À propos d'un colloque[1] en l'honneur de Paul Koosis

Jean-Pierre Kahane

Paul Koosis est un mathématicien très original, qui a beaucoup d'attaches avec la France, et mériterait d'y être mieux connu. Ses ouvrages sur les espaces H_p, sur l'intégrale logarithmique et sur la théorie de Beurling et Malliavin se trouvent dans les bibliothèques, ou devraient s'y trouver, et ce sont les meilleures références sur les sujets en question. Les « Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin » ont été écrites par lui en français, et elles sont publiées par le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal. Le théorème en question l'a occupé pendant toute sa vie. C'est un théorème multiforme, qui en particulier donne le rayon de totalité d'une famille d'exponentielles sur la droite réelle, une question difficile qui avait intrigué Paley, Wiener, Levinson, Laurent Schwartz et d'autres. Le sujet et le livre valent d'y entrer pour aller voir.

[Les problèmes traités par Beurling et Malliavin :

La théorie de Beurling et Malliavin remonte au début des années 1960, mais ils n'ont achevé la publication de leurs travaux qu'en 1967. Travaux et références se trouvent dans les œuvres de Beurling. Les principaux résultats avaient transpiré dès 1961 (voir par exemple mon exposé au séminaire Bourbaki, n^o 225, reposant sur un cours donné par Paul Malliavin à Stanford pendant l'été 1961). La théorie répond aux questions suivantes, qui sont liées au moyen du théorème de Paley-Wiener :

a) calculer le rayon de totalité d'une suite réelle ou complexe S, c'est-à-dire la borne supérieure des r tels que les exponentielles $\exp(isx)$, s dans S, forment un système total dans $L^2(-r,r)$;

b) caractériser les spectres des fonctions moyenne-périodiques, c'est-à-dire des solutions d'équations de convolution par des mesures à supports compacts ;

c) caractériser les fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions entières de type exponentiel bornées sur la droite réelle ;

d) peut-on, pour une telle fonction entière, choisir le dénominateur de type exponentiel arbitrairement petit ?

La solution de a) et b) fait intervenir la « densité effective » de Beurling et Malliavin, qui a le caractère d'une densité extérieure (borne inférieure des densités des suites densitables contenant la suite donnée, « densitable » se référant à une certaine manière d'approcher une dilatée de Z). Les solutions de c) et d) (positive pour d)) utilisent à la fois la théorie classique des fonctions et la théorie du potentiel. L'« intégrale logarithmique », à laquelle Koosis a consacré d'autres livres, y joue un rôle majeur.]

Toutes les recherches de Paul Koosis et ses ouvrages sont relatifs à l'analyse classique, et surtout à la théorie des fonctions d'une variable complexe, un domaine où la France était particulièrement active il y a un siècle. Le flambeau est passé à d'autres pays, et d'autres sujets (la physique, les systèmes dynamiques) le réactivent actuellement.

[1] 23-26 octobre 2003, Montréal

Du 23 au 26 octobre s'est tenue à Montréal, annoncée en français et en anglais, une « Conférence en analyse classique en l'honneur de Paul Koosis ». Elle était organisée conjointement par le CRM et par plusieurs universités du Québec, dont Mc Gill où Koosis est professeur. Le programme mariait agréablement les seniors (Louis Nirenberg, Walter Hayman, John Garnett, Victor Havin, David Drasin, Jean-Pierre Kahane, Paul Koosis lui-même), et les plus jeunes dont une belle collection de prix Salem et autres notabilités (Peter Jones, Sasha Volberg, Sergey Treil, Fedya Nazarov, Michael Wilson, Tom Ransford, Henrik L. Petersen, Misha Sodin, Robert Milson, Remm Yassawi, Javad Mashreghi, Ivo Klemes). L'analyse classique est variée et bien vivante. Elle plonge dans le passé (on a plaisir à entendre évoquer des travaux d'Henri Cartan datant de 1928 et 1933) et s'articule à des questions très actuelles liant analyse, géométrie, physique, probabilités, combinatoire et théorie des nombres. Elle a pour caractère principal de ne partir que de notions familières à tous les mathématiciens. C'était du moins la règle du jeu implicite de ce colloque, et une raison de son succès.

