Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées [1]

Adolphe P. Yuskevitch

Depuis 1968 je publie les appréciations de célèbres mathématiciens français sur leurs collègues russes, à l'occasion de leur candidature comme membre étranger de l'Académie des sciences à Paris (la procédure d'élection se déroule de la même manière depuis le milieu du XIX^{e} siècle). Souvent ces appréciations ont de l'intérêt pour l'histoire des relations entre scientifiques de nos deux pays. Bien entendu ces appréciations reflètent le point de vue personnel des orateurs et souvent le jugement sur les candidats dépend aussi de la situation internationale. Les candidatures déja publiées sont celles de Chebyshev, Lyapounov, Bernstein, Vinogradov, Lavrentiev, Kolmogorov. C'est avec grand plaisir que j'ai obtenu l'autorisation de Paul Germain de publier l'appréciation de Jean Leray sur son collègue Sergei Sobolev.

La meilleure appréciation de l'œuvre de Sobolev se trouve dans l'ouvrage [4], publié pour ses quatre-vingts ans[2]. Sergei L'vovich Sobolev[3] a terminé ses études à l'université de Leningrad en 1928. Ses directeurs étaient N. M. Gunther (1871-1941) et V. I. Smirnov (1887-1974), tous deux élèves de V. A. Steklov (1863-1926), lui-même élève de A. M. Lyapounov (1857-1918). Ces quatre professeurs se sont occupés essentiellement toute leur vie de la théorie des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, et de leurs applications en physique mathématique et en mécanique. C'étaient des membres éminents de l'école mathématique de Saint-Pétersbourg devenue Leningrad, école dirigée par P. Chebyshev (1821-1894), l'un des professeurs de Lyapounov. Pendant ses études Sobolev suivit aussi des conférences de Fihtengoltz (1888-1959), qui fut le premier à développer à Leningrad l'étude des fonctions d'une variable réelle qui a suscité les travaux intensifs de l'école de Moscou avec D. F. Egorov (1869-1931), N. N. Lusin (1883-1950) et leurs élèves. Sobolev appartient à la quatrième génération de l'école de Chebyshev, qui a systématiquement exploité les relations entre les mathématiques et les problèmes concrets des sciences et des techniques, sans exclure le souci d'introduire les questions abstraites souvent tôt en amont des questions pratiques (même en théorie des nombres). Il faut aussi insister sur le fait que les professeurs de Sobolev utilisaient déjà eux-mêmes les développements les plus récents des mathématiques – topologie, théorie des fonctions d'une variable réelle, nouveaux secteurs de la théorie des fonctions d'une variable complexe, équations intégrales, analyse fonctionnelle naissante. Le travail de recherche de Sobolev commença tout de suite après la fin de ses études, dans le département de

1 Traduit de *Istoriko-matematicheskie issledovanie*, 1991, p. 256–266 par Jean-Michel Kantor.
2 Voir aussi la *Notice nécrologique de Sobolev* par Jean Leray. [NdT]
3 1908-1989

sismologie de l'Académie des sciences que dirigeait V. I. Smirnov. Et même, encore étudiant à l'université il présenta un diplôme, sur un thème suggéré par Gunther. À l'Institut sismologique, Sobolev fit à nouveau des travaux étroitement liés au thème suggéré auparavant par Gunther, la théorie analytique des équations aux dérivées partielles et en particulier la propagation des ondes élastiques. Certaines de ses premières publications furent cosignées avec Smirnov. Le 29 juin 1930 Sobolev fit un exposé au Premier congrès des mathématiciens de l'URSS « équation des ondes dans un milieu isotrope inhomogène », dont un résumé parut aux *Notes aux Compte Rendus de l'Académie des sciences de Paris*. Ce travail intéressa Jacques Hadamard (1865-1963) qui assistait au congrès et y fit un exposé sur un thème voisin de celui de Sobolev, « équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions d'une variable réelle » ([5], en français et en russe). Déjà les premiers travaux de Sobolev, résumés à la suite de ceux de Gunther et Smirnov dans ([6] huitième partie) eurent un grand écho chez les mathématiciens soviétiques et Sobolev fut élu le 1er février 1933 membre-correspondant de l'Académie des sciences. Il n'avait pas encore 25 ans ! Il devait être élu membre le 29 janvier 1939.

