Le prix Abel décerné à Jean-Pierre Serre

Antoine Chambert-Loir

En 2003, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décerné le premier prix Abel au mathématicien français Jean-Pierre Serre, « pour avoir joué un rôle clef en donnant à de nombreux domaines des mathématiques leur forme moderne, notamment la topologie, la géométrie algébrique et la théorie des nombres ».

Quelques mots tout d'abord à propos du mathématicien norvégien dont le nom est attaché à ce nouveau prix. Bien qu'emporté très jeune par la tuberculose, Niels Henryk Abel (1802–1829) a révolutionné les mathématiques et, pour reprendre le mot de Hermite, « laissé aux mathématiciens de quoi s'occuper pendant cinq cents ans. » Par exemple, l'étude qu'il fit des intégrales elliptiques et de leur généralisation, aujourd'hui appelées *intégrales abéliennes*, est encore au cœur de la géométrie algébrique moderne, sous une forme à peine modifiée par l'introduction, due à Riemann, du langage géométrique.

Mais revenons à notre sujet. Jean-Pierre Serre est né en 1926 dans la région de Nîmes, de parents pharmaciens. Il entre à l'École normale supérieure en 1945 puis au CNRS en 1948. Il soutient sa thèse d'État en Sorbonne en 1951 sur un sujet de topologie ; les résultats qu'il y établit font immédiatement grand bruit et trois ans plus tard, il reçoit la médaille Fields, un prix qui, jusqu'à la création du prix Abel, était considéré comme équivalent au prix Nobel, lequel n'existe pas en mathématiques, et dont il reste à ce jour le plus jeune récipiendaire ! Après avoir enseigné quelques années à Nancy, il est élu professeur au Collège de France en 1956 où il y enseigne jusqu'à sa retraite en 1994. Pendant toutes ces années, il a aussi enseigné dans de nombreuses universités étrangères, notamment Harvard. Il est membre de l'Académie des sciences, ainsi que de plusieurs Académies étrangères (américaine, suédoise, hollandaise,...).

Tout au long de sa carrière, Serre a reçu de nombreux prix ; outre la médaille Fields et ce prix Abel, je mentionnerai le prix Steele (1995) de la Société mathématique américaine récompensant l'exceptionnelle qualité de l'exposé mathématique de son *Cours d'arithmétique*, et le prix Wolf (2000) pour « ses nombreuses contributions fondamentales à la topologie, la géométrie algébrique, l'algèbre et la théorie des nombres, ainsi que pour ses cours et ses écrits qui ont été une grande source d'inspiration. »

L'œuvre mathématique de Serre est immense. La plupart des articles qu'il a écrits, environ 200, ont été regroupés dans quatre gros volumes édités par Springer-Verlag, à l'exception notable de plusieurs rédigés avec Armand Borel.

Il a aussi publié une dizaine de livres tirés souvent de cours à l'École normale, au Collège de France, ou à Harvard : chacun, quel que soit le niveau où il se

Je voudrais remercier D. Bertrand, P. Colmez et J. Oesterlé pour leurs remarques et suggestions. Je voudrais aussi profiter de ces lignes pour remercier P. Colmez et J.-P. Serre de l'aide qu'ils m'ont apportées lors de la rédaction de la notice sur J. Tate, parue dans le dernier numéro de la *Gazette*.

place, est aujourd'hui un classique incontournable. Sans compter les livres qu'il a contribué à publier au sein de Bourbaki, ce groupe de mathématiciens qui, en adoptant une méthode axiomatique, entreprit à partir des années 1935 d'asseoir les mathématiques contemporaines sur des bases rigoureuses, en procédant « le plus souvent du général au particulier ».

En mathématiques comme dans beaucoup d'autres disciplines scientifiques, l'apprentissage est *oral* ; dans les séminaires tels que ceux que Henri Cartan organisa de 1948 à 1964 et dont le principe est toujours en vigueur, il est en outre *collectif.* Serre a fait, tout au long de sa carrière, un très grand nombre d'exposés dans des séminaires variés : du séminaire Cartan qui développait la topologie algébrique, la géométrie analytique, l'algèbre homologique, les fonctions automorphes, etc. aux séminaires Sophus Lie, ou Chevalley sur la théorie des groupes de Lie, mais aussi, bien sûr, au séminaire qu'organise N. Bourbaki pour favoriser la diffusion des mathématiques les plus actuelles... Les rédactions de ces exposés proposent souvent un point de vue nouveau et restent d'une valeur inappréciable. Certaines sont publiées dans ses Œuvres complètes, d'autres dans un volume édité en 2001 par la Société Mathématique de France.

