LIVRES

Tauberian Theory A Century of Developments
J. Korevaar
Springer Verlag, 2004. xv+483 p. ISBN : 3-540-21058-X. $ 109.00

Le contenu du livre de Jacob Korevaar « Tauberian Theory A Century of Developments » passe les promesses du titre, puisque débutant en 1897 avec le résultat fondateur de Tauber $\sum a_n x^n \to l$ quand $x \to 1$ et $na_n \to 0$ implique $S_n = \sum_0^n a_k \to l$ (il démarre même en 1821 avec le théorème de Cauchy sur les moyennes arithmétiques) et continuant par le célèbre théorème de Littlewood de 1911 (on peut chez Tauber supposer seulement na_n borné), ce livre visite (presque) tous les développements de la théorie taubérienne dans la première moitié du 20$^{\text{e}}$ siècle (Hardy, Littlewood, Wiener, etc...) pour continuer par des résultats allant juqu'au début des années 2000, avec au passage des applications à la théorie des nombres (bien sûr...), aux fonctions entières, aux probabilités... L'ouvrage, de 420 pages, est divisé en sept chapitres que nous allons analyser un par un.

Le chapitre 1 porte sur les théorèmes taubériens réels du type Hardy-Littlewood pour des séries entières, de Dirichlet, de Lambert (ou des transformées de Laplace) qui relient le comportement de la série génératrice d'une suite a_n pour des valeurs réelles de la variable au comportement de la série $\sum a_n$ elle-même ; ce chapitre, comme le reste du livre, est extrêmement fouillé, et laisse dans l'ombre très peu d'aspects : les procédés de sommation sont comparés, les grands théorèmes sont démontrés en détail (comme celui de Littlewood par la méthode de Karamata ou celle de Wielandt), et leur optimalité est souvent établie, par exemple celle de la condition $a_n = O(1/n)$ dans le théorème de Littlewood, par une méthode différente de la méthode initiale (sommes d'exponentielles), mais qui revient souvent dans la suite. On trouve aussi le théorème des « high indices » (si $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q > 1$, aucune condition sur les coefficients a_n n'est requise dans le théorème taubérien correspondant à la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n x)$, et l'optimalité de ce nouveau théorème (Rudin 1966) est également prouvée.

Le chapitre 2 développe surtout le monumental papier de N.Wiener à Annals of Maths (1932), avec sa théorie des noyaux $K \in L^1$ « réguliers », i.e. ceux qui vérifient

$$(1) \quad K * \varphi = 0 \,\text{et}\, \varphi \,\text{continue bornée} \Longrightarrow \varphi = 0.$$

Le célèbre critère de régularité par la non-annulation de la transformée de Fourier de K est établi par une méthode utilisant un minimum de théorie des algèbres de Banach, et très proche de la méthode de Wiener pour les séries de Fourier absolument convergentes. De nombreuses formulations équivalentes à (1) sont données, et surtout des applications aux théorèmes taubériens, incluant celle au procédé de Lambert, rendue possible par l'absence de zéros de la fonction zêta sur la droite $\Re s = 1$, qui elle-même conduit à une preuve simple du théorème des nombres premiers, via la convergence de la série $\sum \frac{\Lambda(n)-1}{n}$. L'auteur donne aussi une preuve, due à lui-même, du théorème de Wiener (pour des familles de noyaux), qui utilise le langage et le formalisme des distributions. Ce chapitre se clôt par une jolie application (Rudin 1978) de la théorie taubérienne aux fonctions harmoniques positives, sous forme de la réciproque du théorème de convergence non-tangentielle de Fatou.

Le chapitre 3 est consacré aux théorèmes taubériens complexes, en commençant par le résultat fondateur de Fatou (et son extension par Riesz aux séries de Dirichlet) :

Si $f(z) = \sum a_n z^n$ *se prolonge analytiquement en* 1 *et* $a_n \to 0$, *alors* $\sum a_n$ *converge.*

Le grand résultat de ce chapitre est bien sûr le théorème de Wiener-Ikehara, qui est prouvé de deux façons : l'une essentiellement due à Bochner, et l'autre à Graham et Vaaler, qui utilise un encadrement de la fonction exponentielle négative (prolongée par zéro aux réels négatifs) par des restrictions à l'axe réel de fonctions entières de type exponentiel, ce qui permet de donner une version localisée du théorème. Mais on trouve aussi le théorème taubérien de Newman (1980), qui donne une preuve plus simple du théorème précédent quand on fait une hypothèse plus forte (mais souvent vérifiée) sur le prolongement de la fonction génératrice ; la preuve initiale est légèrement épurée par le choix de contours plus simples, ce qui est typique du soin et de la maîtrise manifestés par l'auteur tout au long de l'ouvrage. On regrettera juste l'absence d'un énoncé (à défaut d'une preuve) du théorème taubérien de Delange (1954) qui est l'extension naturelle (et très utile !) du théorème de Wiener-Ikehara au cas d'un pôle multiple, ou d'une singularité logarithmique. Mentionnons pour finir des versions très fines du théorème de Fatou, avec une jolie application à la théorie des opérateurs (Esterle 1983, Katznelson-Tzafriri 1986) :

Si l'opérateur L *est à puissances bornées et* $\sigma(L) \cap C(0,1) = \{1\}$, *alors* $||L^n - L^{n+1}|| \to 0$

Le chapitre 4 est un chapitre très spécialisé de la théorie de Karamata sur les fonctions L à variation lente ($\frac{L(\lambda u)}{L(u)} \to 1$ quand $u \to \infty$, $\forall \lambda > 1$) ou α-régulières ($L(u) = u^\alpha L_0(u)$, L_0 à variation lente, α réel) ; deux caractérisations (par représentation intégrale ou par comportement asymptotique) de ces fonctions sont données, ainsi que le théorème taubérien de Karamata pour les transformées de Laplace de fonctions croissantes S :

$\varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} S(t)\, dt \sim A\Gamma(\alpha+1)\Phi(\frac{1}{\varepsilon})$, *quand* $\varepsilon \to 0$ *et* Φ α*-régulière impliquent* $S(x) \sim A\Phi(x)$, *quand* $x \to \infty$.

