.2. Preuve du théorème.

Pour α fonction de $\mathbb{C}$ dans un groupe additif définissons $\Delta\alpha$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par :

$$\Delta\alpha(\lambda, t) = \alpha(\lambda+t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}^2t)\ .$$

Nous utiliserons en particulier $\alpha = \varphi$, $\alpha = \|\varphi\|$ et $\alpha = N$ où $N(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}$.

On vérifie aisément $\Delta N(\lambda, t) = 3\lambda\bar{\lambda} + 3t\bar{t}$.
Par ailleurs, la relation

$$\frac{1}{X-t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}^2t} = \frac{3}{X} + \frac{3t^3}{X(X-t)(X-\mathrm{j}t)(X-\mathrm{j}^2t)}$$

fournit (en substituant $a-\lambda$ à X)

$$\Delta\varphi(\lambda, t) = 3\varphi(\lambda) + 3t^3\varphi(\lambda)\varphi(\lambda-t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}^2t)\ .$$

Compte tenu de la continuité de φ, on a donc, pour λ fixé :

$$\text{pour } t \to 0, \quad \Delta\varphi(\lambda, t) = 3\varphi(\lambda) + O(t^3). \tag{2}$$

On a clairement

$$\Delta\|\varphi\|(\lambda, t) \geqslant \|\Delta\varphi(\lambda, t)\|,\ \text{ d'où } \Delta\|\varphi\|(\lambda, t) \geqslant 3\|\varphi(\lambda)\| + O(t^3)\ .$$

Introduisons alors, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $\psi = \|\varphi\| + \varepsilon N$. Les résultats précédents prouvent, pour λ fixé, $\Delta\psi(\lambda, t) \geqslant 3\psi(\lambda) + 3\varepsilon t\bar{t} + O(t^3)$; il s'ensuit que, dès que $|t|$ est suffisamment petit mais non nul, on a $\Delta\psi(\lambda, t) > 3\psi(\lambda)$. En particulier, dans ces conditions, l'un au moins des $\psi(\lambda-t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}^2t)$ est strictement supérieur à $\psi(\lambda)$. On peut donc conclure qu'en aucun point de $\mathbb{C}$, la fonction ψ ne peut présenter un maximum local.

Choisissons alors un $R > 0$, sur le compact $\overline{D}(0, R)$ la fonction ψ qui est continue atteint un maximum. D'après le résultat précédent ce maximum ne peut être atteint à l'intérieur du disque, il est donc atteint sur la frontière, d'où la majoration :

$$\psi(0) = \|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \psi(\lambda) = \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| + \varepsilon R^2. \tag{3}$$

En faisant tendre ε vers 0 la relation précédente donne

$$\|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| \ ;$$

en faisant tendre ensuite R vers l'infini, on obtient, grâce à (1), $\|\varphi(0)\| = 0$ ce qui fournit une contradiction puisque φ n'est jamais nulle et achève la démonstration.

Remerciements :

Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur W. Zelazko, d'une part pour son livre dont la note en bas de page a été le point de départ de cette recherche et d'autre part pour les informations personnelles qu'il a pu me donner sur S. Mazur. Mes remerciements vont également à mon collègue C. Gilain qui m'a introduit dans les archives de l'académie des sciences de Paris et m'a donné de nombreux conseils utiles pour mener à bien ce travail.

5. Références

[1] S. Mazur *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci., Paris, **207** (1938), 1025-1027.
[2] I. Gelfand *On normed rings*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, **23** (1939), 430-432.
[3] I. Gelfand *Normierte Ringe*,Matem. Sbornik, **51** (1941), 3-24.
[4] G. Frobenius *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, J. reine ang. Math. **84** (1878), 1-63.
[5] G. Köthe *Stanislaw Mazur's contributions to functional analysis*, Math. Ann. **277** (1987), 489-528.
[6] W. Zelazko *Algebry Banacha*, Biblioteka Matematyczna 32. Warszawa : Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (1968).
[7] W. Zelazko *Banach algebras*,Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. Amsterdam : Elsevier Publishing Company (1973(.
[8] H-D. Ebbinghaus, H. Hermès, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert *Les nombres. Leur histoire, leur place et leur rìle*, Vuibert. Paris (1998).
[9] S. Mazur *Sur les anneaux linéaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques **17** (1938) p. 112.
[10] H-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert , Springer-Lehrbuch, Springer (1992).
[11] H-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1996).