

Don Zagier à la BnF : Lettres d'un inconnu, de Ramanujan à Hardy

Sur le parvis de la Bibliothèque nationale de France, ce soir du 16 mars, l'air est doux et le ciel à peine voilé par une brume de tiédeur. Alors que deux semaines auparavant, les passants auraient marché d'un pas pressé, fouettés par le froid ou la pluie, on voit aujourd'hui quelques groupes feuilleter en flânant les pages de l'immense livre de verre. Certains se dirigent vers le grand auditorium (non fumeur) où Sartre est le sujet du jour. Beaucoup d'autres vont emplir le petit auditorium, où Monsieur Zagier va bientôt commencer sa conférence intitulée : *Ramanujan à Hardy : de la première à la dernière lettre*. La salle est comble et les retardataires devront s'asseoir sur le bord des travées. Il y a là un public divers : une dame referme son catalogue Truffaut, plantes de balcon et semis ; des professeurs de l'université Pierre et Marie Curie poursuivent une conversation peut-être entamée dans leurs bureaux tout proches ; des élèves de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm sont en ébullition à la suite des projets de fusion (avec l'École normale supérieure de Cachan) ; on reconnaît des mathématiciens prestigieux, spécialistes de théorie des nombres ou des formes automorphes, sujets abordés à sa manière par Ramanujan. Beaucoup d'autres auditeurs, mathématiciens ou pas, ou plus, ou pas encore.

Le président de la Bibliothèque nationale, Jean-Noël Jeanneney, présente la série de conférences *Un texte, un mathématicien* qui, sur une idée de Martin Andler et sous le parrainage, entre autres, de la Société Mathématique de France et de la Bibliothèque nationale de France, doit illustrer le rapport entre l'écrit et la création mathématique. L'affluence est un fait heureux, car elle montre aux responsables de la Bibliothèque, dont le directeur du département des sciences et techniques, Philippe Raccah, qu'existe un véritable public pour des conférences scientifiques de qualité. Les trois suivantes seront d'ailleurs prononcées par trois médailles Fields, Jean-Christophe Yoccoz, Pierre-Louis Lions et Alain Connes, signe flagrant de l'intérêt symétrique de la part des chercheurs de haut niveau.

Don Zagier, le conférencier du jour, constitue avec les trois précédents le quadrivirat des professeurs de mathématiques au Collège de France ; c'est un spécialiste des formes modulaires. Il raconte comment, âgé de quatorze ans et envoyé d'Allemagne étudier au collège de Winchester, il avait reçu en prix la fameuse *Introduction to the Theory of Numbers* de Hardy et Wright, livre dont l'élégance, la simplicité et la profondeur continuent d'émerveiller et d'attirer vers les mathématiques ses lecteurs d'aujourd'hui. Ce prix, hommage bien naturel à un illustre ancien élève de l'établissement (hommage non réciproque d'ailleurs, puisque Hardy avait gardé un souvenir plutôt mitigé des études qui y étaient dispensées), a marqué plus durablement Don Zagier que les prix en espèces qu'il a pu recevoir par ailleurs. Si on ajoute que Ramanujan lui-même a reçu le principal de sa formation de mathématicien en lisant le livre de Carr, on admettra que la Bibliothèque nationale était un lieu propice pour cette conférence. Don Zagier brandit les trois livres qu'il a apportés, le Hardy et Wright, donc, mais aussi *l'Apologie d'un mathématicien*, de G. H. Hardy, et la biographie que ce dernier a consacrée à Ramanujan et qui contient, principalement, une analyse des travaux

du mathématicien indien, analyse que Hardy avait présentée dans un cycle de conférences professées aux États-Unis.

Ce n'est cependant pas le livre qui fournit le support de la conférence, mais la lettre. Ou plutôt les lettres : la première lettre qu'écrivit Ramanujan à Hardy, en 1913, et la lettre ultime, envoyée de Madras où Ramanujan était revenu après son séjour à Cambridge, comblé d'honneurs mais malade. Le conférencier peut ainsi présenter Ramanujan comme lui-même s'était présenté à Hardy : « J'ai l'honneur de me présenter à vous en tant qu'employé à la comptabilité, pour le maigre salaire de vingt livres annuelles, au bureau du port de Madras ». Srinivasa Ramanujan ne s'étend guère sur sa vie. Ce qui l'intéresse véritablement, ce sont les mathématiques. Le gros de la lettre fournit une liste de formules couvrant une quinzaine de pages, dont la lecture et l'approfondissement créeront un choc chez Hardy et Littlewood. Pour introduire aux mathématiques de Ramanujan, le conférencier évoque l'un de ses résultats les plus célèbres, objet de sa collaboration ultérieure avec Hardy, le calcul du nombre $p(n)$ de partitions d'un entier n .