En 1932 Sobolev entre à l'Institut physico-mathématique créé par Steklov en 1921. C'est à cette époque qu'il développe les travaux les plus importants qui établissent le début de la théorie des fonctions généralisées. Il est le premier à les définir mathématiquement et à s'atteler à l'étude de leurs propriétés fondamentales. Un résumé de ses idées a été fait par Smirnov ([7], p. 187-191). Les idées de Sobolev sur les distributions, qu'il appelle fonctionnelles et qui furent ensuite appelées « fonctions généralisées », furent formulées à partir de la fin des années vingt et du début des années trente – si ce n'est pas plus tôt – et exposées dans sa conférence « Solutions généralisées de l'équation des ondes » le 29 juin 1934 au second Congrès des mathématiciens soviétiques à Leningrad. En voici le résumé laconique qu'en fit l'auteur : « *La classe de fonctions qu'on peut considérer comme solutions de l'équation des ondes du point de vue classique est formée de fonctions deux fois différentiables. Mais dans diverses applications pratiques il paraît commode de considérer des fonctions ayant des singularités d'un type bien défini. On introduit un espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue, dans lequel on peut définir les solutions généralisées de l'équation des ondes comme limites de solutions deux fois différentiables. À l'aide d'un critère simple d'intégrabilité, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution généralisée, et on établit le lien entre solutions usuelles et solutions généralisées. Enfin, la théorie ainsi construite est appliquée à quelques exemples concrets ([8], p. 259)* ». Leray accorde une très grande importance aux travaux de Sobolev en théorie des fonctions généralisées, appelées distributions dans la littérature mathématique occidentale, mais il les date des travaux de 1935 et 1936. Smirnov ([7], p. 187) renvoie à l'article [9] de 1935 et aussi à deux autres articles cités dans [9] et [10]. Dans le travail bibliographique [9] la conférence de 1934 n'est même pas mentionnée. Dans les deux volumes classiques de Dieudonné sur l'histoire des mathématiques des deux derniers siècles, Dieudonné écrit que Sobolev a commencé l'étude des fonctions généralisées en 1937 ([11], p. 2, [7], p. 171). Dans l'article « Fonctions généralisées » de 1982 Vladimirov cite [9] et aussi l'article « solutions généralisées » ([12], t. 3, p. 1102-1110, 1116-1117).

Ce n'est que dans l'article écrit à l'occasion du jubilé de Sobolev en 1989, que l'un des auteurs, portant lui aussi le nom de Vladimirov, signale l'article de 1934, « où apparaît pour la première fois la théorie des fonctions généralisées ». On sait bien que l'établissement d'une priorité chronologique entre plusieurs auteurs d'une découverte scientifique ne se fait pas toujours de manière harmonieuse, mais aujourd'hui il ne conduit plus à des effets aussi négatifs, ni à des disputes violentes, comme ce fut le cas par exemple avec Newton et Leibniz, les artisans de l'analyse infinitésimale.

En ce qui concerne la préhistoire de la théorie des fonctions généralisées de Sobolev, elle reste peu étudiée. Un rôle devrait sans doute être attribué dans la mise au point des notions centrales aux travaux de Gunther (en particulier à sa méthode de lissage des fonctions insuffisamment dérivables, travail souvent cité par Smirnov ([7] p. 184). Encore plus tôt, une voie vers la théorie des fonctions généralisées fut trouvée dans les travaux d'Hadamard, en commençant par sa remarque « sur les opérations fonctionnelles » et ses « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique », publiées en 1903. L'académicien Steklov attira l'attention sur ces travaux lors de la présentation de l'œuvre d'Hadamard qui venait d'être élu correspondant de notre Académie le 2 décembre 1922.