Serre a écrit de très nombreuses lettres. Il y explique ce qu'il est en train de faire, et l'on peut voir s'ébaucher des mathématiques. Certaines d'entre elles furent même aussitôt publiées, comme la lettre à Weil sur les « analogues kählériens de certaines conjectures de Weil » (*Annals of maths* **71** (1960), p. 392–394 ; *Œuvres,* n° 45) qui ont inspiré les conjectures standard de Grothendieck ! Il répond aussi à des questions qu'on lui a posées. Une partie de cette correspondance occupe une place à part, ne serait-ce que parce qu'elle a été rendue publique : celle avec Alexander Grothendieck, qu'ont éditée Serre et P. Colmez ; correspondance fabuleuse et joliment recensée par M. Raynaud dans le dernier numéro de la *Gazette des mathématiciens.*

En sus d'une profusion de thèmes et de théorèmes, toute l'œuvre de Serre est marquée par un style d'une clarté incomparable. Il est économe de ses mots, et de ses moyens, et cela lui permet d'aller droit à l'essentiel. La clarté de ses textes se retrouve dans ses exposés oraux. Ses cours au Collège de France ont ainsi été pendant trente ans un moment unique pour tous ceux qui eurent la chance de les suivre.

Il est impossible de rendre compte d'une telle œuvre en quelques pages. Je voudrais pourtant expliquer quelques uns des thèmes que Serre a abordés en essayant de montrer en quoi il a, à chaque fois, révolutionné la façon d'envisager un problème.

Je dois hélas en omettre de nombreux autres : multiplicités d'intersection, anneaux locaux réguliers, compactification de quotients, formes modulaires p-adiques, ou plus récemment les sous-groupes finis des groupes de Lie simples... La liste est longue des nouveaux outils que Serre a forgés et qui ont modifié en profondeur le développement de ces théories.

Topologie algébrique : groupes d'homotopie des sphères

Dit grossièrement, la *topologie*, du grec *topos*, est l'étude des « lieux », des « formes ». Font par exemple partie de ses ambitions la classification des nœuds dans l'espace, définis comme l'image du cercle par une application continue injective, ou de manière imagée comme la disposition d'un lacet (de chaussure) placé dans l'espace et recollé en ses extrémités. Comme il y a beaucoup trop de latitude, on décide de négliger leurs déformations (le terme mathématique est *homotopies*) et de considérer comme équivalents deux nœuds qui pourraient se déformer l'un en l'autre. Plus généralement, la *topologie algébrique* associe à tout « espace » (topologique) des objets de nature algébrique (groupes, entiers), invariants par ces déformations ; ce sont les groupes d'homotopies. Cependant, il est souvent très difficile de les calculer, c'est même parfois *indécidable*.

Appelons sphère de dimension n l'ensemble $\mathbf{S}_n$ des solutions dans l'espace à $n+1$ dimensions de l'équation $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$; on obtient un cercle pour $n = 1$, une sphère pour $n = 2$. Cette sphère possède des groupes d'homotopies $\pi_1(\mathbf{S}_n)$, $\pi_2(\mathbf{S}_n)$, et ainsi de suite. Il est facile de calculer les premiers groupes : $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ est nul si $i < n$, mais la détermination de $\pi_n(\mathbf{S}_n)$ (isomorphe au groupe $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs) permet de démontrer des résultats tout à fait non triviaux en topologie (théorèmes de Brouwer, d'invariance du domaine, etc.). Le premier exemple d'entiers (i, n) avec $i > n$ où l'on sache que le groupe $\pi_i(\mathbf{S}_n)$ n'est pas nul a été donné par H. Hopf en 1931 ! (Il s'agit de $\pi_3(\mathbf{S}_2)$, égal à $\mathbf{Z}$.)