Si l'on se donne un certain entier (« n , par exemple », précise Don Zagier), on peut le décomposer en une somme d'entiers non nuls. On aura ainsi :

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2 = 4 + 1.$$

Ces sept décompositions donnent $p(5) = 7$. Une autre façon d'interpréter $p(5)$: on dispose de 5 objets indiscernables et on dénombre les façons de les regrouper.

Bien entendu, un tel décompte n'est réalisable directement que pour de petites valeurs de n . Pour de grandes valeurs, on peut s'appuyer sur une formule récurrente qui permet de calculer $p(n)$ à l'aide de toutes les valeurs précédentes, par exemple

$$np(n) = \sum_{k=1}^n \sigma(k)p(n-k),$$

où $\sigma(k)$ est la somme des diviseurs de k .

Ce calcul conduit vite à des résultats astronomiques : $p(200)$ est déjà supérieur à 10^{13} . Dans les années 1915, c'est Mac Mahon, un très brillant calculateur mental, qui faisait office d'ordinateur. Ramanujan, lui, n'était nullement un prodige du calcul mental et ne rivalisait pas avec Mac Mahon. Il avait d'ailleurs mieux à faire.

La collaboration entre Ramanujan et Hardy à propos du nombre des partitions d'entiers s'est exprimée dans un article publié en 1918 par la London Mathematical Society, *Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis*. L'égalité

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

résulte aisément du développement du second terme en série pour $|x| < 1$. On voit facilement que, si $g(x) = (1-x)f(x)$, $\ln g(x) \sim \frac{\pi^2}{6(1-x)}$. Or, un théorème taubérien

affirme que, si $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est la somme d'une série entière à coefficients **positifs** (c'est Hardy qui souligne) et si $\ln g(x) \sim \frac{A}{1-x}$, alors

$$\ln(a_0 + \dots + a_n) \sim 2\sqrt{An}.$$

On obtient ainsi

$$p(n) = e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}n(1+o(1))}},$$

ce qui n'est pas encore un équivalent, mais déjà un bon début. En réalité, ce n'est pas vraiment le début, car, à l'aide de l'identité d'Euler

$$f(x) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^4}{(1-x)^2(1-x^2)^2} + \frac{x^9}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2} + \dots,$$

l'article a déjà donné un encadrement de $p(n)$ qui va dans ce sens.

Pour aller plus loin, il faut utiliser d'autres méthodes, et c'est là que les formes modulaires interviennent. En posant¹ $x = e^{2i\pi\tau}$, on constate que $\frac{x^{24}}{f(x)}$ est une « fonction modulaire » déjà connue. Une fonction modulaire est, pour Hardy, une fonction provenant d'une fonction φ satisfaisant à certaines conditions de régularité, et qui vérifie une identité du type

$$\varphi(\tau) = (a + b\tau)^n \varphi\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right),$$

pour un certain entier positif n et pour tous les entiers a, b, c et d tels que $ad - bc = 1$. On peut dire plus succinctement qu'une forme modulaire possède certaines symétries, ce que le conférencier illustre en projetant une œuvre célèbre d'Escher, *Limite Circulaire IV*.



© Droits réservés

Au cours du XX^e siècle, la théorie des formes modulaires s'est développée de manière très complète, et notamment dans un contexte cohomologique. Don Zagier n'emploie pas ce gros mot, mais souligne que Ramanujan ignorait tout de l'interprétation moderne des formes modulaires. Ce qui est certain, c'est qu'il maniait avec aisance ce genre d'identité, qui permet en particulier d'estimer le comportement de la fonction au voisinage de n'importe quel point rationnel du cercle unité à l'aide d'un changement de variable homographique.