L'article de Steklov est profond et d'une portée certaine. Il insiste en particulier sur l'importance du premier article où pour la première fois Hadamard utilise le terme de « fonctionnelle » et il détaille les résultats du second. Il y insiste en particulier sur l'existence des « ondes de choc » dans les liquides compressibles et les corps élastiques. Une remarque intéressante de Steklov est la suivante : les questions d'hydrodynamique, traduites dans le langage de l'analyse mathématique, coïncident avec la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles, « née de manière totalement indépendante d'une quelconque origine physique ». Cette remarque montre que Steklov comprenait parfaitement la signification pour les applications ultérieures de recherches fondamentales abstraites poursuivies de manière complètement indépendante de leur utilisation. D'ailleurs il utilise la terminologie classique dont il a l'habitude (le terme de « fonctionnelle » est utilisé en passant), et il ne pouvait pas prévoir qu'en quelques années c'est essentiellement dans son institut qu'allaient être posées les bases de la théorie des fonctions généralisées. Ce discours de Steklov ne fut publié qu'en 1968 ([1] p. 110-115). En ce qui concerne les avancées d'Hadamard vers la théorie des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, citons l'exposé de G. Shilov (professeur à l'université de Moscou de 1917 à 1975), spécialiste de la question, le 10 février 1964 lors d'une session – mémorial de la société mathématique de Moscou : « En résolvant les équations hyperboliques, Hadamard introduit essentiellement l'appareil de la théorie des fonctions généralisées d'une ou plusieurs variables. Cette découverte est restée en sommeil à l'époque – Hadamard devançait ainsi de nombreuses années les réflexions des mathématiciens de sa génération – et ce n'est qu'au milieu des années cinquante que les fonctions généralisées se sont propagées dans le monde entier dans les questions d'analyse » ([13], p. 185). Shilov achève son intervention en citant les mots de Szolem Mandelbrojt à propos des célèbres « Lectures on Cauchy's problem, 1922, (traduction française 1932, russe 1978) » : les conceptions développées dans ce travail conduisent à la topologie générale et à l'analyse fonctionnelle, et l'introduction de la notion de solution élémentaire est d'une très grande généralité en liaison avec les distributions (fonctions généralisées ([14], p. 4-5). De plus c'est à Hadamard qu'on doit le terme de fonctionnelle et celui d'analyse fonctionnelle. Jean Leray mentionne aussi ces travaux précurseurs. Ce qui a été dit ici ne minimise d'aucune manière les accomplissements de Sobolev, qui a été le premier à donner une définition rigoureuse – et de plusieurs manières – de la notion moderne de fonction généralisée et a posé les bases du développement ultérieur dans divers domaines de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, en tant que domaine autonome de l'analyse.

Presque tous les travaux de Sobolev sur la théorie des solutions et des fonctions généralisées ont été publiés en russe, sauf l'article en français de 1936 ([9], 22). Il n'est donc pas étonnant qu'à l'étranger ces travaux n'aient pas immédiatement attiré l'intérêt qu'ils méritaient. Cette remarque s'applique aussi au livre « Quelques applications de l'analyse fonctionnelle en physique mathématique » (Léningrad, 1950), qui reprenait le cours fait par Sobolev à l'époque à l'université[4]. Ce livre fut traduit en anglais seulement en 1963 (en allemand en 1964), il est cité plusieurs fois par Leray et, comme le remarque V. I. Smirnov « ce livre joua un rôle important dans l'utilisation des idées et des méthodes modernes de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle pour la solution de problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles » ([6] p. 191). En Russie les idées nouvelles de Sobolev, à la suite de celles de ses maîtres Gunther et Smirnov, se diffusèrent assez vite, et furent prolongées et développées à partir des années cinquante. Pour la diffusion de ces nouvelles directions de l'analyse mathématique à l'étranger un rôle majeur doit être attribué à l'ouvrage en deux tomes de Laurent Schwartz « Théorie des distributions », correspondant (1973) puis membre (1975) de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Plusieurs articles de Schwartz entre 1945 et 1948 utilisaient déjà l'expression « distributions ». Après la publication en 1950-1951 du livre de Schwartz, la théorie des distributions connut un très grand développement, et trouva de nombreuses applications nouvelles. La première étude historique sur l'histoire des distributions est celle de Jesper Lützen en 1980, où se trouvent analysés précisément mathématiquement de manière irréprochable les travaux de Sobolev, de Schwartz et de nombreux mathématiciens antérieurs ou contemporains. Malgré tous ces accomplissements le livre de Jesper Lützen contient quelques lacunes et de mon point de vue des appréciations peu convaincantes, qui s'expliquent par une connaissance imparfaite des travaux en russe en général et en particulier de Sobolev (bien que sa bibliographie contienne onze références qui ont été traduites en anglais, comme d'ailleurs le livre de 1950 déja mentionné et le volumineux cours, dans sa troisième version de 1954). La note de Leray sur les travaux de Sobolev complète de manière substantielle l'étude de Lützen.