C'est dans ce contexte que s'insère la thèse de Jean-Pierre Serre, « Homologie singulière des espaces fibrés » (*Œuvres*, n° 9), publiée en 1951, dans laquelle il démontre que les groupes d'homotopies de tout espace raisonnable (simplement connexe et d'homologie de type fini) ont un nombre fini de générateurs. Concernant les groupes d'homotopie des sphères, il montre qu'ils sont tous *finis*, à deux familles d'exceptions près. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a déjà dit que le groupes $\pi_n(\mathbf{S}_n)$ est égal au groupe infini $\mathbf{Z}$. Toujours pour $n \geqslant 1$, Serre démontre que $\pi_{4n-1}(\mathbf{S}_{2n})$ est égal à la somme du groupe $\mathbf{Z}$ et d'un groupe fini ; pour $n = 1$, il s'agit précisément du groupe étudié par Hopf.

En un certain sens, la démonstration de Serre est très simple ; elle est de fait emblématique de ce qu'ont permis les mathématiques (« modernes » !) de la seconde moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle. Elle procède par récurrence, en combinant deux idées.

La première provient des travaux qu'avait réalisés Jean Leray, alors qu'il était prisonnier pendant la seconde guerre mondiale, précisément la *suite spectrale des espaces fibrés*. Contentons nous de dire que c'est une machinerie de nature algébrique qui « calcule » les groupes d'*homologie* d'un espace fibré en fonction de ceux de sa base et de sa fibre. On voit ainsi l'apparition de méthodes algébriques modernes en topologie ; ces méthodes *homologiques* ont d'ailleurs joué un rôle sans cesse grandissant dans les mathématiques contemporaines (de la géométrie aux équations aux dérivées partielles, en passant par l'algèbre et l'arithmétique). Et il n'est presque pas d'article de Serre qui n'y fasse référence.

La seconde idée vient de ce que l'on peut calculer les groupes d'homotopie d'un espace en termes des groupes d'homologie d'autres espaces, obtenus par deux constructions : le revêtement universel et l'espace des lacets. Peu de temps auparavant, Henri Cartan avait établi l'existence d'une suite spectrale qui permet d'analyser ce qui se passe lorsqu'on passe au revêtement universel. Il restait à en faire de même pour l'espace des lacets. Serre constate alors que cet espace, même s'il n'est pas un espace fibré au sens antérieur, en possède la propriété essentielle de « relèvement des homotopies » et cela lui permet de démontrer l'existence de la suite spectrale dans le cas qui l'intéresse.

Géométrie algébrique, géométrie analytique

Après avoir développé un peu plus encore ces techniques homologiques, Serre les utilise dans le contexte de l'analyse complexe à plusieurs variables. En effet, homologie, cohomologie et théorie des faisceaux (aussi inventée par Jean Leray) permettent de formuler de façon très compacte certains énoncés (comme le problème de Cousin ou les théorèmes d'Oka), mais permettent aussi d'aborder leurs *démonstrations*, car elles se prêtent bien à des raisonnements par récurrence sur la dimension de l'espace, *cf.* par exemple les fameux théorèmes A et B de H. Cartan. Un résultat fondamental, démontré par Cartan et Serre, est que les groupes de cohomologie d'une variété analytique compacte sont de dimension finie (*Œuvres,* n° 24, 1953). En 1955, Serre démontre aussi un important théorème de dualité (*Œuvres,* n° 28). Il donne aussi une formulation et une démonstration cohomologiques du théorème classique (XIX^e^ siècle) de Riemann-Roch. Avec cette formulation, la preuve devient très simple, se généralise « facilement » du cas des courbes au cas des surfaces (établi par Kodaira peu de temps auparavant), et sera généralisée au cas des variétés de dimension arbitraire par Hirzebruch six mois plus tard.

Sur ce modèle, Serre développe alors une nouvelle approche de la géométrie algébrique : c'est l'article « Faisceaux algébriques cohérents » (*Œuvres,* n° 29, 1955), parfois cité simplement FAC. Tout d'abord, Serre montre dans cet article que la « topologie de Zariski » sur une variété algébrique, de prime abord assez éloignée de la topologie usuelle, permet une théorie des faisceaux tout à fait semblable à la théorie usuelle. Il y démontre en particulier les analogues des théorèmes A et B.

Dans « Géométrie algébrique et géométrie analytique » (*Œuvres,* n° 32, 1956), souvent cité GAGA, Serre montre même que les groupes de cohomologie d'une variété algébrique projective complexe s'identifient à ceux définis par la géométrie analytique. Cela fournit en particulier une démonstration *cohomologique* d'un théorème de Chow selon lequel toute sous-variété analytique d'un espace projectif complexe est algébrique, c'est-à-dire est définie par des équations polynomiales. En outre, Serre dégage dans cet article la notion algébrique de *platitude* ; elle joue depuis un rôle fondamental en algèbre et en géométrie algébrique.

