

ENSEIGNEMENT

Détermination géométrique de quelques groupes d'homologie

N. Poncin

Introduction

Lorsque J. Hadamard a entrepris – il y a quelque cinquante ans – une investigation approfondie sur le fonctionnement de l'esprit du mathématicien [2], il s'est basé sur une vigilante introspection, certes, mais aussi et surtout sur les expériences d'autres grands scientifiques, notamment de H. Poincaré et A. Einstein. Il a finalement distingué quatre étapes chronologiques dans un processus de création :

1. Phase de préparation. Elle est caractérisée par l'acharnement conscient sur le thème étudié.
2. Période d'incubation. Le travail conscient provoque le démarrage d'un mécanisme inconscient, dans lequel les idées se comportent comme les atomes d'Épiqueure : ces atomes sont animés de mouvements désordonnés et se rencontrent au hasard, donnant naissance à des combinaisons diverses et variées, dont la plupart sont inutiles. Celles-ci sont éliminées par l'inconscient sur base de critères esthétiques.
3. Illumination. Une combinaison vérifiant les critères – une idée souvent féconde – émerge soudainement de l'inconscient, généralement après une période de repos.
4. Phase de vérification. Le travail redevient conscient, le chercheur vérifie son idée, la formule de manière plus précise, examine ses conséquences.

Tout travail de l'esprit et principalement tout travail de création implique donc le concours du subconscient, que ce soit à un niveau assez superficiel ou plus ou moins profond et la tendance à considérer le subconscient comme supérieur au conscient est largement répandue.

Pour mémoriser et synthétiser ces idées ou combinaisons d'idées, l'esprit se sert généralement d'images schématiques. L'écrasante majorité des mathématiciens évitent l'utilisation mentale de mots et de symboles précis. Einstein écrit à ce sujet :

« The words or the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities, which seem to serve as elements in thought are certain (vague) signs and more or less clear images, which can be voluntarily reproduced and combined. ... This combinatory play seems to be the essential feature in productive thought – before there is any connection with logical construction in

words or other kinds of signs, which can be communicated to others. »

La synthèse susmentionnée mérite réflexion. Les mathématiciens ne se lassent pas de répéter que la compréhension d'une démonstration ne se limite pas à la vérification des raisonnements permettant de passer d'une assertion à la suivante, mais requiert une vue d'ensemble divulguant pourquoi la preuve ne peut être que celle-là, une synthèse montrant que l'ordre des différentes affirmations n'est pas plus ou moins aléatoire, mais dicté par l'objectif poursuivi. Une preuve, quel que soit son degré de complexité, doit toujours apparaître comme une unité, même si ce but n'est trop souvent atteint qu'après un effort intellectuel douloureux.

Répétons que le labeur mental visant à résumer et maintenir, donne naissance à des représentations squelettiques que le scientifique utilise au cours de ses investigations intuitives. Une telle approche intuitive permet d'explorer rapidement – certes parfois de façon prospective – différentes directions susceptibles d'aboutir, alors que la méthode rigoureuse et logique ne permet d'avancer que pas à pas. Souvent le mathématicien est intuitif au cours de la phase de découverte et plus logique durant la phase d'énonciation.

Il est donc indubitable que la synthèse, les images schématiques et l'approche intuitive sont d'une importance capitale dans la démarche mathématique. Selon Hadamard, ceux à qui une telle synthèse apparaît, comprennent les mathématiques et ceux à qui elle n'apparaît pas sont comme des aveugles qui savent marcher, mais sont incapables de connaître la direction à choisir.

Malheureusement, l'enseignement des mathématiques est trop souvent en flagrante contradiction avec les précédentes exigences. Ceci est d'autant plus regrettable que l'art de penser efficacement en images peut être enseigné, mais que la grande majorité des élèves, irrémédiablement perdus dans la jungle du formalisme abstrait, sont fondamentalement incapables de dénicher eux-mêmes les images appropriées, répondant à la double et apparemment contradictoire exigence de devoir simplifier au maximum tout en n'induisant jamais en erreur. Dans [5], nous avons essayé de mettre en lumière la puissance de l'intuition et des graphiques dans le cadre de l'enseignement de l'analyse dans le cycle supérieur du secondaire. Ci-dessous, nous donnerons des exemples de synthèses, d'images et d'approches intuitives issus de la topologie algébrique.

