LIVRES

Introduction à l'estimation non-paramétrique
ALEXANDRE B. TSYBAKOV
Mathématiques & Applications, vol. 41, Springer-Verlag 2004.
175 p. ISBN : 3-540-40592-5. 33,15 €

De quoi s'agit-il ? Lorsqu'on dispose d'un modèle précis pour des suites de variables aléatoires, on est généralement amené à faire de la statistique paramétrique. Un nombre fini et de préférence restreint de paramètres résume alors le modèle, le plus simple possible. Par exemple, on pense que des variables, pour lesquelles on est capable de collecter des données, sont issues d'un tirage dans une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. Dans ce cas, m et σ^2 sont des paramètres pour lesquels on va chercher des estimateurs en faisant appel à diverses méthodes classiques. Puisqu'on sait déjà que la loi est gaussienne, elle est entièrement connue dès que des valeurs pour m et σ^2 sont disponibles. De même, si l'on souhaite étudier le lien entre des variables Y_i et des variables X_i, $i = 1, \ldots, n$, on sera classiquement amené à chercher deux paramètres a et b, tels que $Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i$ où ε_i, $i = 1, \ldots, n$ représente un bruit. Ici, on a introduit une fonction $f_{a,b}(x) = ax + b$ qui présuppose un lien affine entre les variables considérées. Dans ce modèle dit de « régression linéaire », on sera capable de quantifier le lien ou de prédire Y_{n+1} au vu d'un nouvel X_{n+1} dès que des méthodes statistiques seront à même de fournir des valeurs raisonnables pour a et b.
Mais on peut ne pas disposer de telles informations privilégiées (« la loi est gaussienne », « la fonction est affine ») et, à titre préliminaire ou final, vouloir se démarquer des modèles en cherchant des fonctions plus générales. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, de loi commune f ; les Y_i sont liées aux X_i par une relation plus floue : $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$. On va alors chercher f en tant que fonction, en dehors de toute contrainte de forme, en ne prenant en compte éventuellement que son ordre de régularité. Les estimateurs $\hat{f}_n$ que l'on met alors en place sont qualifiés de non-paramétriques. C'est à cette gamme de méthodes statistiques que s'intéresse A. Tsybakov dans ce livre. Il illustre avec clarté et rigueur les méthodes utilisées, principalement au travers des deux exemples ci-dessus : l'estimation de densité et l'estimation de régression.

Le plan du livre. A. Tsybakov expose dans le chapitre 1 de son livre les méthodes utilisées pour construire des fonctions aléatoires $\hat{f}_n$ à partir des $X_1, \ldots, X_n$ ou des couples $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ en vue d'estimer une fonction générale f, ainsi que les critères utilisés pour apprécier leurs performances. Il faut se donner une gamme de fonctions (des noyaux) ou des bases de $\mathbb{L}^2(A)$ où A est un compact ou $\mathbb{R}$ tout entier (histogrammes, ondelettes), trouver une construction de l'estimateur et évaluer l'erreur théorique commise. Le premier objectif est de vérifier que cette erreur tend vers 0 quand le nombre d'observations n tend vers l'infini, et de déterminer à quelle vitesse cette convergence a lieu. Par exemple l'erreur mesurée en norme $\mathbb{L}^2$ dite « erreur quadratique » donne classiquement lieu à une décomposition biais au carré + variance : ces deux termes ont des comportements antagonistes et amènent à faire des compromis (sur le choix de la fenêtre d'un noyau, de la dimension d'un espace de projection) puis à des évaluations des vitesses de convergence. Le premier chapitre du livre de A. Tsybakov développe cette problématique et l'illustre de façon très convaincante. Une longue expérience de l'enseignement de ce thème nous vaut une description tout à fait limpide.

Les autres chapitres du livre de A. Tsybakov, se penchent sur deux problèmes donnant encore lieu à de nombreuses recherches. Tout d'abord, lorsqu'on dispose d'un estimateur parvenant à estimer une fonction à une certaine vitesse, on peut légitimement se demander s'il a « la bonne vitesse » ou non, c'est-à-dire si l'on peut envisager de faire mieux et de construire un estimateur qui convergerait plus vite. Il faut donc définir une notion d'optimalité, et c'est ce que fait la théorie dite du « risque minimax ». Schématiquement, un estimateur fournit une majoration du risque dans un certain cadre, mais on a besoin d'une borne inférieure, en un certain sens, qui soit de même ordre de grandeur que la borne supérieure : ainsi dispose-t-on d'une vitesse de référence. L'objet du chapitre 2 est de décrire les délicates techniques utilisées pour établir des bornes inférieures et avoir des résultats d'optimalité sur les estimateurs. Le dernier chapitre enfin est beaucoup plus spécialisé et technique et s'intéresse à l'efficacité asymptotique exacte, c'est-à-dire à l'étude du comportement asymptotique exact du risque minimax.