La formule de Cauchy permet d'exprimer $p(n)$ à l'aide de cette fonction, et on obtient un équivalent en considérant le comportement au voisinage de 1. Mais, et c'est une différence nette avec les fonctions plus classiques de la théorie analytique des nombres, la considération d'autres singularités de la fonction permet d'obtenir des termes correctifs. En effet, tous les points du cercle unité sont des singularités pour la fonction, tandis que la fonction ζ de Riemann, par exemple, n'admet à distance finie qu'une seule singularité (le point 1). Concrètement, en retranchant

¹ La notation habituelle est q , non pas x ; j'ai repris celle de Hardy.

à f une fonction bien choisie, dont les singularités sont les complexes d'argument commensurable à 2π , nommément une combinaison linéaire adéquate des fonctions

$$F_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dn} \frac{\operatorname{ch} a\lambda_n - 1}{\lambda_n} \quad \text{où } \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$$

(il faut déjà y penser²), et en appliquant la formule de Cauchy à la différence obtenue, on obtient (après un nombre considérable de lemmes asymptotiques, arithmétiques et autres dissections du cercle unité à l'aide de la suite de Farey) un développement asymptotique de $p(n)$ avec un nombre arbitraire de termes.

On obtient par exemple, lorsque l'on a posé $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\begin{aligned} p(n) = & \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{\frac{1}{2}e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + \\ & \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2}{3}n\pi - \frac{1}{18}\pi\right) \frac{d}{dn} \left(\frac{\frac{1}{3}e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + \\ & \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{8}\pi\right) \frac{d}{dn} \left(\frac{\frac{1}{4}e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + \dots + o(n^{-\frac{1}{4}}) \end{aligned}$$

le nombre des termes dépendant de n pour avoir le reste indiqué.

En utilisant leur Mac, Ramanujan et Hardy peuvent comparer la différence **numérique** entre l'approximation asymptotique et la valeur réelle. Voici les calculs fournis par l'article de Hardy et par Don Zagier, lorsque l'estimation de $p(200)$ est faite avec sept termes ³ :

premier terme	3 972 998 993 185, 896
deuxième terme	+ 36 282,978
troisième terme	-87,555
quatrième terme	+5,147
cinquième terme	+1,424
sixième terme	+0,071
septième terme	+0,043
valeur approchée de $p(200)$...	= 3 972 999 029 388,004
... et valeur exacte	3 972 999 029 388

La précision est hallucinante!

Le conférencier revient aux formes modulaires. On peut leur associer une « empreinte digitale », constituée d'un nombre fini de valeurs (la hauteur, le genre, et une liste de termes) qui les caractérise. Don Zagier ajoute que cette caractéristique est aux formes modulaires ce que l'empreinte digitale est aux coupables (et « d'ailleurs aussi aux innocents »). C'est ce qu'il appelle la formule magique : elle permet d'identifier deux formes modulaires introduites de façons très différentes.

Le professeur Zagier propose alors un tableau, sorte de dictionnaire permettant d'interpréter de deux façons la même forme modulaire :

² En fait, Rademacher a expliqué depuis qu'il vaut mieux considérer $\frac{d}{dn} \frac{\operatorname{sh} a\lambda_n}{\lambda_n}$.

³ Huit formellement, mais l'un des termes du développement asymptotique est identiquement nul.

séries thêta	décomposition d'un entier en somme de carrés
série d'Eisenstein	nombre des diviseurs d'un entier
courbes elliptiques	nombre de solutions d'équations polynomiales dans un corps fini
représentations galoisiennes	décomposition d'idéaux dans un corps de nombres
fonctions hypergéométriques	partitions d'un entier, invariants quantiques

À un mathématicien d'aujourd'hui, il suffit de reconnaître le caractère modulaire des fonctions étudiées et d'en obtenir l'empreinte digitale pour les identifier. Au contraire, Ramanujan était obligé de réaliser des prouesses d'ingéniosité pour démontrer ou découvrir les identités cachées. Dans cet ordre d'idée, voyons comment Jacobi procède. Il introduit la fonction θ (de Jacobi) :

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{n^2}$$

et montre, à l'aide de mirobolantes transformations, que

$$\theta^2(x) = 1 + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1 - x^{2n+1}}.$$

Il est presque évident que le coefficient de x^n donné par une élévation au carré directe de $\theta(x)$ est égal au nombre des décompositions de n en somme de 2 carrés. D'un autre côté, le développement de la seconde expression de $\theta^2(x)$ conduit aisément à la valeur $4(d_1(n) - d_3(n))$ de ce même coefficient, lorsque $d_k(n)$ désigne le nombre des diviseurs positifs de n de la forme $4n + k$. On obtient ainsi une formule magnifique donnant le nombre des décompositions de n en somme de deux carrés. Bien entendu, l'identité de Jacobi en question n'est, elle, pas facile (ce qui n'avait pas empêché Ramanujan de montrer élémentairement une identité beaucoup plus générale qui peut se reformuler à l'aide des fonctions elliptiques \wp et ζ de Weierstrass).