D'innombrables variantes sont données (variation lente de Beurling, transformée de Stieltjes, etc...) ainsi qu'un autre théorème taubérien reliant (dans le cadre de la variation régulière) le comportement du logarithme d'une fonction croissante et du logarithme de sa transformée de Laplace, comportement qui lui-même entraîne un équivalent (dû à Hardy et Ramanujan) du logarithme de la fonction de partition $p(n)$ quand n tend vers ∞. Le comportement asymptotique de la fonction de partition elle-même (toujours dû à Hardy et Ramanujan) est également donné, comme conséquence d'un théorème taubérien délicat d'Ingham. On voit que l'auteur n'esquive pas les difficultés !

Le chapitre 5 est assez court, et présente des extensions de la théorie classique. Il contient notamment une application assez convaincante de la théorie de Gelfand à un théorème difficile de Beurling (1938), extension aux algèbres à poids $L^1(\omega)$

du résultat de Wiener dans le cas où le poids est non quasi-analytique (de façon équivalente où l'algèbre est régulière). Ce théorème peut s'énoncer ainsi de façon abrégée

Si un idéal I de $L^1(\omega)$ n'a pas de zéros réels, il contient l'idéal J des fonctions dont la transformée de Fourier (sur $\mathbb{R}$) a un support compact.

L'auteur prouve aussi le théorème de Wiener sur les inverses de séries de Fourier absolument convergentes, qui sert lui-même à prouver un théorème probabiliste d'Erdös-Feller-Pollard dans le cas d'une espérance finie (à vrai dire, les choses sont exprimées ici d'une façon non- probabiliste). L'autre application de l'analyse fonctionnelle abstraite (espaces de Fréchet de suites) est moins convaincante, puisqu'il faut subir un très grand nombre de définitions pour arriver au théorème des « high indices » de Hardy-Littlewood, dont on a vu une preuve simple et directe au chapitre 1.

Le chapitre 6 est difficile, et presque entièrement consacré à la méthode de sommabilité de Borel et à ses variantes :

$$e^{-x}\sum_{0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} \to A \text{ quand } x \to \infty.$$

Ici, la condition taubérienne est $|a_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$, ou plus généralement (condition de Valiron) $S_m - S_n \to 0$ si $\sqrt{m} - \sqrt{n} \to 0$. Cette méthode de Borel est incluse dans une catégorie de méthodes Γ_λ dépendant d'un paramètre $\lambda > 0$, dites méthodes de cercle, et qui moyennant des efforts se ramènent aux méthodes de Wiener du chapitre 2 pour un noyau gaussien $K_\lambda(x,y) = e^{-\lambda(x-y)^2}$. Mais Korevaar donne une preuve indépendante du théorème taubérien de Valiron, par un argument de famille normale. On retrouve le canevas du chapitre 1, avec un théorème des « high indices » :

Si $\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} \geq \delta$ et $\sum a_k x^{p_k}$ est B-sommable, alors $\sum a_k$ converge,
lui aussi optimal. Deux jolies applications de ces théorèmes sont données, l'une à la comparaison des croissances sur deux demi-droites des fonctions entières à spectre de Fourier lacunaire, l'autre (Tenenbaum 1980) à la comparaison des densités (respectivement au sens de Borel et au sens ordinaire) de deux ensembles d'entiers. Enfin, le procédé de sommation d'Euler (qui implique celui de Borel) est également mentionné, avec une application (Sondow 1994) au prolongement méromorphe de la fonction ζ à tout le plan complexe.

Le long et difficile chapitre 7 est entièrement consacré aux théorèmes taubériens avec reste, en commençant par le résultat fondateur (et optimal !) de G.Freud au début des années 50 :

$f(x) = \sum a_n x^n = A + O((1-x)^\beta)$, $\beta > 0$ et $na_n \geq -C$ impliquent $S_N = A + O(\frac{1}{\log N})$.

L' optimalité de ce résultat est établie ici avec $\beta = 2, |a_n| \leq \frac{1}{n}$, par une variante de la méthode d'optimalité du chapitre 1. Ensuite, des théorèmes taubériens avec reste pour les transformées de Laplace, trop techniques pour être énoncés ici, sont établis, avec pour base un résultat difficile d'approximation L^1 unilatérale pondérée :

Si f est à variation bornée V sur $[-1,1]$ et si k est un entier ≥ 1, on peut encadrer f ($p \leq f \leq P$) par deux polynômes de degré $\leq k$, la norme L^1 pondérée de $(P-p)$ étant $O(V/k)$ et la somme des modules de leurs coefficients étant contrôlée.