[Les œuvres de jeunesse d'Henri Cartan présentes dans le colloque :

1. Les théorèmes de division dans l'anneau des fonctions entières s'appuient classiquement sur des minorations des dénominateurs, qui elles-mêmes s'appuient sur des minorations de polynômes (je veux dire de leurs modules). Depuis 1928, le meilleur outil est un théorème de Cartan largement exploité dans sa thèse (œuvres, I, 7-92) : à tout polynôme unitaire on peut associer des disques dont la somme des rayons ne dépasse pas 2e, tels qu'en dehors de la réunion de ces disques le module du polynôme soit supérieur ou égal à 1. Ce théorème, qui a d'abord été publié dans une note aux Comptes rendus (œuvres, I, 4-6), prouve en l'améliorant une conjecture d'André Bloch. Il a des variantes multiples : produits de distances à n points dans un espace métrique, potentiel logarithmique d'une mesure positive, potentiel par rapport à d'autres noyaux. La démonstration se voit bien quand on considère n points dans un espace métrique et un $r > 0$: on met en place une boule de rayon kr contenant k des points, avec k maximum, puis une boule de rayon lr contenant l des points restants s'il y en a, avec l maximum, et ainsi de suite, de sorte que $k + l + \cdots = n$. Remplaçons ces boules par des boules ayant les mêmes centres et des rayons doubles. La somme des leurs rayons est $2nr$ et en dehors de leur réunion les distances aux n points donnés, ordonnées dans l'ordre croissant, sont supérieures à $r, 2r, 3r, \dots nr$ respectivement. D'où tout ce qu'il faut. La conférence de Misha Sodin au colloque Koosis, intitulée « Growth, zeroes, and area estimates ; variations on the theme », débutait par la référence à ce théorème de Cartan.

2. La conférence de Walter Hayman portait un titre mystérieux : « ABC, Waring and Fermat for functions ». Il s'agissait de déterminer, pour divers anneaux de fonctions, les nombres $F(n)$ et $W(n)$ qui sont les plus petits entiers p tels que 1 (resp. un élément arbitraire de l'anneau) puisse s'écrire comme somme de p puissances n-ièmes . L'exposé oral débutait par l'évocation d'une amélioration par Cartan de la théorie de Nevanlinna, parue à Cluj en 1933 (œuvres, I, 421-445). La version écrite doit être publiée dans le Journal of the London Mathematical Society au moment du centième anniversaire de Cartan. Les auteurs sont Gary Gundersen et Walter Hayman, le titre « The strength of Cartan's version of Nevanlinna Theory », et le résumé mérite d'être intégralement reproduit ici : « In 1933 Henri Cartan proved a fundamental theorem in Nevanlinna theory which is a generalization of Nevanlinna's second fundamental theorem. Cartan's theorem works very well for certain kinds of problems. Unfortunately, it seems that Cartan's theorem, its proof, and its usefulness, are not as widely known as they deserve to be. To help give wider exposure to Cartan's theorem, we state the simple and general form of the

theorem, give a proof of the general form, and give several applications of the theorem ». En fait, le travail de Cartan remonte à 1929, et l'énoncé de son inégalité, avec déjà un certain nombre d'applications, se trouve dans une note aux Comptes rendus très claire et facile à lire (œuvres, I, 111-113).

3. Cartan s'intéressait à cette époque à des problèmes d'unicité. Par exemple, on savait d'après Pólya et Nevanlinna que, si deux fonctions entières f et g sont distinctes, et ne sont pas inverses l'une de l'autre, les ensembles de zéros de $f-1$ et de $g-1$ ne peuvent pas coïncider. Cartan résume sa contribution sous forme d'un énoncé en langue « vulgaire » : les zéros communs à $f-1$ et à $g-1$ constituent tout au plus la moitié de l'ensemble total des zéros de $f-1$ et de $g-1$ (œuvres, I, 442). De tels problèmes d'unicité sont difficiles et les progrès sont lents. Pour en avoir un autre aspect on peut se référer à la note aux Comptes rendus récemment présentée par Henri Cartan : « Fonctions méromorphes aux zéros et pôles communs », par G. Frank, X. Hua et R. Vaillancourt.]