Sans vouloir écrire l'histoire de la question, je me limiterai ici à quelques remarques sur le livre de Lützen. D'abord je ne peux pas être d'accord avec son appréciation des résultats obtenus par Sobolev puis Schwartz et sur leur place dans le développement de la théorie des distributions. L'essence des différences entre

[4] en fait rédigé pendant une période où une chute retenait Sobolev à l'écart du LIPAN, (cf. p. 38). [NdT]

leurs théories, c'est, selon Lützen (p. 64), le fait que pour Sobolev les distributions sont une technique pour résoudre un problème spécifique, alors que Schwartz mit au point la théorie des distributions sous de nombreux angles, et l'appliqua pour poser et résoudre de manière rigoureuse de nombreux problèmes. Il est vrai qu'en 1934 Sobolev commença par le problème de Cauchy pour l'équation des ondes (qui est hyperbolique), mais ensuite il ne s'est pas restreint à l'une des applications qu'il avait introduites et les a considérablement enrichies, comme le montre Jean Leray (« œuvre d'une étendue, d'une diversité, d'une puissance admirables »...). Il est vrai aussi que ces diverses contributions publiées en articles successifs ne furent pas réunies en une monographie, qui aurait eu sans doute le rôle fondateur du livre de Schwartz, devenu le livre de base pour de nombreux chercheurs à l'étranger et aussi en Russie. Lützen résume d'une formule la différence fondamentale entre les travaux de Sobolev et Schwartz : « Ainsi Sobolev inventa les distributions, mais la théorie des distributions fut créée par Schwartz » (p. 64). Cette réflexion est déclinée dans le livre à plusieurs occasions. Dans l'une (p. 67), après avoir cité Liusternik et Vishik dans un discours prononcé à l'occasion du cinquantième anniversaire de Sobolev (1959), Lützen confirme cette citation pour aussitôt ajouter que « the further development of the theory... was not the work of Sobolev but of Schwartz ». Sans vouloir le moins du monde diminuer l'importance primordiale du livre de Laurent Schwartz de 1950, je trouve bien plus équilibré le jugement émis par S. Vladimirov ([12], t. 4, p. 1104) : « Les fondements de la théorie mathématique des fonctions généralisées furent posés par Sobolev en 1936 en vue de la résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, mais dans les années cinquante L. Schwartz donna un exposé systématique de la théorie et indiqua de nombreuses applications ». On aurait pu ajouter que l'exposé systématique et écrit dans un langage moderne de l'ouvrage de Schwartz a éclipsé les travaux de Sobolev. En ce qui concerne la connaissance qu'aurait eue Schwartz des découvertes antérieures de Sobolev, selon les déclarations que fit L. Schwartz en 1950-1951 et en 1974, il n'en connaissait rien avant 1945 (p. 67 de [16]). Aillleurs Lützen écrit que l'attention de Schwartz fut attirée sur les travaux de Sobolev par Leray en 1946[5]. Assurément Sobolev et Schwartz sont arrivés à leurs découvertes des « fonctions généralisées » et des « distributions » par des voies différentes. Mais assurément aussi il n' y a aucune raison d'associer le travail de Sobolev à la « préhistoire » de la théorie des distributions, comme Lützen l'affirme trois fois (p. 64, 67 et 156). Plus généralement Lützen accorde plus d'attention dans son livre à Laurent Schwartz qu'à Serge Sobolev. L'exposé des résultats selon la bibliographie est correct ; mais il aurait pu être plus détaillé et de ce point de vue la Notice de Leray contient des compléments précieux, si même elle ne contient pas assez de données biographiques sur Sobolev. Ces indications auraient dû et auraient pu être enrichies du texte de Liusternik et Vishik (que cite Lützen et qu'il utilise par ailleurs). Il n'y a aucune indication sur les professeurs de Sobolev ni dans le texte ni dans l'index de références. La biographie de L. Schwartz est traitée de manière opposée. Dans le chapitre 6 nous apprenons toutes les étapes de la vie de Schwartz, le nom des professeurs à l'École normale (Leray, Lévy, Hadamard) ; nous apprenons son appartenance au groupe Bourbaki, sa découverte en six mois des distributions, ses conversations avec de Rham (mentionnées