Disons pour conclure qu'il ne fait aucun doute que le livre de A. Tsybakov va devenir une référence pour tous les élèves de DEA qui voudront s'initier aux méthodes non paramétriques, construction d'estimateurs et étude de leur optimalité. Il est probable également que les enseignants désireux de préparer des cours clairs et concis ne manqueront pas de s'en inspirer, ni les chercheurs de s'y référer.

Fabienne Comte, Université Paris 5

Higher-Dimensional Algebraic Geometry
Olivier Debarre
Universitext, Springer-Verlag, 2001. 233 p. ISBN : 0-387-95227-68. 22,95 €

Le livre d'Olivier Debarre est une introduction compréhensible et précise au programme de Mori, accessible à tout mathématicien possédant une culture de base en géométrie algébrique. C'est surtout un livre consacré aux courbes rationnelles sur les variétés algébriques.

Classifier les variétés algébriques projectives à isomorphisme près est un programme ambitieux : les courbes sont classifiées depuis Riemann, les surfaces depuis près d'un siècle, les variétés algébriques de dimension 3 sont le cadre où le programme de Mori a connu ses succès les plus spectaculaires depuis vingt ans. On peut aussi tenter de classifier les variétés algébriques de façon plus grossière en se demandant si deux variétés sont isomorphes sur un ouvert dense : on fait alors de la géométrie birationnelle.

La théorie de Mori n'est que très peu représentée en France, probablement parce qu'aucun de ses fondateurs (Kawamata, Kollár, Miyaoka, Mori, Reid ou Shokurov pour n'en citer que quelques uns) ne s'y trouve, mais aussi parce que les recherches actuelles dans ce domaine ont atteint un niveau technique très élevé et enfin parce qu'il n'y a que très peu d'ouvrages d'introduction au sujet. Le débutant se trouvait face à une muraille bien difficile à percer, si bien que très peu de jeunes ont été tentés de s'y plonger !

Ce livre, le seul ayant adapté réellement son style à son objectif pédagogique affiché, permettra sans aucun doute de remédier à cette anomalie ; l'auteur insistant beaucoup sur le point de vue géométrique (le rôle des courbes rationnelles est effectivement ce qui est le plus expliqué dans ce livre), multipliant les exemples et exercices accessibles. Seul le dernier chapitre, indispensable pour qui veut aller plus au cœur de la théorie, est plus difficile à appréhender.

Détaillons un peu le contenu. Le premier chapitre rappelle les bases de la théorie de l'intersection courbes/diviseurs et se termine par l'étude du lieu exceptionnel d'une application birationnelle entre variétés lisses (il y est montré que ce lieu est couvert par des courbes rationnelles). Le deuxième chapitre introduit l'espace des morphismes entre deux variétés algébriques, en insistant rapidement sur le cas où la variété source est une courbe : Debarre choisit, à juste titre selon moi, de mettre dans une boîte noire la construction globale de Grothendieck, mais en explique suffisamment les aspects locaux pour que le lecteur s'en satisfasse. Le chapitre trois est le cœur de l'idée géniale de Mori : le lemme de cassage (« bend and break ») permettant de produire des courbes rationnelles et le passage à la caractéristique positive (rappelons qu'on ne sait toujours pas se passer de ce magnifique argument, ce qui gêne un peu ceux qui veulent faire de la théorie de Mori dans un cadre kählérien). Debarre donne plusieurs versions du « bend and break », et l'utilise pour montrer que deux points d'une variété de Fano complexe sont reliés par une chaîne de courbes rationnelles. Dans le chapitre quatre, l'auteur introduit les notions de courbes rationnelles libres et très libres d'une variété (ce sont en particulier des courbes dont les déformations recouvrent la variété), les techniques de lissage de chaînes de courbes rationnelles et en déduit la simple-connexité des variétés lisses rationnellement connexes. Dans le chapitre cinq, la notion de quotient rationnel est introduite. Il s'agit d'identifier deux points d'une variété algébrique s'ils peuvent être reliés par une chaîne de courbes rationnelles appartenant à une famille fixée à l'avance. Debarre donne la construction algébrique dans le cas des familles plates ; une construction analytique sans l'hypothèse de platitude, non abordée dans ce livre, est due à Campana. Il en déduit entre autre une borne sur le degré anti-canonique des variétés de Fano, borne permettant de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de types de déformations de variétés de Fano de dimension fixée. Il donne aussi de nouveaux exemples de grands degrés. Dans le chapitre six, Debarre démontre le célèbre théorème du cône sur les variétés lisses : ce résultat affirme que le cône des courbes a une structure localement polyédrale du côté où le fibré anti-canonique est strictement positif, chaque arête donnant lieu à une contraction de la variété sur une autre variété projective, singulière en général. Ce théorème est essentiel lorsque l'on classifie les variétés de dimension trois et plus. Évidemment, les travaux récents ou moins récents sur la structure précise des contractions ainsi que sur l'accomplissement du programme de Mori en dimension trois sont absents du livre, certains sont évoqués à la fin du chapitre. On peut le regretter mais il est vrai que les arguments nécessaires vont au-delà des prérequis nécessaires, que