Le 12 janvier 1920, donc peu avant sa mort le 26 avril, Ramanujan écrivit à Hardy une lettre dans laquelle il faisait état, de façon plus laconique encore que d'habitude, de ses travaux récents. Il ne faisait que citer ce qu'il appelait des « pseudo-fonctions thêta » (Ramanujan les appelle en anglais des « "mock" θ -functions », pour éviter qu'on ne les confonde avec les « "false" θ -functions » introduites par Rogers), fonctions en effet définies par des séries qui rappellent vaguement les fonctions habituelles, mais dont il ne donne aucune propriété ni interprétation, signalant simplement « qu'elles font leur entrée dans les mathématiques avec la même beauté que les fonctions thêta ordinaires ». Un élève de Don Zagier, Sander Zwegers (de qui Don Zagier dit parfois qu'il l'a choisi comme étudiant parce qu'en cas de cosignature, il était pour une fois cité en tête de l'article), a pu dans une thèse toute récente consacrée à ces fonctions en déceler les symétries cachées et en trouver la formule magique. L'actualité de ce travail est toute brûlante, souligne Don Zagier, puisque les dernières formules datent de trois jours. Quatre-vingt-cinq ans donc après la mort de Ramanujan.

Le conférencier met alors en lumière un point extrêmement pertinent. En redécouvrant les propriétés des fonctions elliptiques ordinaires par lui-même, Ramanujan s'était certes montré génial mathématicien, mais n'avait pas pu recueillir le bénéfice du travail déjà accompli par d'autres. De fait, malgré des exceptions comme le travail sur les partitions, les résultats de Ramanujan dans ce domaine sont soit en retard sur son temps, soit à peine en avance. Le caractère autodidacte de son apprentissage et son originalité puissante l'avaient plutôt desservi. En revanche, s'agissant des pseudo-fonctions thêta, c'est le phénomène inverse qui s'est produit : libre dans sa créativité, en dehors des rails de l'époque, Ramanujan a pu introduire des objets totalement nouveaux.

Le débat qui suit est très animé, et le conférencier répond avec précision, simplicité et humour aux questions posées. Il indique en particulier que Ramanujan s'est très peu trompé dans ses formules, si l'on met de côté des lapsus manifestes. À une autre question, il répond en définissant le point de vue des spécialistes des formes automorphes, qui eux ne partent pas de la fonction pour aboutir au groupe de symétrie, mais du groupe pour considérer l'ensemble des fonctions admettant ce groupe comme groupe de symétrie. Il ajoute « qu'il ne sait pas s'il a répondu à la question posée, mais qu'en tout cas il a fourni une réponse à une question ».

À une ultime interrogation sur le rôle de l'écrit en mathématiques, il indique simplement qu'à son avis, ce rôle n'est pas plus central que dans certaines autres disciplines, comme la philosophie. Nul doute cependant, à écouter Don Zagier, que la dernière lettre de l'alphabet a rendu un magnifique hommage à la première lettre que Ramanujan écrivit à Hardy.

Bernard Randé
Professeur au lycée Louis-le-Grand, Paris

Références

- [1] G.H. HARDY. *Ramanujan, Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Chelsea Publishing Company. Notamment les chapitres VIII, IX et XII
- [2] SRINIVASA RAMANUJAN. *Collected papers* Chelsea Publishing Company. Notamment p. 354-355 (la dernière lettre) et articles n° 31 et 34.
- [3] SAKS ET ZYGMUND. *Fonctions analytiques*. Masson et Cie. Chapitre VIII (fonctions elliptiques).
- [4] DON ZAGIER in *Leçons mathématiques d'aujourd'hui*. Cassini. Pages 99 à 123, *Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de $SL_2(\mathbb{Z})$* .