Ce chapitre suit lui aussi la logique des chapitres 1 et 2 : on y trouve un théorème des « high indices » qui s' énonce ainsi :

Si $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q > 1$ *et si* $\sum a_n e^{-\lambda_n x} \to A$ *vite, alors* $S_N = \sum_1^N a_n \to A$ *vite, sans condition taubérienne.*

La preuve, assez compliquée, utilise la variable complexe, et s'inspire d'un travail de Halàsz (1967). De même, si le noyau K d'intégrale 1 a une transformée de Fourier qui, non seulement ne s'annule pas, mais encore ne s'approche pas trop vite de zéro, on a un théorème de Wiener de la forme :

$K * S(x) \to A$ *vite et* S *oscille peu impliquent* $S(x) \to A$ *vite, quand* $x \to \infty$.

Les principaux contributeurs sont Freud, Ganelius (avec une application probabiliste à la vitesse de convergence dans le théorème limite central due initialement à Berry et Esséen), et Korevaar, avec des résultats de l'auteur allant jusqu'au début des années 2000. J'ai simplement regretté, s'agissant de Freud, l'absence de son théorème taubérien sur la dérivabilité des sommes de séries de Fourier lacunaires (ici ou au chapitre 5).

Pour conclure : l'ouvrage de Korevaar est d'une richesse incroyable, dont le résumé nécessairement tronqué qui précède ne donne qu'une très faible idée : il démontre en détail un très grand nombre de théorèmes taubériens fort difficiles, réels, complexes, ou avec restes, avec parfois plusieurs approches différentes, et en établissant souvent l'optimalité de ces théorèmes. Sur un sujet devenu aussi encyclopédique, il fallait faire des choix : l'auteur a évité le piège du catalogue sans preuves autres que rares et triviales, et ses preuves sont au contraire nombreuses et hautement non-triviales, avec un style assez particulier, mais auquel on s'habitue très bien : quand des propositions auxiliaires sont nécessaires pour démontrer un théorème, on les admet et on continue, quitte à y revenir assez longtemps après, une dizaine de pages plus loin par exemple. Cela ne nuit en rien (bien au contraire) à la compréhension, et comme je l'ai déjà dit, ce livre a été écrit avec beaucoup de soin et de maîtrise du sujet, il réalise une synthèse assez impressionnante, et devrait rendre de grands services aux chercheurs en théorie des nombres, probabilités, analyse complexe et harmonique, etc... N'oublions pas une composante « histoire des mathématiques de la fin du 19^{e} et du 20^{e} siècle » (voir par exemple les allusions à Cauchy, Abel, Cesàro, Frobenius, Littlewood, Hardy, etc... au chapitre 1, ou à Freud, Erdös, Turan, au chapitre 7) qui rend encore plus attrayante la lecture de l'ouvrage. On ne peut que recommander vivement cette lecture à tous les abonnés de la Gazette, et l'achat du livre à toutes les bibliothèques des universités !

Hervé Queffélec
Université Paul Sabatier, Toulouse

When least is best
Paul J. Nahin
Princeton University Press, 2003. 328 p. ISBN : 0-691-07078-4. 24 €

Le sous-titre de ce livre donne le ton : « how mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible »... Peu de livres popularisent le calcul différentiel de base, les raisons pour lesquelles son étude commença au XVII^{e} siècle, c'est-à-dire essentiellement la nécessité de résoudre des problèmes d'extremum, d'optimisation dirions-nous aujourd'hui. L'ouvrage de

Paul Nahin est une solide contribution nous montrant comment les concepts de dérivation, maximisation ou minimisation ont évolué avec le temps. Dès les Grecs, des problèmes d'optimisation géométrique étaient posés (et résolus, notamment dans le plan) ; des problèmes de nature géométrique, parfois fort compliqués, continuent d'ailleurs à être formulés de nos jours ; comme l'écrivait C. MacLaurin (celui des développements, en 1742) : *« There are hardly any speculations in geometry more useful or more entertaining than those which relate to maxima and minima ».* Le XVII^{e} siècle est celui de la mathématisation du mouvement, il verra la naissance et les premiers balbutiements de ce qui s'appellera le calcul différentiel, avec Fermat dans le rôle de pionnier. À vrai dire, l'évolution du concept de « changement » (qui donnera *in fine* la dérivée) ne s'est pas faite de manière linéaire ; comme l'a excellemment analysé J. V. Grabiner en 1983 : *« First the derivative was used, then discovered, explored and developed, and only then, defined »* ; soulignons que c'est exactement dans l'ordre inverse que nous l'enseignons aujourd'hui, mais ça c'est une autre histoire... L'ouvrage de P. Nahin est très bien documenté sur cette évolution, aucune des références (mathématiques ou historiques) importantes n'est occultée. Voici son déroulement en chapitres : 1. minimums, maximums, derivatives and computers ; 2. the first extemal problems ; 3. medieval maximization and some modern twists ; 4. the forgotten war of Descartes and Fermat ; 5. calculus steps forward, center stage ; 6. beyond calculus ; 7. the modern age begins ; huit annexes complètent le tout ; pas de bibliographie finale (ce qui est dommage), elle est intégrée au fur et à mesure dans le texte.

L'ouvrage intéressera les étudiants, enseignants, enseignants-chercheurs, qui ont du goût pour l'évolution historique des concepts mathématiques, plus précisément ici ceux relatifs au calcul différentiel et à l'optimisation élémentaires.