[5] Voir cependant p. 37 le témoignage de V. Chekchin

aussi par Leray), etc. Toute cette information est précieuse et il est fâcheux que le travail de maturation de Sobolev soit traité par Lützen en une demi-page (p. 60).

Bien sûr, les distinctions entre la « préhistoire » d'une théorie et son développement sont affaire de convention. La notion de « distribution » est apparue chez différents auteurs du début du XX^{e} siècle sous une forme presque explicite, et finalement on peut remonter à Euler (voir plus loin ; Lützen l'évoque aussi). Cependant nous distinguons entre des idées appartenant à la préhistoire, qui sont déjà nées mais n'ont pas été encore introduites dans un cadre bien défini, avec les idées de l'histoire d'une théorie, où elles sont introduites par une définition précise, et où on s'attache à l'étude de leurs propriétés spécifiques. Ainsi on a raisonné avec des fonctions d'un type ou d'un autre dans la Grèce antique, au Moyen Âge, et au début de l'époque moderne, mais les fonctions comme objet d'étude mathématique dans toute leur généralité n'apparaissent qu'à la fin du XVII^{e} siècle. Au demeurant le livre de Lützen s'appelle « Prehistory of… ». Il en résulte que Schwartz auquel est accordé la majorité du livre, fait partie aussi de la préhistoire de la théorie.

Si Lützen avait restreint son étude de la préhistoire des distributions à l'Europe de l'Ouest, il eût été naturel d'insister sur les travaux de Schwartz. Mais pour l'étude du développement des mathématiques, comme processus mondial (ce qu'il a toujours été), le plan suivi ne paraît pas correct. C'est ce que montre en tout cas l'étude historique des faits dans notre pays. Sobolev, à la suite de ses maîtres, joua un rôle important, en posant les bases des nombreuses études qui ont commencé avant même 1970, date de parution de l'article déjà cité de Smirnov, où on trouve le résumé de vingt ans de travaux en théorie des équations aux dérivées partielles, de type elliptique, hyperbolique et parabolique, ou de type mixte, ou encore avec des enrichissements de la théorie générale, travaux de O. A. Ladijenskaia, S. G. Mikhlin, N. N. Ouraltseva, et d'autres. Tous ces travaux n'étaient pas isolés des recherches faites à l'étranger. Des collaborations eurent lieu entre tous ces pays, parfois difficiles pour des questions de communication, par manque de contacts personnels, qui se sont beaucoup développés ces dernières années, et qui auparavant étaient remplacés par les nombreux journaux de références. Mes remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées et des fonctions généralisées ont pour but non seulement de préciser les conclusions du livre de Lützen, mais aussi d'introduire à la présentation de la candidature de Sobolev par Leray qui enrichit de manière essentielle l'étude de l'historien danois.