Groupes d'homologie

Un complexe ou espace différentiel est un couple (V, ∂) , où V est un espace vectoriel et ∂ un opérateur de carré nul sur V – la différentielle ou encore l'opérateur de cobord. Les éléments de V sont appelés cochaînes, ceux de $\text{Ker } \partial$ cocycles et ceux de $\text{Im } \partial$ cobords. Vu l'hypothèse $\partial^2 = 0$, on a $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } \partial$: l'espace quotient $\mathcal{H}(V, \partial) = \text{Ker } \partial / \text{Im } \partial$ est l'espace de cohomologie du complexe (V, ∂) . Si $V = \bigoplus_p V_p$ est un espace gradué et si ∂ est de poids 1, la restriction ∂_p de ∂ à V_p est une application linéaire de carré nul de V_p dans V_{p+1} . On peut ainsi définir le p -ième espace de cohomologie

$$\mathcal{H}^p(V, \partial) = \text{Ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p-1}.$$

L'espace $\mathcal{H}(V, \partial)$ est alors la somme directe des espaces $\mathcal{H}^p(V, \partial)$.

Un des exemples des plus simples est donné par le complexe de de Rham $(\Omega(M), d)$, formé par l'espace des formes différentielles sur une variété M et la différentielle extérieure. De nombreux autres complexes – et les cohomologies associées – jouent un rôle primordial dans divers domaines des mathématiques et de la physique. La théorie des déformations par exemple – initiée vers 1975 comme voie d'approche nouvelle de la mécanique quantique – a mis en lumière l'importance de cohomologies associées à des algèbres associatives, de Lie et de Lie graduées naturellement liées aux variétés.

Nous proposons ici un retour aux sources et des calculs intuitifs, basés sur des représentations appropriées et loin des développements affreusement techniques des calculs cohomologiques susmentionnés.

Le germe du concept d'homologie se trouve dans le mémoire de 1895 de H. Poincaré. Si M est une sous-variété de dimension m et V_1, \dots, V_n des sous-variétés de dimension $m-1$ qui forment frontière d'un ouvert connexe, Poincaré écrit

$$V_1 + \dots + V_n \sim 0$$

et parle d'homologie : le bord de l'ouvert est homologue à zéro. Dans ses mémoires de 1899-1900, il donne une nouvelle définition de l'homologie. Les développements se compliquent cependant relativement vite : nous nous limiterons au strict minimum et à des considérations assez géométriques.

Dans \mathbb{R}^m , un 0 (resp. 1, 2, 3)-simplexe est un point x_0 (resp. un segment $\{x_0x_1\}$, un triangle $\{x_0x_1x_2\}$ [intérieur compris], un tétraèdre $\{x_0x_1x_2x_3\}$ [intérieur compris]). On généralise facilement au p -simplexe ou simplexe de dimension p , $p \geq 4$ et on définit un complexe (simplicial) C comme un nombre fini de simplexes « convenablement » assemblés [« convenablement » signifiant que toute face d'un simplexe de C est un simplexe de C et que l'intersection de deux simplexes de C est vide ou une face de chacun d'eux]. La dimension du complexe est la plus grande des dimensions des simplexes qui le composent. Si x_0, x_1, x_2 sont trois points non alignés de \mathbb{R}^2 , les simplexes $x_0, x_1, x_2, \{x_0x_1\}, \{x_1x_2\}, \{x_2x_0\}$ par exemple forment un complexe C_1 de dimension 1. Les complexes peuvent donc être vus comme des polyèdres et les simplexes comme des « triangles » – pierres de construction des polyèdres. La notion de simplexe orienté est triviale : un 2-simplexe $\{x_0x_1x_2\}$ par exemple donne manifestement naissance à deux 2-simplexes orientés opposés,

$$(x_0x_1x_2) = (x_1x_2x_0) = (x_2x_0x_1) = -(x_0x_2x_1) = -(x_1x_0x_2) = -(x_2x_1x_0)$$

et il en va de même de tout p -simplexe, $p \geq 1$.

Considérons un complexe C de dimension n et orientons ses simplexes. Nous désignerons les p -simplexes orientés ($0 \leq p \leq n$) par le symbole générique $S_{p,i}$ ($1 \leq i \leq n_p$), où n_p est le nombre de tels simplexes.