Une autre raison du succès de ce colloque était le climat d'amitié autour de Paul Koosis. Paul a eu une carrière atypique, mais qui l'a amené en des endroits divers où il a imprimé une trace. Nirenberg l'a guidé au Courant Institute juste après sa thèse. Je l'ai connu quand il a décidé de passer l'année 1957-58 avec sa bourse Fulbright à Montpellier où j'étais professeur, et où il a eu l'occasion de rencontrer Yitchak Katznelson et d'assister à l'éclosion de sa thèse. Puis il a pris un poste d'enseignement à Paris, au-dessous de son niveau de qualification, juste parce qu'il se trouvait bien en France, et qu'il commençait à être fasciné par le théorème de Beurling et Malliavin. Quand j'ai été nommé à Orsay en 1961, rejoignant Deny, Delange, Lesieur et Malgrange, il n'était pas encore question d'une activité scientifique propre en mathématiques : tout se passait à l'Institut Henri Poincaré. C'est Koosis qui a lancé l'idée d'un séminaire d'analyse avec nos ressources locales. Le séminaire a été un succès et s'est ensuite spécialisé en analyse harmonique, avec rapidement des surgeons en topologie et en algèbre.

C'est à UCLA qu'il a commencé sa carrière de professeur, et il a eu là Garnett comme collègue et Peter Jones comme étudiant. Après des années d'errance c'était l'établissement rêvé. Pour d'autres sans doute mais non pour lui. Outre la France et le français, il s'était pris d'amour pour la Suède et le suédois, et pour Montréal et les Laurentides où il travaillait mieux qu'ailleurs, beaucoup mieux qu'à Los Angeles qu'il appelait méchamment « Disneyland on the sea ». Il s'est donc installé à Montréal avec un modeste gagnepain à Mc Gill. Il y a attiré des élèves et des collaborateurs, surtout parmi les Russes émigrés et les Russes en activité dans leur pays, dont le modèle est Victor Havin. Il y a beaucoup et très bien travaillé, et il est en pleine forme intellectuelle à l'âge de 75 ans.

Il chante et joue du clavecin (moins que naguère), il lit beaucoup, il se passionne pour des auteurs (on dit auteures à Montréal) comme la canadienne Gabrielle Roy et l'allemande Christa Wolf, à côté de Shakespeare, Goethe et Heine. Une conversation avec lui est un bain de jouvence et de culture.

Il n'aime pas beaucoup voyager. Je ne sais quand nous le reverrons en France. Mais il écrit de merveilleuses lettres, et tous les mathématiciens, s'ils le désirent, peuvent faire ou entretenir sa connaissance en lisant ses livres. Je reviens aux leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Il serait dommage de les laisser dormir sur les rayons d'une bibliothèque, et plus dommage encore de ne pas les trouver sur les rayons.

[Koosis et le français :

« De nos jours on se sent presque obligé d'expliquer pourquoi on a voulu faire paraître un livre de mathématiques en français. Je ne veux pas m'étendre ici sur mes raisons–multiples–pour cela. Qu'il suffise simplement que j'évoque le fort attachement que j'ai depuis très longtemps pour cette langue, bien que ne la connaissant qu'imparfaitement. »]

[Koosis et l'écriture :

Quand Koosis aime quelque chose, il l'écrit. Ainsi, le 25 février dernier, Nazarov a donné à l'université Mc Gill une démonstration toute nouvelle du « théorème des multiplicateurs » de Beurling et Malliavin, qui est la clé de leur théorie. Koosis l'a rédigée immédiatement, et me l'a adressée le 4 mars. La construction de Nazarov est très belle, et l'écriture de Koosis l'est aussi ; c'est double plaisir que de lire de belles pages manuscrites exposant un beau sujet.]

Références

Koosis, P. — *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Montréal, Les Publications CRM, 1996, 230 pages.

Beurling, A. — Collected Works, 2 volumes, Birkhaüser 1989.

Cartan, H. — Œuvres, 3 volumes, Springer 1979.