Debarre a voulu limités (peut-être le sujet d'un Tome 2 ?). Le chapitre sept présente les techniques cohomologiques, introduites initialement par Shokurov, permettant de faire de la théorie de Mori sur les variétés singulières (c'est indispensable, on le sait bien !). Certains experts de la théorie de Mori – en particulier ceux qui continuent à la développer – auraient probablement souhaité que ce chapitre soit en fait le cœur, voire le tout début, du livre ; je remercie Debarre d'avoir adopté le point de vue qui est le sien, ce livre permettra d'apprendre la théorie de Mori sans être broyé par une machine infernale ! Ceux qui connaissent Olivier ne sont pas étonnés du soin extrême avec lequel ce livre est écrit ; des coquilles, inévitables pour un tel travail, sont corrigées « en direct » sur la page maison de l'auteur : `http://www-irma.u-strasbg.fr/~debarre/`.

Laurent Bonavero, Institut Fourier de Grenoble I

Character Theory for the Odd Order Theorem
Thomas Peterfalvi
Translate by R. Sandling. Cambridge University Press, 2000.
162 p. ISBN : 0-521-6460-X. 30,00 €

Commencée avec le programme – on pourrait dire « l'appel » – de Brauer (ICM, 1954), la classification des groupes finis simples se termine trente ans plus tard grâce à l'effort conjugué de plusieurs autres mathématiciens emmenés par la personnalité bouillante de Daniel Gorenstein. Mais le signal décisif reste le *Odd order paper* de Feit-Thompson, publié en 1963 [FT] et où les auteurs démontrent la fameuse assertion conjecturée par Burnside :*Tout groupe d'ordre impair est résoluble*.

C'est ce résultat qui permet de lancer la classification autour de la question des centralisateurs d'involutions[1]. L'article de Feit-Thompson compte 255 pages d'une remarquable clarté – auxquelles il faut ajouter les 17 pages du travail précurseur [FHT] – mais les références utilisées par [FT] ont moins bien vieilli, remplacées avantageusement aujourd'hui par un choix de traités généraux écrits depuis. Surtout, de nombreux auteurs ont apporté des simplifications à l'article original.

Il y a maintenant un moyen très pratique de comprendre [FT] à partir des ouvrages de base de théorie des groupes finis (voir [G], [A]), c'est de lire l'ouvrage de Bender-Glauberman ([BG], 170 pages) et la première partie (90 pages) de celui de Peterfalvi, tous les deux parus chez Cambridge University Press.

Le contenu de [BG] est décrit par le compte rendu paru dans la *Gazette* (n° 69).

Character theory for the Odd Order theorem correspond, lui, à la partie V de [FT], où, à partir des résultats de [BG], il est montré qu'un éventuel contre-exemple au théorème de Feit-Thompson devrait se conformer à une certaine configuration. Celle-ci s'avèrera contradictoire dans la partie VI de [FT] (la dernière – 17 pages, ramenées à 8 par une simplification de Peterfalvi, voir [BG] p. 145-152).

Les méthodes, comme l'indique le titre, sont essentiellement celles de la théorie des caractères. Leur utilité dans la classification des groupes finis simples concerne surtout la caractérisation des groupes de 2-rang $\leqslant 2$ (y compris 0, dans le cas

[1] On lira [So] pour un panorama historique très vivant et [Pu] pour une précieuse synthèse mathématique de la classification après [FT].

présent). Nous parlons ici de la pointe la plus avancée de méthodes inaugurées par Brauer et Suzuki, et considérablement perfectionnées par Feit, Glauberman, etc.