Pour terminer je voudrais indiquer que j'ai retrouvé dans le livre de P. Nahin un exemple de problème variationnel qui m'a servi de fil rouge dans certains de mes enseignements en deuxième cycle universitaire ; il illustre assez bien le Calcul variationnel et les questions qui s'y posent. Je ne résiste pas au plaisir de le soumettre à la sagacité des lecteurs de la *Gazette*.

Un bâteau, perdu en mer, sait qu'il est à une distance de 1 km *d'un long rivage rectiligne (ce que lui indiquent ses instruments de mesure), mais le brouillard est si épais qu'il ignore la direction du rivage. Le bateau, avançant à vitesse constante, voudrait toucher le rivage le plus vite possible. La question est donc : quelle est le chemin de longueur minimale que le bateau doit suivre afin d'être sûr de toucher terre ?*

Toutes les questions du Calcul variationnel peuvent être posées à propos de cet exemple : l'objet optimal recherché n'est pas un objet simple, c'est une trajectoire (= une courbe du plan)... Y a-t-il des solutions (une trajectoire vraiment plus courte que toutes les autres) ? Y en a-t-il plusieurs ? Comment caractériser (mathématiquement) les trajectoires optimales ? Comment en approcher une par un procédé numérique ?

En termes mathématiques : soit le plan avec une origine 0 (la position de départ du bâteau) ; il s'agit de trouver *une courbe du plan démarrant en* 0, *de longueur minimale et qui touche (ou coupe) toute droite du plan à distance* 1 km *de l'origine.*

La solution, si solution il y a, ne saurait être unique ; en effet, une trajectoire optimale, tournée d'un angle quelconque autour de l'origine est encore optimale.

Une première tentative, montrant au moins la faisabilité de ce qui est demandé sur la trajectoire recherchée est de considérer ceci : le bateau part de l'origine 0 en suivant un rayon (pris dans une direction au hasard) du cercle de rayon 1 km ; au bout du rayon il fait le tour complet du cercle (voir figures ci-dessous). Il est ainsi sûr de toucher toute droite du plan à distance de 1 km de l'origine ; il aura parcouru au total $(2\pi + 1) \approx 7,2832$ km. Mais il y a sans doute mieux à faire... Comment ? J'ai posé la question sous forme de défi à un groupe de jeunes ingénieurs travaillant dans la sous-traitance aéronautique à Toulouse. Leur réponse fut comme cela est décrit dans la deuxième figure au-dessous : le bateau se déplace d'abord au-delà de l'extrémité du rayon de départ, revient vers le cercle le long d'un segment tangent au cercle, fait la moitié du tour du cercle, et complète par un nouveau segment de droite tangent au cercle ; l'ouverture angulaire du secteur S (délimité par le rayon de départ et le rayon dirigé vers le point d'arrivée) étant de (deux fois) 45°. Ce n'est pas si mal ! En effet, un bateau suivant cette trajectoire est sûr de couper (ou de toucher) le rivage rectiligne situé à 1 km de l'origine (point de départ), où qu'il soit ! Et la longueur parcourue est de $(\pi + 2 + \sqrt{2}\ ) \approx 6,5556$ km.

Mais il y a encore mieux à faire dans le même registre. Considérons une ouverture angulaire du secteur S_θ d'angle θ compris entre 0 et 45° (cf. la troisième figure au-dessous) et cherchons la valeur de θ qui minimiserait la trajectoire correspondante C_θ. La longueur $L(\theta)$ de la trajectoire C_θ est $(2\pi - 4\theta + 2.\tan(\theta) + \frac{1}{\cos(\theta)})$ km. Cette fonction convexe est minimisée pour une valeur de θ_{opt} intérieure à l'intervalle $[0, 45°]$, en le seul point d'annulation de la dérivée de $L(\theta)$; cela donne $\theta_{opt} \approx 36,37°$ et $L(\theta_{opt}) \approx 6,4589$ km. La première tentative correspondait à l'ouverture angulaire de $\theta = 0$, tandis que la courbe proposée par les jeunes ingénieurs correspondait à l'ouverture angulaire de $\theta = 45°$.

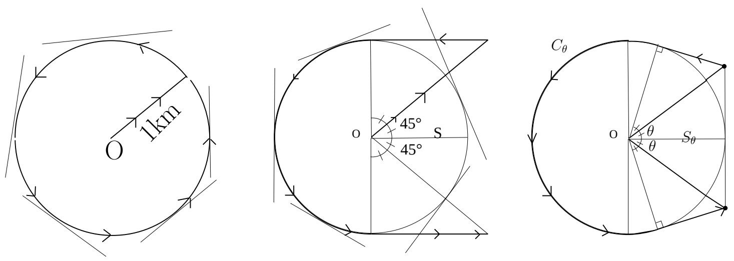

FIG. 1. Figures

Il n'empêche que le mathématicien reste insatisfait : qui nous dit qu'on ne peut pas encore faire plus court, bref que la trajectoire trouvée au-dessus est vraiment la plus courte possible ? Dans son livre, P. Nahin parle de C_{opt} mais ne donne pas la réponse à cette question. Pour ma part je mets de côté une bonne bouteille d'Irouléguy rouge pour qui apportera la conclusion.