En suivant la trace de Poincaré, nous formons pour chaque p les combinaisons linéaires formelles c des p -simplexes orientés $S_{p,i}$ à coefficients λ_i dans \mathbb{Z} ,

$$c = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i S_{p,i}.$$

Nous définissons le bord ∂c d'une telle combinaison par

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \partial S_{p,i} \tag{1}$$

et par

$$\partial S_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0 \dots \widehat{x}_i \dots x_p), \tag{2}$$

où $S_p = (x_0 \dots x_p)$ et où \widehat{x}_i signifie que le point x_i est omis. Quelques commentaires s'imposent. Explicitons le bord d'un 2-simplexe $S_2 = (x_0 x_1 x_2)$. Il vient

$$\partial S_2 = (x_1 x_2) - (x_0 x_2) + (x_0 x_1).$$

De facto, il s'agit d'interpréter cette somme de 1-simplexes comme réunion, comme enchaînement. D'un côté, ∂S_2 représente alors bien le bord du triangle S_2 et de l'autre, il est naturel d'appeler chaînes les combinaisons formelles de simplexes. On note $\mathcal{C}_p(C)$ l'ensemble des p -chaînes du complexe C *i.e.* des combinaisons linéaires formelles des p -simplexes orientés de C à coefficients dans \mathbb{Z} . Une combinaison formelle peut être vue comme n_p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p})$ d'éléments de \mathbb{Z} c'est-à-dire comme élément de $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n_p termes). La structure canonique de groupe abélien de $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ induit une structure de même type sur $\mathcal{C}_p(C)$:

$$\mathcal{C}_p(C) \approx \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n_p}.$$

Vers 1925, E. Noether et L. Vietoris transcrivent les définitions de Poincaré moyennant le langage de l'algèbre moderne. Le bord (1) étant une $(p-1)$ -chaîne, cette équation définit un homomorphisme

$$\partial_p : \mathcal{C}_p(C) \rightarrow \mathcal{C}_{p-1}(C),$$

appelé opérateur de bord. Le résultat fondamental est

$$\partial^2 = \partial_p \partial_{p+1} = 0. \tag{3}$$

Il correspond à l'idée intuitive qu'un bord n'a pas de bord. Les sous-groupes $\mathcal{Z}_p(C) := \text{Ker } \partial_p$ et $\mathcal{B}_p(C) := \text{Im } \partial_{p+1}$ sont les groupes des p -cycles resp. des p -bords de C . Vu (3), on a $\mathcal{B}_p(C) \subset \mathcal{Z}_p(C)$ et la définition

$$\mathcal{H}_p(C) := \mathcal{Z}_p(C) / \mathcal{B}_p(C) \tag{4}$$

fait sens. Le groupe commutatif $\mathcal{H}_p(C)$ est le p -ième groupe d'homologie de C .

Les concepts de p -chaîne et p -bord ont été suffisamment éclairés. Éluçidons les notions de p -cycle et de groupe d'homologie de degré p . À ces fins nous considérons le complexe C_1 précédemment défini et formé par les sommets et les côtés d'un triangle $(x_0 x_1 x_2)$, ainsi que le complexe C_2 obtenu en ajoutant $(x_0 x_1 x_2)$ à C_1 . L'orientation des côtés est définie à partir de celle du triangle. Portons d'abord notre attention sur la 1-chaîne $(x_0 x_1) + (x_1 x_2) + (x_2 x_0)$. Intuitivement, il est indéniable que cette chaîne n'a pas de bord : c'est un 1-cycle de

C_1 et C_2 , ce qui justifie l'appellation entérinée. Le calcul corrobore la conclusion :

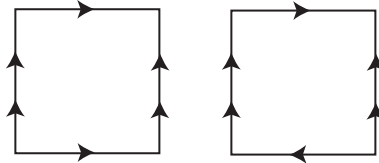
$$\begin{aligned} \partial[(x_0x_1) + (x_1x_2) + (x_2x_0)] &= \partial(x_0x_1) + \partial(x_1x_2) + \partial(x_2x_0) \\ &= x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_0 - x_2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

On remarquera qu'elle est due au résultat – a priori étonnant – de l'application de la définition (2) à un 1-simplexe :

$$\partial(x_0x_1) = x_1 - x_0 \tag{5}$$

et non $\partial(x_0x_1) = x_0 + x_1$. De plus, notre 1-chaîne est visiblement un 1-bord (le bord d'une 2-chaîne) dans C_2 , mais non dans C_1 . Cette observation met en valeur la différence entre cycles et bords : un bord est toujours un cycle, mais un cycle n'est pas nécessairement un bord ! Nous heurtons ici l'essence même de l'homologie : si tout cycle était bord, le groupe d'homologie serait nul. Il est essentiel d'enregistrer qu'en homologie on regarde les cycles modulo les bords : les bords étant nuls, il s'agit de déterminer les cycles non bords et de ne conserver qu'un représentant de chaque classe.