Comment donner une idée de ces méthodes dans la preuve du théorème de Feit-Thompson ? Même s'il y a un abîme de sophistication, et six décennies, entre les deux résultats, jetons un coup d'œil à la démonstration originale d'un théorème de Frobenius qui se trouve dans tous les livres de théorie des caractères (voir par exemple [A] 35.24, [G] 5.1). On a H un sous-groupe du groupe fini G tel que $H \cap gHg^{-1} = \{1\}$ pour tout $g \in G \setminus H$. L'induction à G des différences $\psi = \theta(1).1_H - \theta$, θ décrivant les caractères irréductibles non triviaux de H, produit une isométrie entre un groupe de caractères généralisés de H et un autre de G. Cela permet d'écrire $\mathrm{Ind}_H^G \psi = \theta(1).1_G - \chi_\theta$ où $\theta \mapsto \chi_\theta$ est une bijection de $\mathrm{Irr}(H) \setminus \{1_H\}$ avec un sous-ensemble de $\mathrm{Irr}(G)$. On en conclut que H admet comme complément l'intersection des noyaux de ces χ_θ (Frobenius, 1901). Les trois étapes que l'on vient de voir : isométrie « partielle », extension en une bijection de caractères, existence d'un sous-groupe normal, sont celles que l'on retrouve dans [FT] sous la forme : isométrie de Dade, cohérence, conséquences sur la structure de G. Ajoutons que c'est la dernière étape qui reste la moins bien comprise, même si les deux autres sont déjà extraordinairement plus techniques que dans le cas du théorème de Frobenius.

Peterfalvi donne une rédaction aussi claire que le sujet le permet, ne supposant connus que des rudiments de théorie des caractères, et incorporant de nombreuses simplifications et clarifications dues à Dade, Sibley (« théorème 6.8 ») et lui-même.

Comme le font remarquer Peterfalvi et les auteurs de [BG], on peut aussi s'initier à [FT] en parcourant les articles de Suzuki [Su] ou de Feit-Hall-Thompson [FHT] prouvant le théorème pour un groupe fini G où le centralisateur $C_G(x)$ de tout élément $x \neq 1$ est abélien, respectivement nilpotent (voir le traitement de [G] § 14). Plus encore que le théorème de Frobenius évoqué plus haut, ce sont de bons modèles réduits de ce qui est réalisé dans [FT].

Nous n'avons parlé que de la première partie du livre de Peterfalvi. L'éditeur y a joint la démonstration du Théorème de Suzuki (1964) caractérisant les groupes finis $\mathrm{PSL}_2(2^a)$, $\mathrm{PSU}_3(2^{2a})$ et $\mathrm{Sz}(2^{2a+1})$ par leur BN-paire de rang 1. Peterfalvi a déjà publié cette partie en français [Pe], montrant la généralisation très forte due à Bender (1971) :

Théorème. — *Si G est un groupe fini contenant un 2-sous-groupe de Sylow U de rang $\geqslant 2$, tel que les normalisateurs de sous-groupes non triviaux de U engendrent un sous-groupe propre $B := <N_G(V) \mid U \supseteq V \neq \{1\}> \neq G$, alors on a un dévissage $O_{2'} \subseteq L \subseteq G$ où $O_{2'}$ est le plus grand sous-groupe normal de G d'ordre impair, L est normal dans G, G/L est d'ordre impair, et $L/O_{2'}$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(2^a)$, $\mathrm{PSU}_3(2^{2a})$ ou $\mathrm{Sz}(2^{2a+1})$.*

Le théorème de Suzuki dit à peu près la même chose sous l'hypothèse supplémentaire que G est muni d'une BN-paire scindée où B joue le rôle du sous-groupe de Borel. Sa démonstration, où Peterfalvi utilise, corrige et abrège notablement la démonstration de Suzuki, consiste essentiellement à expliciter la loi du groupe à l'aide d'une décomposition « à la Bruhat »

$$G \setminus B \leftrightarrow U \times T \times U.$$

Ceux qui trouvent frustrant de raisonner trop longtemps sur un groupe fini qui, au bout du compte, n'existe pas, comme pour le théorème de Feit-Thompson, assisteront là au patient dévoilement d'une structure « de Lie » (de rang 1). Auparavant, une première étape a servi à déterminer la structure de B (chapitre III), en faisant usage là aussi de résultats de « cohérence » dus à Feit-Sibley et prouvés en appendice. Signalons que la démonstration utilise le cas du 2-rang 1, réglé par le théorème de Brauer-Suzuki (un théorème présent dans beaucoup de livres sur les groupes finis, voir [G] § 12), et le cas du 2-rang 0... c'est-à-dire Feit-Thompson.