Le livre de P. Nahin, de présentation très soignée (couverture cartonnée et jaquette), est plutôt un livre qu'on consulte dans une bibliothèque, il est néanmoins peu coûteux.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

The Ricci flow : an introduction
Bennett Chow et Dan Knopf
American Mathematical Society, 2004. 325 p. ISBN : 0-8218-3515-7. \$ 84

L'idée d'utiliser le flot de la courbure de Ricci pour construire des métriques riemanniennes spéciales est due à R. Hamilton qui prouva en 1982 un résultat très important. Il a montré qu'une variété compacte de dimension 3 qui admet une métrique de courbure de Ricci strictement positive possède également une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive ; en particulier, c'est un quotient fini de la sphère canonique. À partir de ce résultat séminal toute une série de théorèmes furent obtenus par R. Hamilton lui-même ainsi que par d'autres mathématiciens. Cette activité a culminé dans les deux dernières années avec la mise en ligne, par G. Perelman, de trois prépublications dont le but est de donner une preuve de la conjecture de géométrisation de W. Thurston (incluant la preuve de la conjecture de H. Poincaré) qui utilise cette technique. Au moment où ce rapport est écrit il est très probable que cette preuve soit juste ; notons qu'il s'agissait de la motivation originelle de R. Hamilton. Ce remarquable succés ouvre un vaste champ d'applications parmi lesquelles la recherche de métriques d'Einstein en dimension quelconque. Le flot de la courbure de Ricci, ou plus simplement flot de Ricci, peut être vu comme une équation différentielle ordinaire sur l'espace des métriques riemanniennes ; ce point de vue est toutefois difficile à mettre en œuvre et il lui est préféré l'approche qui consiste à le considérer comme une équation aux dérivées partielles paraboliques semblable en bien des points à l'équation de la chaleur. La méthode est une splendide combinaison d'analyse et de géométrie et sa compréhension nécessite des connaissances pointues en géométrie riemannienne : théorèmes de comparaison, théorèmes de compacité *à la Gromov*, classification des variétés de courbure positive ou nulle, opérateurs naturels sur les variétés, etc. C'est donc un important sujet d'étude pour quiconque désire apprendre la géométrie, qu'il soit débutant ou confirmé. Le livre intitulé « The Ricci Flow : an introduction », par B. Chow et D. Knopf en est de loin la meilleure introduction disponible à ce jour. Il se compose de 9 chapitres et 2 appendices que je décris brièvement dans les lignes qui suivent.

Les deux premiers chapitres pourraient seuls faire l'objet d'une monographie : ils sont consacrés aux exemples. C'est un fait maintenant bien connu qu'en dimension 3 il y a huit « géométries » modèles, c'est-à-dire huit géométries homogènes, et que toute variété de dimension 3 doit se décomposer en pièces élémentaires portant chacune une de ces géométries (c'est la conjecture de géométrisation de Thurston). Le chapitre 1 décrit le flot de Ricci sur ces espaces modèles ; il s'agit d'un problème plus algébrique que géométrique et il est de toute première importance de comprendre ces situations. Le chapitre 2 concerne les solutions spéciales qui sont des modèles pour les singularités que l'on rencontrent dans les travaux de Hamilton et Perelman, en particulier celle qui ont un temps de vie infini dans le passé, le futur ou bien les deux. L'exemple crucial étudié ensuite est appelé le « neckpinch » : c'est une métrique sur une variété qui se pince (petit rayon d'injectivité) le long d'une région cylindrique. Il joue un rôle central dans la preuve de la conjecture de géométrisation (en dimension 3) car c'est dans ces cylindres que doit se pratiquer la chirurgie lorsqu'une métrique évoluant par le flot de Ricci atteint une singularité. La description de cet exemple est faite en toute dimension. Ces deux chapitres constituent un très bon échauffement pour la suite et permettent de développer une intuition des phénomènes en jeu. La question de savoir si la métrique, évoluant par le flot de Ricci, s'effondre ou non est également discutée. Il faut insister sur le fait qu'il n'est pas si fréquent qu'un livre de ce niveau débute par 60 pages d'exemples et c'est certainement le meilleur moyen d'apprendre un sujet.

Les deux chapitres suivants (3 et 4) sont consacrés aux bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles paraboliques. Le chapitre 3 concerne l'existence en temps petits des solutions de cette équation ; ce n'est pas aussi facile que pour le cas scalaire, même sur une variété compacte, car l'équation parabolique n'est pas fortement parabolique. Ce phénomène classique en géométrie est dû à son invariance par l'action du groupe des difféomorphismes. C'est une difficulté majeure résolue par R. Hamilton dans son premier article. Plus tard, fort heureusement, D. Deturck a proposé une modification de l'équation qui la rend fortement parabolique. C'est cette approche qui est décrite dans le chapitre 3 ainsi que la relation avec la théorie des applications harmoniques. Une fois acquise l'existence de solutions pour des temps petit on peut écrire l'équation d'évolution des différentes courbures afin d'obtenir des informations géométriques. Les tous premiers renseignements que l'on peut obtenir proviennent de l'application du principe du maximum. C'est le sujet du chapitre 4. Il est présenté de manière très pédagogique : on commence par les versions scalaires pour finir par les versions vectorielles qui s'appliquent au tenseur de courbure. Bien qu'il s'agisse d'un outil d'analyse la géométrie y joue un rôle important et fascinant. La seule réserve que je fasse est l'absence d'énoncés de versions fortes du principe du maximum qui sont ensuite utilisées. Les auteurs, toutefois, les annoncent dans le volume II à venir.