Ces années-là voient aussi l'irruption de Grothendieck sur la scène mathématique française. Après des travaux en analyse fonctionnelle, Grothendieck suit plus ou moins les pas de Serre à travers l'algèbre homologique. Dans le but de démontrer les conjectures de Weil sur le nombre de solutions d'équations polynomiales à coefficients dans des corps finis, Grothendieck se lance alors dans une fantastique refonte de la géométrie algébrique. C'est la théorie des schémas à laquelle la contribution de Serre est fondamentale. Non seulement le point de vue adopté (faisceaux, cohomologie) généralise-t-il ses travaux, mais l'influence de Serre se révèle aussi à la lecture de la correspondance nourrie que poursuivront les deux mathématiciens pendant de nombreuses années. C'est aussi d'un exposé de Serre sur les *espaces fibrés algébriques* (Séminaire Claude

Chevalley, 1957/58, n° 1, reproduit dans les *Exposés de séminaires*), qu'est née la topologie étale des schémas et la cohomologie du même nom.

Théorie des nombres : courbes elliptiques et formes modulaires

Née au XIX^{e} siècle de l'étude des intégrales elliptiques, ainsi appelées parce qu'elles permettent de paramétrer les ellipses par longueur d'arc, puis de l'étude des fonctions méromorphes possédant deux périodes indépendantes, la théorie des courbes elliptiques a pris au XX^{e} siècle une nette couleur arithmétique. Une courbe elliptique est définie par une équation polynomiale en deux variables, de degré 3, de la forme $y^2 = x^3 + ax + b$. Si l'on considère deux points d'une telle courbe, la droite qui les joint recoupe la courbe en un troisième, d'où la possibilité de construire des points par cordes (et tangentes). Modifions cette procédure en considérant non pas le troisième point d'intersection, mais son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À condition d'adjoindre à la courbe un point « à l'infini », on peut montrer que cela munit l'ensemble des points de la courbe elliptique d'une loi d'addition, tout à fait semblable à celle des nombres entiers.

Certains points ont alors une propriété particulière, en ce que si on les ajoute suffisamment de fois à eux-mêmes, on tombe au bout d'un certain nombre d'itérations sur le point à l'infini. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on peut en outre écrire un polynôme en une variable x dont les racines sont les abscisses des points pour lesquelles l'itération aboutit au point à l'infini à la n-ième étape ; c'est l'analogue du polynôme cyclotomique dont les racines sont les racines primitives n-ièmes de l'unité, longuement étudié par C.-F. Gauss au début du XIX^{e} siècle.

Supposons maintenant que les deux paramètres a et b qui définissent la courbe elliptique que nous étudions soient des nombres rationnels. En adjoignant alors les coordonnées (x, y) de ces « points de division par n », on définit un corps de nombres algébriques que Serre a étudié en détail. Son groupe de Galois est naturellement un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans l'anneau des entiers modulo n, et un des résultats fondamentaux de Serre sur ce sujet est que si n est un nombre premier assez grand, ces deux groupes sont *égaux*, pourvu que la courbe elliptique n'ait pas de multiplication complexe (« Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques », *Œuvres,* n° 94, 1972). Ce théorème peut être vu comme une généralisation de l'irréductibilité des polynômes cyclotomiques de Gauss.

Un peu avant, dans *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves* (Benjamin Publ., 1968 ; 2^{e} édition, A. K. Peters, 1998), Serre avait étudié comment s'organisent ces groupes de Galois lorsque l'on fait varier n parmi les puissances d'un nombre premier ℓ fixé. Toujours lorsque la courbe n'a pas de multiplication complexe, on obtient des « sous-groupes de Lie ℓ-adiques » ouverts du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ des matrices 2×2 inversibles à coefficients dans l'anneau des entiers ℓ-adiques, presque toujours égaux au groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$.