Ce théorème de Suzuki constitue donc l'introduction obligée au théorème de Bender, lui-même l'un des premiers pas de la classification après [FT]. Mais pour le lecteur francophone, le mieux est peut-être de retourner à [Pe] qui enchaînait les deux démonstrations.

Références.

[A] Aschbacher, M., *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1986.

[BG] Bender, H., Glauberman, G., *Local analysis for the odd order theorem*, Cambridge University Press, 1994.

[FHT] Feit, W., Hall, M., Thompson, J., Finite groups in which the centralizer of any non-identity element is nilpotent, *Math. Z.* **74** (1960), 1–17.

[FT] Feit, W., Thompson, J., Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775–1029.

[G] Gorenstein, D., *Finite groups*, Harper-Row, New York-London, 1968

[Pe] Peterfalvi, T., Le théorème de Bender-Suzuki, *Astérisque* **142–143** (1986), 141–295.

[Pu] Puig, L., La classification des groupes finis simples : bref aperçu et quelques conséquences internes, Séminaire Bourbaki, Vol. 1981/1982, pp. 101–128, *Astérisque* **92–93** (1982).

[So] Solomon, R., On finite simple groups and their classification, *Notices of the A.M.S.*, **42-2** (1995), 231–239.

[Su] Suzuki, M. , The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **8** (1957), 686–695.

Marc Cabanes, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu et Université Paris 7

Fibonacci's Liber Abaci

A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation

Laurence E. Sigler

Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences,
Springer, New York, 2002. 636 p. ISBN : 0-387-40737-5. 54,95 €

Le *Liber abaci*, ou Livre du calcul, est une des œuvres mathématiques fondamentales du XIII[e] siècle. L'auteur, Léonard de Pise, bien connu aujourd'hui sous le nom de Fibonacci, fait paraître un premier manuscrit en 1202, puis une seconde version en 1228. Il écrit en latin, comme tous les lettrés de son temps, mais contrairement à la plupart d'entre eux, il n'appartient pas à l'Église. Il a vécu sa jeunesse dans le milieu du commerce et des affaires. D'après les quelques témoignages que nous pouvons lire dans l'introduction de 1228 au *Liber abaci*, nous savons que son père représentait les marchands pisans à Bougie, l'actuelle Bejaia en Algérie. C'est là que dans son enfance, Léonard a été initié par un maître aux « chiffres indiens », au principe de la numération décimale positionnelle et aux techniques opératoires qui en découlent, divulguées ensuite dans l'Empire arabo-musulman. Fibonacci fait l'éloge de ces procédés de calcul qu'il place au-dessus de tous les autres, sans préciser davantage (utilisation des chiffres romains, calcul sur les doigts, calcul avec jetons). Il complète sa formation dans les villes du pourtour méditerranéen où il voyage pour ses affaires ; il y rencontre en effet des « maîtres » célèbres, notamment à Constantinople, nous le savons grâce à ses allusions au cours de la résolution de quelques problèmes dont il situe l'origine. De retour à Pise, Léonard écrit le *Liber abaci*, où il regroupe les connaissances qu'il a acquises, connaissances encore nouvelles en Europe, dont la diffusion n'a vraiment commencé qu'au siècle précédent avec des traductions latines d'ouvrages arabes. Et on ne doute pas que les compétences mathématiques de Fibonacci lui permettent aussi d'enrichir son œuvre de réflexions et créations personnelles. Le *Liber abaci* a été l'une des principales sources de diffusion, en Italie d'abord puis plus largement en Europe, de la numération indo-arabe, des techniques opératoires qui en sont issues et de l'algèbre des équations, dans la lignée des travaux de la première génération des algébristes arabes (IX^{e}-X^{e} siècles). Il apporte à la fois des connaissances théoriques et pratiques. Fibonacci se réfère d'un côté aux grands noms des mathématiques grecques, au premier rang desquels Euclide, dont il reprend les résultats et les méthodes démonstratives ; d'un autre côté, il décrit un système de calcul qui va prouver peu à peu son efficacité, qu'il applique à des problèmes commerciaux concrets, comme le change ou le troc. D'où l'impact important de ce texte dans les milieux du négoce en Italie. Dès la fin du XIV^{e} siècle se développent en effet dans les grandes places commerçantes et financières italiennes des écoles laïques destinées à pallier l'insuffisance de l'Université scolastique en matière de formation. L'enseignement dispensé dans le cadre universitaire n'était pas adapté aux besoins mathématiques des futurs marchands et hommes d'affaire, que l'expansion du commerce et de la finance avait fait naître. Et de plus il se faisait en latin, une langue de moins en moins bien maîtrisée, du moins dans ce milieu. On crée donc dans ces écoles ou « boutiques d'abaque » un enseignement tourné vers la pratique et on abandonne du même coup l'usage du latin pour celui de la langue vulgaire. Les écoles d'abaque deviendront célèbres, notamment à Florence, et accueilleront non seulement des fils de marchands mais aussi des artistes du Quattrocento. Elles ont également formé la plupart des grands algébristes italiens du XVI^{e} siècle. Dans ce milieu, Le *Liber abaci* a été lu, copié et étudié ; de nombreux ouvrages à vocation plus ou moins pratique des XIV^{e} et XV^{e} siècles en sont issus (les « livres d'abaque ») ; ils sont en langue vulgaire et s'inspirent, explicitement ou non, de son contenu. Même si l'œuvre de Fibonacci n'est pas la seule source de diffusion du calcul indo-arabe et de l'algèbre arabe en Italie, elle a donc fortement contribué à sa popularisation. Dans les autres pays européens, le rôle du *Liber abaci* est plus flou et certainement moins direct. En France, par exemple, les ouvrages que l'on peut comparer aux « livres d'abaque » sont beaucoup moins nombreux, ils ont été écrits plus tardivement, et ont bénéficié de sources multiples venant d'Italie et d'Espagne, que l'on ne connaît pas encore bien. Le *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet, par exemple, ouvrage manuscrit paru à Lyon en 1484, a sans doute puisé à des sources italiennes, en particulier pour la partie algébrique qui domine mathématiquement tout ce qui a été écrit à l'époque et dont l'origine reste une énigme. En revanche, c'est attesté, Chuquet a pris beaucoup de matière dans des ouvrages antérieurs d'arithmétique pratique écrits dans le sud de la France.