Il reste à faire quelques remarques complémentaires sur la proto-histoire antérieure, qui a conduit à la résolution de l'équation des cordes vibrantes et à la dispute entre d'Alembert et Euler, dispute qui s'est prolongée près de trente ans, à partir de 1750 et à laquelle ont participé de près ou de loin tous les mathématiciens du XVIII^{e} siècle. Brièvement, d'Alembert excluait tout à fait le cas de discontinuité d'une dérivée et encore plus de la fonction elle-même. Dans mon livre sur l'histoire des mathématiques russes avant 1917 (Naouka 1968), j'ai montré qu'Euler, à partir de considérations physiques, jugeait nécessaire d'admettre comme solutions de problèmes de physique mathématique des fonctions et des courbes, selon son expression, « brisées » ; nous dirions que la position initiale de la corde et sa vitesse initiale sont des fonctions de la position continues par morceaux, autrement dit on permet des discontinuités (au sens moderne) des deux premières dérivées. Sans disposer de l'appareil mathématique nécessaire, Euler fit la description géométrique simplifiée de la propagation des ondes et de leur réflexion pour une corde fixée en un point. Je me permets de citer mon livre : « Ici des fils se tissent entre les idées d'Euler et les nouvelles méthodes du xx^e siècle, jusqu'aux fonctions généralisées de Sobolev et Schwartz » (p. 166, 169). Dans la suite de l'histoire des notions de solutions d'équations aux dérivées partielles l'historien S. S. Demidov s'appuyait comme moi sur une citation de d'Alembert (Opuscules, tome IX) : « Euler comprenait essentiellement comme solution de l'équation une solution généralisée, dont la définition correcte et encore plus la construction, dépassait les capacités des mathématiciens de l'époque » (p. 179). Nous ajoutions alors qu'en raison de son efficacité pratique, la construction d'Euler avait été l'objet de l'attention de nombreux mathématiciens de l'époque. Nos travaux utilisaient les études bien connues de Trusdell sur les travaux d'Euler en hydrodynamique et élasticité. Les références en russe sur ce sujet sont inconnues de Lützen (par exemple sur le tome IX des Opuscules de d'Alembert il ne cite que la conférence de Demidov au congrès international d'histoire des mathématiques de 1977, que d'ailleurs il utilise longuement page 15). Lützen fait aussi remonter à Euler la notion de solution généralisée et il trace un parallèle entre Euler et Sobolev. En utilisant la définition de solutions généralisées comme limite de suite de fonctions classiques, Lützen remarque qu'on trouve cette idée chez Euler en 1765 et Laplace en 1772, et que la définition rigoureuse fut introduite en 1935 par Sobolev puis par d'autres auteurs, en particulier Schwartz en 1944. On peut pour conclure signaler qu'Euler a introduit des fonctions qui pouvaient paraître étranges à ses contemporains (par exemple $(-1)^x$, avec x nombre réel quelconque ... mais pas la fonction delta !)

Références

[1] Relations scientifiques franco-russes, A. Grigorian, A. Yuskevitch, Naouka 1968
[2] Istori. Math. issledovanie, t. 31, 1989, Naouka
[3] Ibidem, 90, t. 32-33
[4] Bakhalov-Vladimirov-Gonchar. Serge Lvovich Sobolev, Ouspekhi Mat. Naouk, 1989, t. 43 ;5, p. 3-13
[5] Travaux du premier congrès des mathématiciens de l'Urss, Kharkov 1930, Gonti, 1935
[6] Sobolev Serge L. Séminaire Smirnov, Éd. de l'Académie des sciences de l'Urss, 1949
[7] Smirnov V. I. Équations aux dérivées partielles. Mathématiques à l'université de Léningrad, Red. Smirnov, LGU, 1970
[8] Travaux du second congrès de mathématiciens de l'Union, Léningrad, 24-30 juin 35
[9] Quarante ans de mathématiques en Urss, 1917-57, ED. Fizmatgiz, 1959, t. 2, Liusternik-Vishik
[10] Mathématiques en Urss, 1958-67, bibliographie, Naouka, 1970, t. 2
[11] Dieudonné Jean. Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900, Éd. Hermann, 1978
[12] Encyclopédie des mathématiques, vol. 5.
[13] Shilov G.E. Hadamard J. et la naissance de l'analyse fonctionnelle, Ousp. Mat. Naouk, 1964, t. 19, 3, p. 183-186
[14] Mandelbrojt Szolem, Hadamard Jacques. Dictionary of scientific biography, 1972, vol. 6
[15] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, 1950-1951
[16] Lützen Lesper. The prehistory of the theory of distributions Springer, 1980, 232 p.
[17] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev La vie des sciences, Comptes rendus, série générale, t. 7, 1990, n° 6, p. 467-471.