Les résultats précédents correspondent en fait à des *représentations* de dimension 2 du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$ (à coefficients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_\ell$). Selon la philosophie de Langlands, de telles *représentations galoisiennes* doivent correspondre à des *formes modulaires*. On sait en effet attacher aux deux types d'objets des fonctions holomorphes définies par une série de Dirichlet (*séries L*) que l'on peut décomposer en produit eulérien (par définition dans le cas des représentations galoisiennes, via un théorème de Mordell dans le cas des formes modulaires). Dans le cas des formes modulaires, ces séries L possèdent une équation fonctionnelle remarquable, due à Hecke.

En 1974, Deligne et Serre (« Formes modulaires de poids 1 », *Œuvres,* n° 101) ont construit, pour toute forme modulaire de poids 1, une représentation du groupe $\Gamma_{\mathbf{Q}}$ à coefficients complexes. Le cas du poids $k = 2$ avait été traité par Shimura (1961), celui des poids plus grands par Deligne quelques années auparavant ; les coefficients des représentations construites sont alors les entiers ℓ-adiques. Ces constructions sont importantes, non seulement parce qu'elles confirment la philosophie de Langlands, mais aussi parce qu'elles permettent de majorer les coefficients de Fourier des formes modulaires (c'est ainsi que Deligne démontra la conjecture de Ramanujan sur la fonction τ).

Il restait la question de savoir si les réprésentations galoisiennes, telle celle associée à une courbe elliptique, proviennent effectivement de ces constructions, autrement dit si la série L attachée à une courbe elliptique vérifie une certaine équation fonctionnelle. La conjecture précise porte, suivant les auteurs, les noms de Taniyama, Shimura et Weil et a connu un regain d'intérêt au début des années quatre-vingts quand G. Frey a suggéré que cette conjecture pourrait permettre de démontrer — enfin ! — le grand théorème de Fermat.

Cette nouvelle approche du théorème de Fermat a été rendue possible grâce à une conjecture très précise de Serre, publiée en 1987, sur la nature modulaire des représentations galoisiennes à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, ℓ étant un nombre premier (« Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ », *Œuvres,* n° 143). En fait, autant il arrive fréquemment à Serre de poser des *questions*, autant rares sont ses *conjectures*. En l'occurrence, ce sont des vérifications numériques effectuées par J.-F. Mestre qui ont convaincu Serre de la justesse de cette conjecture.

Ainsi se trouvait précisée l'intuition de Frey que « Weil + $\varepsilon \Rightarrow$ Fermat ». C'était la prise nécessaire à l'ascension de ce sommet récalcitrant ! Le ε est devenu peu après un théorème de K. Ribet (1990). Dans le cas nécessaire pour Fermat, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil a ensuite été démontrée par A. Wiles (avec la collaboration de R. Taylor) en 1995, puis étendue au cas général par Breuil, Conrad, Diamond et Taylor (2001).

Il est difficile d'imaginer ce que seraient les mathématiques aujourd'hui sans l'œuvre de Jean-Pierre Serre.

Références bibliographiques

Jean-Pierre Serre. — *Œuvres. Collected papers,* volume I (1949–1959), II (1960–1971), III (1972–1984), IV (1985–1998). Springer-Verlag, 2000.

Jean-Pierre Serre. — *Exposés de séminaires (1950–1999),* Documents mathématiques **1**, Société Mathématique de France, 2001.

Pierre Colmez, Jean-Pierre Serre (éditeurs). — *Correspondance Grothendieck–Serre,* Documents mathématiques **2**, Société Mathématique de France, 2001.

Jean-Pierre Serre. — *Cours d'arithmétique,* Presses universitaires de France, 1970. (Trad. anglaise, Springer-Verlag, 1978.)

C. T. Chong, Y. K. Leong. — « An interview with J-P. Serre », *Intelligencer* **8** (1986), p. 8–13.

Michel Raynaud. — « Jean-Pierre Serre : une certaine éthique des mathématiques », *Gazette des mathématiciens* **98**, octobre 2003.

Michel Raynaud. — Recension de la *correspondance Grothendieck-Serre*, *Gazette des mathématiciens* **98**, octobre 2003. (Trad. anglaise : *Notices of the AMS*, octobre 2003.)

Marian Schmidt. — « Entretien avec Jean-Pierre Serre », *in Hommes de sciences*, p. 218–227, Hermann, 1990 ; reproduit dans *Wolf Prize in Mathematics*, édité par S. S. Chern et F. Hirzebruch, vol. 2, p. 523–551, World Scientific Publishing (2001).