Le *Liber abaci* est un livre encyclopédique mêlant, comme on l'a dit, théorie et pratique. Il est divisé en quinze chapitres. Les sept premiers sont consacrés à la numération et aux techniques opératoires, puis viennent les applications : problèmes concernant les activités commerciales (chapitres 8 à 11), comme le troc, le change, l'aloi,..., problèmes variés, puisés dans diverses traditions, pseudo concrets ou récréatifs, qui affinent l'esprit mathématique (chapitres 12 et 13). Le chapitre 14 débute par les méthodes d'extraction des racines, et se poursuit par des calculs portant sur les quantités irrationnelles dans la classification proposée au livre X des *Éléments* d'Euclide. Enfin le chapitre 15, en trois parties, se termine par une exposition de problèmes selon « le mode de l'algèbre et de l'al-muqabala » (secundum modum algebre et almuchabale) qui suit le premier courant algébrique, celui d'al-Khwārizmīet d'Abū-Kāmil. Les six types d'équations du premier et du second degré [1] sont présentés, suivis d'un algorithme de résolution justifié géométriquement *a posteriori*. Cet exposé est suivi de nombreux exemples pouvant se ramener à l'un des cas canoniques. La plupart des méthodes connues de résolution de problèmes sont exposées ici ou là dans le *Liber abaci* : simple fausse position, règle elchatayn ou double fausse position [2] (chapitre 13), ou encore *regula recta*, méthode « due aux arabes » dans laquelle la quantité cherchée est posée égale à l'inconnue (la « chose ») et qui est utilisée pour résoudre des problèmes du premier degré avant l'exposition de l'algèbre.