Un des intérêts des groupes d'homologie est la classification des espaces topologiques. Deux espaces sont dits équivalents, s'ils sont homéomorphes *i.e.* reliés par une bijection bi-continue. L'image géométrique d'un homéomorphisme est une déformation continue de l'espace supposé parfaitement élastique. Par exemple,



les carrés ci-dessus, où l'on identifie les côtés parallèles comme indiqué, sont homéomorphes à un tore resp. à la bouteille de Klein. La dure question de la caractérisation des classes d'équivalence appelle les invariants topologiques sur le devant de la scène. La dénomination coïncide avec la définition : un invariant topologique est un objet conservé par homéomorphisme. Deux espaces ayant des invariants topologiques différents, ne peuvent donc être équivalents ! Ainsi, la construction d'invariants revêt – une fois de plus – une importance particulière. Il s'avérera que les groupes d'homologie sont des invariants topologiques. En conséquence, il s'agit d'abord d'associer les groupes d'homologie à des espaces topologiques qui ne sont pas nécessairement des complexes. On termine la mission grâce aux triangulations. Une triangulation d'un espace topologique T est un complexe C homéomorphe à T . Si T admet deux triangulations, leurs groupes d'homologie sont isomorphes. Finalement, les groupes d'homologie de T , définis à partir d'une triangulation arbitraire, sont bien des invariants topologiques.

Les images schématiques des chaînes (assemblages de simplexes, courbes, surfaces), cycles (chaînes sans frontière, boucles), bords (frontières *i.e.* p -chaînes frontières de $(p+1)$ -chaînes) et groupes d'homologie (cycles modulo bords, zéro et les cycles non bords vus à bord près)

bords	cycles non	bords
.0	.	.

sont à présent bien en place.

Nous en déduisons les groupes d'homologie du ruban de Möbius M , du plan projectif réel $P^2(\mathbb{R})$ et du tore T^2 . Dans les trois cas, il y a trois groupes à déterminer : $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ et \mathcal{H}_2 .

Le plan projectif réel, ensemble des droites de \mathbb{R}^3 passant par l'origine, pouvant bien sûr être défini comme hémisphère où les points opposés de la circonférence sont identifiés, les trois espaces sont connexes. Un théorème élémentaire affirme qu'alors leurs groupes d'homologie de degré 0 sont isomorphes à \mathbb{Z} :

$$\mathcal{H}_0(M) \approx \mathbb{Z}, \mathcal{H}_0(P^2(\mathbb{R})) \approx \mathbb{Z}, \mathcal{H}_0(T^2) \approx \mathbb{Z}.$$

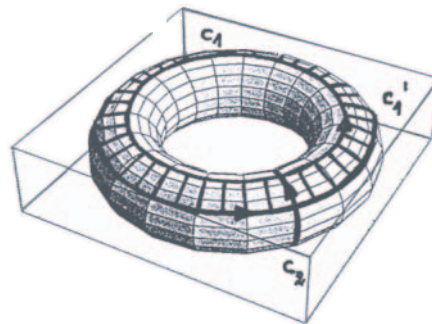
Passons à $\mathcal{H}_2 = \mathcal{Z}_2/\mathcal{B}_2$. Pour le ruban de Möbius et le plan projectif, il n'existe manifestement pas de 2-chaîne sans frontière (la frontière du plan projectif lui-même est le bord de l'hémisphère) : $\mathcal{Z}_2 = 0$ et ainsi $\mathcal{B}_2 = 0$. Subséquemment,

$$\mathcal{H}_2(M) = 0, \mathcal{H}_2(P^2(\mathbb{R})) = 0.$$

Dans le cas du tore, nous cherchons les 2-cycles non bords *i.e.* les 2-chaînes sans bord qui ne sont pas bords. On voit immédiatement que le tore lui-même est une telle chaîne, de même que ses multiples non nuls. Etant donné qu'il n'y a pas d'autre candidat et que deux quelconques de ces multiples ne sont visiblement pas homologues,

$$\mathcal{H}_2(T^2) \approx \mathbb{Z}.$$

Le premier groupe d'homologie exige une réflexion plus subtile. Examinons d'abord le cas du tore.