Les chapitres 5 et 6 constituent le cœur de l'ouvrage puisqu'ils concernent les dimensions 2 et 3. Si l'on prétend utiliser cette technique pour prouver la géométrisation des variétés de dimension 3, il est indispensable de se convaincre que le flot de Ricci peut prouver l'uniformisation des surfaces. C'est le contenu du chapitre 5 ; en dimension 2, le flot, ou plutôt sa version normalisée (le volume reste constant pendant l'évolution), converge vers une métrique de courbure de Gauß constante sans rencontrer de singularité. Il permet donc de prouver l'uniformisation à l'exception notable du cas de la sphère pour laquelle on doit utiliser la structure complexe. Cette limitation a été levée, après la parution du présent ouvrage, dans un article de X. Chen, P. Lu et G. Tian. Dans le cas de S^2 donc deux belles preuves sont proposées par les auteurs et il faut insister sur le fait que l'article de R. Hamilton qui traite de la dimension 2 est une esquisse assez difficile à lire par un débutant. La plupart des techniques utilisées en dimension supérieure et en particulier dans les travaux de G. Perelman apparaissent sous une forme élémentaire dans cet important chapitre. Un cours de mastère II sur le flot de Ricci peut très utilement commencer par un semestre sur le cas des surfaces et ce chapitre ainsi que le précédent (sur le principe du maximum) sont une excellente référence. Dans le chapitre 6 c'est le résultat en dimension 3 mentionné en introduction de ce rapport qui est prouvé. Il met en lumière tous les points importants pour la dimension 3, en particulier le principe du maximum dit de Hamilton-Ivey. Un fois encore, comme pour les surfaces, le flot sur une variété de dimension 3 qui admet une métrique de courbure de Ricci strictement positive ne rencontre aucune singularité avant son extinction.

Les chapitres 7, 8 et 9 sont logiquement centrés autour des singularités qui peuvent apparaître dans le cas le plus général. L'idée est de dilater la métrique autour d'un point où la courbure devient très grande et de montrer que là la variété ressemble à un modèle. C'est l'objet des chapitres 8 et 9. Afin de passer à la limite (pour les métriques convenablement dilatées) autour de ces points il faut un théorème de compacité. Certaines des propriétés des limites obtenues repose sur le contrôle des dérivées de la courbure pour une métrique qui évolue par le flot de Ricci. Ce sont les estimées dites de Shi et sont d'une importance capitale dans les travaux de Hamilton et Perelman . Elles sont décrites dans le chapitre 7 avec l'énoncé du théorème de compacité de Hamilton. Notons que le résultat de Perelman dit de « non-effondrement » (section 4 de son premier article) est utilisé dans ce chapitre ; ce théorème affirme, essentiellement, que si un flot explose en temps fini (c'est-à-dire s'il existe un point où la courbure tend vers l'infini en temps fini) alors le rayon d'injectivité de la métrique est minoré. Dans un article important sur la formation des singularités R. Hamilton classifie celles-ci en trois types. Les chapitre 8 et 9 décrivent certains aspects de cette classification. Cette partie n'est pas utilisée dans les travaux de Perelman mais elle est importante tant pour renforcer l'intuition que pour les études à venir en dimension supérieure. Je dois signaler que je n'ai pas lu en détail ces deux chapitres. Un point important, en dimension 3, est que les singularités modèles, appelées « κ-solutions », satisfont l'inégalité de Harnack de Li-Yau-Hamilton. Ceci est évoqué dans le chapitre sur les surfaces ainsi que dans le chapitre 8. Elles pourraient être énoncées de manière plus détaillées ; un fois encore les auteurs annoncent les détails de cet important outil dans le successeur du présent ouvrage.

Les deux appendices sont consacrés aux bases du calcul tensoriel et aux théorèmes de comparaison.

Après avoir lu l'essentiel de ce livre l'impression que je peux en retirer est que les auteurs ont certainement enseigné le sujet tant est grand le soin avec lequel les notions nouvelles sont introduites. De gros efforts sont faits pour motiver le lecteur comme en témoignent les deux chapitres d'exemples. Depuis la « publication » des articles de Perelman les notes de cours sur le flot de Ricci fleurissent. Ce livre est de loin ce que j'ai pu lire de meilleur sur le sujet. Nous attendons tous avec impatience le tome II en espérant qu'il présente certains aspects des travaux de Perelman avec le même soin et les mêmes qualités pédagogiques.

Ce texte a été publié dans sa version anglaise dans la « newsletter of the E.M.S. », n° 59 (2006).

Gérard Besson,
Université Joseph Fourier, Grenoble

Lectures on the orbit method
A.A. Kirillov
American Mathematical Society, 2004. 408 p. ISBN : 0-8218-3530-0. $?

La « méthode des orbites » cherche à décrire certains objets de l'analyse harmonique invariante sur un groupe de Lie G (comme les représentations irréductibles unitaires, la topologie du dual unitaire $\widehat{G}$, la mesure de Plancherel sur $\widehat{G}$, etc) grâce aux orbites de G dans sa représentation coadjointe, c'est-à-dire la représentation naturelle de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ces orbites possèdent une propriété remarquable : ce sont des variétés symplectiques. Elles sont bien sûr aussi munies d'une action de G, et la forme symplectique est G-invariante. En résumé, ce sont des G-variétés symplectiques. En mécanique classique, l'espace des phases d'un système physique ayant un groupe de symétrie G est une G-variété symplectique, et le système est dit "élémentaire" si cette variété est un espace homogène pour G (comme c'est le cas pour les orbites coadjointes). En mécanique quantique, l'espace des phases d'un système physique ayant un groupe de symétrie G est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (ou plutôt son espace projectif), muni d'une représentation unitaire de G. Le système est élémentaire si cette représentation est irréductible. On voit donc se dessiner une analogie