Le *Liber abaci* a été édité en 1857 par Baldassarre Boncompagni, à partir d'un seul manuscrit florentin. Cette édition latine fait maintenant partie des livres rares et aucune traduction complète en langue vulgaire n'avait jusqu'à présent été menée à bien. C'est donc avec beaucoup d'intérêt que nous accueillons l'édition anglaise de L.E. Sigler. L'historien des sciences médiéviste ne peut faire l'économie du *Liber abaci* et L.E. Sigler nous fournit donc un outil de travail très utile et qui manquait cruellement. L'auteur a été professeur au département de mathématiques de l'université de Bucknell, USA. Il est décédé en 1997, mais il semble qu'à sa mort, l'édition qu'il préparait était terminée, introduction comprise. Cette traduction n'utilise que l'édition de Boncompagni. Il ne s'agit donc pas d'une édition critique fondée sur la comparaison de plusieurs manuscrits du *Liber abaci*. Dans l'introduction, l'auteur précise que les erreurs d'impression contenues dans la version de Boncompagni ne sont pas source d'ambiguïté et que le texte exact peut toujours être restauré sans peine. Ce qui est fait systématiquement et indiqué par une note. On peut penser cependant que la transcription de Boncompagni contient d'autres erreurs moins faciles à détecter et qui demeurent donc dans la traduction anglaise. Une introduction d'une dizaine de pages nous donne des renseignements sur la vie de Léonard de Pise (dont la plupart sont d'ailleurs relatés par le mathématicien lui-même dans la seconde version du *Liber abaci*), sur son œuvre et sur le rôle important du traité dans l'histoire des mathématiques. Un bref rappel de différentes techniques de calcul au cours des âges est présenté, puis vient une description détaillée des différents chapitres. C'est une description claire et fidèle malgré quelques affirmations trop peu nuancées, frisant l'anachronisme. On lit par exemple, à la page 9 : « *Leonardo makes frequent use of negative numbers* »). L'expression « nombre négatif » n'a pas de sens dans le contexte du XIII^{e} siècle : Léonard de Pise n'utilise pas de tels nombres. À chaque fois qu'une résolution mène à une solution négative, il observe que, soit le problème n'a pas de solution, soit la solution trouvée correspond à une dette (il s'agit toujours de problème concrets où l'on recherche des sommes d'argent). Et si la quantité négative trouvée intervient ensuite dans des calculs, on ne l'ajoute pas aux autres nombres, on retranche une dette. Le premier exemple connu où intervient un résultat négatif accepté comme tel, sans commentaires, se trouve dans une arithmétique commerciale écrite en occitan dans les années 1430 (Paris, BnF, fds fr. 4140). Or, s'agissant encore une fois d'argent, il était facile à l'auteur de justifier le résultat en termes de dette, comme Fibonacci, ce qu'il ne fait pas et qui rend cet exemple remarquable. Pourtant on est encore loin de concevoir la solution en tant que « nombre négatif » ; c'est au mieux une « quantité en moins ». Si, à partir du XVI^{e} siècle, les mathématiciens utilisent de plus en plus les quantités négatives, il faudra cependant attendre le XIX^{e} siècle pour légitimer la notion de nombre négatif. On peut faire le même type de critique à propos de notes où l'auteur projette sur les mathématiques de Fibonacci ses propres connaissances. Par exemple, dans la note 12 du chapitre 5, on lit : « *by computing with residues modulo an arbitrary prime number, Leonardo anticipates the elements of C.F. Gauss's arithmetic theory of residues* ». Cette note souligne l'usage de la preuve « par 9 » ou par un autre nombre comme 7 ou 11 pour tester l'exactitude des opérations. On trouve de telles méthodes dans des traités arabes. On ne peut pas pour autant en conclure que la théorie des résidus est sous-jacente ! Il s'agit d'une technique pour déceler les erreurs, sans appareil théorique. L.E. Sigler s'est efforcé, comme il le fait remarquer à la fin de l'introduction, de rester le plus près possible du texte latin dans sa traduction. Principe qui est le plus souvent respecté. Ce souci louable présente parfois quelques inconvénients, soit lors de passages obscurs en latin, soit pour la compréhension de termes dont le sens est difficile à saisir, même dans le contexte, et qu'une traduction littérale n'aide donc pas à éclairer, en l'absence de notes explicatives. En d'autres endroits, L.E. Sigler prend au contraire des libertés par rapport au texte, sans justifier ses choix par une note, et on le regrette. Ainsi, pour la traduction d'expressions nombreuses impliquant le verbe « *reperiuntur* », comme à la page 268, « *quia 1/4 1/3 reperiuntur in 12* », l'auteur utilise toujours la notion de plus petit dénominateur commun : « *because the least common denominator of 1/4 and 1/3 is 12* ». L'expression latine se traduit littéralement par : « parce que 1/4 et 1/3 se trouvent en 12 », et il faut conserver cette traduction que l'on retrouvera deux siècles plus tard dans des textes en français : 12 est un nombre « en quoi se trouvent entièrement les nombres rompus 1/3 et 1/4 ». L'idée n'est pas celle de plus petit dénominateur commun l'expression serait la même si on mettait 24 à la place de 12 mais le fait que 4 et 3 divisent 12. De même, la preuve d'une opération (par 9, par 7), exprimée en latin par « *per pensam de* » est traduite par « *casting out* », et « *accipiat pensam de 7 de 24 059* » est rendu par l'expression trop moderne « *residue modulo 7 of 24 059* ». Si le sens mathématique est respecté, on aurait aimé que l'idée de « pesée », de « ration », associée à l'origine au mot « *pensa* », soit exprimée au moins dans une note. D'autres choix de traductions sont discutables, comme par exemple « *number one* » pour « *unitas* » (p. 49). Dans la tradition grecque qui perdure au Moyen Âge, l'unité n'est pas un nombre.