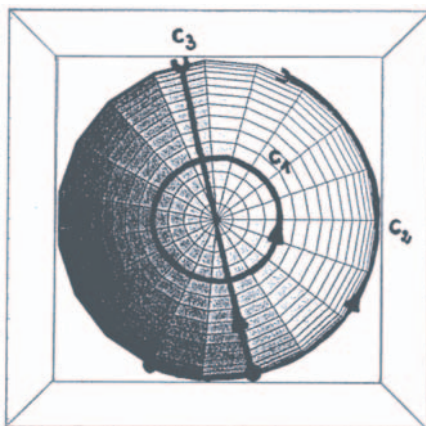


Les 1-chaînes c_1 et c_2 sont sans bord et ne sont pas bords ; leurs combinaisons linéaires non nulles également. En vue de détecter tous les 1-cycles non bords, on peut avoir l'idée de considérer un deuxième cycle c_1' du même type que c_1 . Ceci ne représente cependant aucun gain. De fait, c_1' est homologue à c_1 , la différence $c_1' - c_1$ étant le bord de la 2-chaîne hachurée (voir (5)). Comme les

combinaisons linéaires non nulles de c_1 et c_2 sont deux à deux non homologues, on a enfin

$$\mathcal{H}_1(T^2) \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

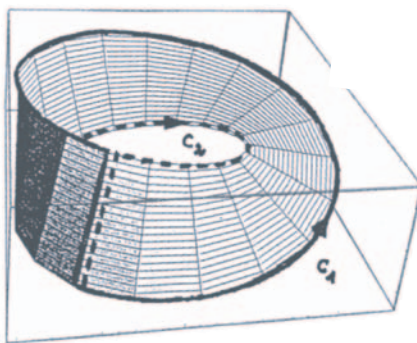
Rappelons que, sur la suivante représentation du plan projectif réel, les points opposés de la circonférence sont identifiés.



Ici c_1 est un bord, mais c_2 est un 1-cycle non bord. La chaîne c_3 est également un 1-cycle non bord, qui est toutefois homologue à c_2 ; en effet, $c_3 - c_2$ est le bord de la calotte de droite (voir fig.). Considérons maintenant les multiples de c_2 . On constate de suite que $2c_2$ est bord et donc homologue à 0, que $3c_2$ est homologue à c_2 , que – de manière plus générale – tout multiple pair de c_2 est homologue à 0 et tout multiple impair homologue à c_2 . D'où :

$$\mathcal{H}_1(P^2(\mathbb{R})) \approx \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}.$$

Venons-en au ruban de Möbius.



Grâce à l'expérience désormais acquise, on prophétise aussitôt que les multiples non nuls de c_1 sont les seuls 1-cycles non bords. On peut évidemment soupçonner c_2 , mais on constate instantanément que $c_2 - c_1$ est bord. Finalement,

$$\mathcal{H}_1(M) \approx \mathbb{Z}.$$

On observe que les images privilégiées rendent les calculs purement géométriques et intuitifs. Aucune triangulation n'a été utilisée, aucun calcul algébrique n'a été effectué. On est loin ici des calculs cohomologiques techniques mentionnés au début du paragraphe.

Le précédent retour aux sources nous a menés à l'homologie. La cohomologie est née plus tard, vers 1945, suite à des travaux de Steenrod et Eilenberg. Elle se distingue de l'homologie essentiellement par le fait que le cobord d'une p -cochaîne est une $(p + 1)$ -cochaîne, alors que le bord d'une p -chaîne est une $(p - 1)$ -chaîne.

Conclusion

Cet article n'a nullement la prétention d'illustrer la globalité des péroraisons de J. Hadamard ; il présente une interprétation personnelle de certaines de ses convictions. D'autres exemples se prêtent sans doute moins bien à une telle schématisation. Il semble cependant indubitable qu'un thème est d'autant mieux compris que la construction de représentations efficaces est aisée. Quoi qu'il en soit, nous sommes profondément convaincus qu'un effort systématique visant une démarche plus heuristique, empirique, intuitive et imagée constituerait une réelle progression dans l'évolution de l'enseignement des mathématiques.

Notre rétrospective éclaire également l'intérêt de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement : s'il est vrai que les connaissances historiques n'améliorent pas nécessairement les compétences mathématiques de l'étudiant, il est néanmoins tout aussi exact qu'elles constituent un net avantage psychologique.

Norbert Poncin

Centre Universitaire de Luxembourg
Département de Mathématiques
162 A, avenue de la Faiencerie
L-1511 Luxembourg
e-mail: poncin@cu.lu

Références

- [1] J.-P. CHANGEUX et A. CONNES – *Matière à pensée*, Odile Jacob, 1989.
- [2] J. HADAMARD – *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton et Chichester, Princeton University Press, 1973.
- [3] J. MASON – *L'esprit mathématique*, De Boeck Université, 1997.
- [4] G. POLYA – *Comment poser et résoudre un problème*, J. Gabay, 1989.
- [5] N. PONCIN – « Flashes sur le programme d'analyse du cycle supérieur de l'enseignement secondaire », *Cahiers de pédagogie* (1996), no. 1, p. 143–156.