Mécanique classique / Mécanique quantique

Orbites coadjointes / Représentations unitaires irréductibles

Il est maintenant bien connu qu'il n'existe pas de procédure canonique et universelle pour passer d'un système classique à un système quantique. Néanmoins, sur de nombreux exemples, les physiciens ont énoncé des "règles de quantification", préservant le groupe de symétrie. Les mathématiciens et les physiciens, et en premier lieu B. Kostant [K] et J.M. Souriau [S], ont formalisé ceci dans une théorie appelée "quantification géométrique", où l'on cherche à construire des objets quantiques à partir de la géométrie des objets classiques. La méthode des orbites fait donc partie de ce schéma général, mais étant plus spécifique, elle vise aussi à obtenir des résultats plus précis. L'auteur, dans l'introduction du livre, a résumé ce que l'on peut attendre de cette méthode sous forme d'un tableau à deux colonnes, intitulé "guide de l'utilisateur". La première énonce des questions sur les représentations unitaires irréductibles de G, et la seconde donne la recette pour y répondre. Comme nous le verrons plus précisément par la suite, la validité et la précision de la réponse dépendent de la classe de groupes que l'on considère. Donnons ici une partie de la première colonne :

- Décrire le dual unitaire de G comme espace topologique.

Réponse partielle : le dual unitaire est paramétré par l'ensemble des orbites coadjointes. Notons dans ce qui suit $\pi_{\mathcal{O}}$ la représentation unitaire irréductible correspondant à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$.

- Construire $\pi_{\mathcal{O}}$ à partir de la géométrie de $\mathcal{O}$.
- Décrire la restriction de $\pi_{\mathcal{O}}$ à un sous-groupe fermé H de G.
- Décrire la représentation induite unitaire de H à G d'une représentation π_ω attachée à une orbite coadjointe ω du sous-groupe fermé H de G.
- Calculer le caractère de $\pi_{\mathcal{O}}$.
- Calculer la mesure de Plancherel de G, c'est-à-dire la décomposition de $L^2(G)$ en représentations irréductibles unitaires.

La thèse de l'auteur [Ki1], publiée en 1962, et qui constitue l'acte de naissance de la méthode des orbites, s'attache à l'étude des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Préalablement, ce problème avait donné lieu à des travaux de J. Dixmier, et dans le cas particulier du groupe de Heisenberg, de von Neumann. Mais Kirillov est le premier à répondre complètement, et de manière très simple conceptuellement, aux questions posées ci-dessus (pour certaines de ces questions, dans des articles ultérieurs [Ki2]). Dans les années qui suivent, le cadre des groupes nilpotents est dépassé. En 1965, P. Bernat montre que la méthode des orbites marche pour les groupes résolubles exponentiels (ceux pour lesquels l'application exponentielle est surjective). Cette hypothèse est levée en 1971 dans les travaux de L. Auslander-B. Kostant [AK] d'une part (groupes résolubles simplement connexes de type I) et de L. Pukanszky [P] de l'autre (groupes résolubles simplement connexes généraux). Pour les groupes résolubles simplement connexes généraux, les énoncés des résultats sont plus compliqués mais l'essentiel de la philosophie des orbites coadjointes est toujours pertinente. Dans un article de 1968 [Ki3], Kirillov applique sa méthode au cas des groupes semi-simples compacts. Il propose dans le même travail une "formule universelle des caractères" pour toute représentation $\pi_{\mathcal{O}}$ attachée à une orbite coadjointe $\mathcal{O}$, et ceci pour tout groupe G. Il s'est avéré par la suite que c'était un peu trop optimiste, mais ce fut le point de départ de tout un courant de recherche extrêmement fructueux dont les principaux protagonistes sont A. Bouaziz [B], M. Duflo [D1], [D2], M. Khalgui [Kh], W. Rossmann [R], P. Torasso [KhT], [T], M. Vergne [DHV], [V] (et bien d'autres). La méthode des orbites a aussi inspiré d'innombrables travaux sur les groupes de Lie réductifs. Elle marche bien pour une certaine classe de représentations unitaires, dites tempérées, qui suffisent à porter la mesure de Plancherel. Malheureusement (ou heureusement, cela dépend du point de vue), d'autres représentations unitaires jouent un rôle important, par exemple en théorie des formes automorphes, et il s'avère difficile d'adapter la méthode des orbites pour englober ces représentations. C'est encore un sujet de recherche assez actif, citons en passant les travaux de D. Vogan, ou bien les constructions des représentations "minimales" (P. Torasso, H. Sabourin, R. Brylinski-B. Kostant).

L'un des points les plus intéressants de cette philosophie des orbites coadjointes réside dans le fait que les limites de son domaine d'applicabilité ne sont pas bien déterminées. Elle est donc une source d'inspiration constante en théorie des représentations, dans un cadre qui dépasse celui des groupes de Lie. On peut s'intéresser ainsi aux représentations de groupes p-adiques, de groupes ou algèbres de dimension infinie, de super-groupes de Lie, etc...