Lorsque des mots anglais sont ajoutés par rapport à l'original latin, pour une meilleure compréhension, il aurait été plus rigoureux de les écrire entre crochets, ce qui n'est jamais fait, sauf lorsque l'auteur prend avec raison la liberté de créer des titres de paragraphes ne figurant pas dans le texte latin. À l'opposé, des termes latins ne sont parfois pas traduits. Par exemple (p. 49) « *superior numerus partem vel partes inferioris affirmat* » est traduit par « *the upper number means the number of parts determined by the lower number* », qui occulte la distinction traditionnelle entre « une » et « des » partie(s).

Les notes de fin de volume, classées par chapitres, sont restreintes (162 notes pour l'introduction et les quinze chapitres). Un certain nombre expliquent les différentes unités de poids et mesure et de monnaies, ou bien justifient des choix de traduction. L.E. Sigler a pris le parti de très peu commenter mathématiquement les techniques et les problèmes. C'est un choix que l'on admet étant donné la nature encyclopédique de l'œuvre. Pourtant, à l'occasion, certaines questions sont assorties d'un commentaire et la logique des choix n'est alors pas toujours évidente. On la saisit dans des notes comme celles qui expliquent l'écriture aujourd'hui oubliée des fractions « composées », où plusieurs nombres sont juxtaposés tant au numérateur qu'au dénominateur (n° 2 à 6, ch. 5). On approuve aussi les remarques sur l'acceptation de solutions négatives, sur l'utilisation de plusieurs variables dans la résolution algébrique d'un problème (n° 21, ch. 12). Par contre, on saisit mal la raison qui pousse à privilégier l'explication mathématique de certains problèmes ou méthodes et à en ignorer d'autres. On regrette également l'absence de notes lors de quelques passages importants du traité. Ainsi, on sait que le second paragraphe de l'introduction, où Fibonacci décrit sa formation et sa préférence pour les chiffres indiens, pose problème : les traductions disponibles diffèrent toutes notablement sur plusieurs points, en particulier parce que certains mots du manuscrit ne sont pas lus pareillement (on voit ici la nécessité de consulter différents manuscrits) ; il aurait été utile d'en faire part au lecteur. En revanche, des remarques récurrentes non argumentées sur le « style euclidien » de Fibonacci n'ont pas grand intérêt.

Notons enfin que le vocabulaire mathématique, très riche dans le *Liber abaci*, aurait mérité la présence d'un glossaire, toujours utile au chercheur, mettant en évidence les différentes acceptions d'un même mot ou au contraire la multiplicité du vocabulaire attaché à la même idée mathématique (le vocabulaire des opérations est un bon exemple).

La bibliographie compte vingt-quatre titres qui répertorient quelques ouvrages d'histoire des mathématiques, généraux ou en rapport avec la période médiévale, et quelques articles consacrés à Léonard de Pise et à son œuvre.

La présentation et la typographie du livre sont agréables, les différents chapitres et paragraphes bien mis en valeur. On peut regretter que les références aux pages de l'édition de Boncompagni soient difficiles à repérer, pour le lecteur désireux de comparer certaines pages avec le texte latin.

En résumé, cette traduction a un intérêt culturel certain car elle permet d'accéder rapidement au contenu du *Liber abaci*. C'est aussi un outil de travail bienvenu pour le chercheur en histoire des mathématiques. Néanmoins, comme c'est le cas pour de nombreuses traductions, une étude plus fine d'un problème ou d'une méthode mérite un retour au texte latin.

Maryvonne Spiesser, Université Paul-Sabatier Toulouse III