Venons-en maintenant au livre lui-même. Remarquons que c'est la première fois que la méthode des orbites fait l'objet d'un livre, et que l'auteur est un des meilleurs spécialistes du sujet, puisqu'il est l'inventeur de cette méthode. L'auteur a repris dans une large mesure le contenu d'articles et de cours antérieurs, augmenté d'une suite conséquente d'appendices occupant une bonne moitié du livre, destinée à aider le mathématicien débutant ou non-expert, et couvrant des sujets aussi divers que les variétés différentiables, la géométrie symplectique, les groupes de Lie, la théorie des catégories, etc. Ils remplissent parfaitement leur rôle, sans ensevelir le lecteur dans des détails techniques inutiles. Comme le suggère le titre de la collection, l'un des publics visé est celui des étudiants au niveau de la thèse. Le style adopté cherche à mettre en évidence les idées, par le biais d'exemples nombreux et bien choisis, plutôt que le formalisme et la technique. La lecture du livre en est rendue, je trouve, assez plaisante. Malheureusement, ceci se fait parfois au prix de la rigueur mathématique la plus élémentaire. David Vogan, qui a fait une recension de ce livre pour le Bulletin de l'AMS tient à jour sur sa page web une liste des corrections, mineures ou non, à apporter au texte :

http :/www-math.mit.edu/ dav/CORR.pdf

Il est tout de même dommage que le texte n'ait pas été relu plus attentivement avant publication.

Dans le chapitre d'introduction, on trouve le "guide de l'utilisateur" dont nous avons déjà parlé. Le premier chapitre est consacré à la géométrie des orbites coadjointes. Le formalisme utilisé fait appel à la notion de G-variété de Poisson. Sont aussi introduits dans ce chapitre les concepts fondamentaux d'application moment et de polarisation. Le deuxième chapitre expose la théorie des représentations du groupe de Heisenberg et le troisième celui des groupes nilpotents quelconques. On passe ensuite aux groupes résolubles (chapitre 4), où les difficultés sont expliquées soigneusement à partir des exemples les plus simples, puis aux groupes semi-simples compacts (chapitre 5). La théorie des représentations de ces groupes est rappelée en détails et mise en perspective par la méthode des orbites. Enfin le chapitre 6 propose rapidement d'autres exemples d'application de la méthode des orbites (groupes de Lie semi-simples, groupes de dimension infinie, groupes finis, etc). On peut regretter que le paragraphe consacré aux groupes de Lie semi-simples soit si bref. Même si, comme il a été dit plus haut, la méthode des orbites montre là ses limites, elle n'en a pas moins inspiré une abondante littérature et de magnifiques résultats (formules de caractères des séries discrètes par exemple). Il est dommage qu'un livre publié en 2004 ignore à ce point les progrès du sujet après 1970. Le lecteur intéressé par les développements plus récents de la méthode des orbites pourra se reporter, outre les articles originaux déjà cités, aux articles d'exposition [G], [Vo], [V2] et leur bibliographie. Le chapitre se termine par un paragraphe intitulé : "pourquoi la méthode des orbites marche-t-elle ?" Une des deux explications proposées est l'argument de quantification géométrique par lequel nous avons commencé cette recension. La seconde invoque les travaux de Kontsevitch sur la quantification par déformation, mais là encore, trop rapidement pour que l'on puisse s'en faire une idée.

Bibliographie

[B] A. Bouaziz, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), no. 1, p. 1-79.

[AK] L. Auslander, B. Kostant, *Polarizations and unitary représentations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), p. 255-354.

[D1] M. Duflo, *Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Harmonic Analysis and Group Representations, cours CIME (1980), P. 130-208.

[D2] M. Duflo, *On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups*, Lie groups representations III, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1077, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984, p. 101-165.

[DHV] M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne, *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, Mém. SMF **15** (1984), p. 65-128.

[G] A. Guichardet, *La méthode des orbites, historique, principes, résultats*, à paraître dans la série "Leçons de mathématiques d'aujourd'hui".

[Kh] M. S. Khalgui, *Caractères des groupes de Lie*, J. Funct. Anal. **47** (1982), no. 1, 64–77.

[KhT] M.S. Khalgui et P. Torasso, *La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, Noncommutative harmonic analysis, Progr. Math., 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, p. 213-251.

[Ki1] A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspekhi Mat. Nauk. **17** (1962), p. 57-110.
[Ki2], A. Kirillov, *Plancherel measure for nilpotent Lie groups*, Funkts. Anal. i Priloj. **1** (4), (1967), p. 330-331.
[Ki3], A. Kirillov, *Method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups*, Funkts. Anal. i Priloj. **2** (1), (1968), p. 90-93.
[K] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lectures in Modern Analysis and Applications (C. Taam, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 170, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, p. 87-208.
[P] L. Pukanszky, *Unitary representations of solvable Lie groups*, An. Sci. de l'ENS, (1971) p. 457-608.
[R] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), p. 207-220.
[S] J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Maîtrise de mathématiques, Dunod, Paris 1970.
[T] P. Torasso, *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. 90 (1997), no. 2, p. 261-377.
[V] M. Vergne, *A Poisson-Plancherel formula for semi-simple Lie groups*, Ann. Math. (2) **115** (1982), p. 639-666.
[V2] M. Vergne, *Repesentations of Lie groups and the orbit method*, Actes Coll ; Bryn Mawr, Springer (1983), p. 59-101.
[Vo] D. Vogan, *The method of coadjoint orbits for real reductive groups*, Representation Theory of Lie Groups, IAS/Park City Mathematics Series, vol. 8, AMS, Providence RI, 1999.

David Renard,
École Polytechnique