H. Eliasson à Cetraro, il avait affirmé d'un ton catégorique « you have to be tough, but fair ». Une fois, sur un papier de vingt pages que je venais de lui soumettre, il avait entouré une formule et avait écrit dans la marge « la seule chose ».

Herman était toujours très informé et pas seulement en mathématiques. Au Brésil il achetait régulièrement *Le Monde* et lorsqu'à Jussieu, en sortant du séminaire, on s'arrêtait avec lui et Raphaël devant un kiosque, il nous disait : « À votre âge, je passais une heure par jour à lire le journal ». Sur tous les sujets, son opinion strictement personnelle, parfois déroutante, témoignait encore de sa souplesse. Dans la vie comme en mathématique, c'était un grand subversif.

Il lisait beaucoup. Il avait lu mille livres de mathématiques. Il s'intéressait également à l'histoire et à l'art dont il avait toujours plusieurs livres sur son bureau et un dans la poche. « on publie n'importe quoi... on publie même des choses fausses », en mathématique et ailleurs. Mais une fois que je lui disais d'un livre qu'il était mauvais, il m'a dit « il n'y a pas de livre mauvais ». Il aimait cependant marquer sa prédilection pour les mathématiques : « J'ai dédié ma vie aux mathématiques » et il disait souvent « vous pourrez gagner très bien votre vie, mais vous ne ferez pas de mathématiques. Vous allez vous ennuyer. »

Herman a dédié sa vie aux mathématiques et il était heureux. Je le revois à Jussieu, à Trieste, à Venise, à Cetraro, à Rio de Janeiro et à Chevaleret. Je me le rappelle surtout à l'air libre, lorsqu'il sortait pour fumer, l'esprit toujours en alerte et toujours d'entrain, même si extérieurement il ne le paraissait pas. Il était disposé à répondre à toutes mes questions, prompt à attaquer une preuve sur un bout de papier, sur une boîte d'allumettes, ou directement en l'air avec le doigt, faisant et acceptant l'humour (sauf s'il s'agit des exposants de l'*application standard*) et sucitant toujours mon enthousiasme et ma curiosité. Il insufflait de la vie aux séminaires et aux congrés, son vif intérêt pour ce qu'on annoncait de nouveau, sa participation entière, et même ses quelques confrontations, présentaient à mes yeux et aux yeux d'autres jeunes dynamiciens un acte de foi sans limite dans les mathématiques, et c'est ainsi qu'il m'a offert de très belles années de thèse dont je me réjouissais à la pensée que ni lui ni moi n'étions pressés de les voir finir.

Michel Herman, la mécanique céleste et quelques souvenirs

Alain Chenciner

C'est au milieu des années quatre-vingt que se met en place le groupe de travail de mécanique céleste. Jusqu'en 1991, il se réunira régulièrement au Centre de mathématiques de l'X, les mêmes jours que le séminaire de systèmes dynamiques. Il sera suivi d'autres groupes de travail, sur l'approximation diophantienne simultanée, sur les billards. La plupart des aspects théoriques du problème des n corps y furent abordés *ab initio* : mouvements homographiques et configurations centrales, orbites périodiques, collisions, non-intégrabilité, problème planétaire, problème lunaire, satellite artificiel et même certains aspects plus directement astronomiques avec par exemple la conférence de Jacques Laskar sur la théorie des satellites d'Uranus. Du 28 mai au 2 juin 1990 Michel et moi avons organisé à Luminy un colloque international de mécanique céleste qui a rassemblé une bonne partie des — peu nombreux — mathématiciens passionnés par ce sujet. Seul Vladimir Arnold avait décliné notre invitation, me répondant de vive voix, je cite de mémoire, qu'il n'y avait plus de problème intéressant dans ce domaine pour les mathématiciens.

Relisant les résumés des conférences de Luminy, je peux difficilement me ranger à cette opinion : pseudo-collisions (solutions sans collision dans lesquelles certains corps partent « à l'infini » en temps fini), dynamique symbolique dans le problème plan des trois corps, solutions périodiques, collisions simultanées, le moribond se porte plutôt bien. Naturellement, les petits dénominateurs sont présents, avec en particulier la conférence de Hakan Eliasson sur l'existence des tores invariants (= solutions quasi-périodiques) de dimension non maximale (= n'ayant pas le maximum de fréquences) normalement elliptiques (= linéairement stables) et celle d'Helmut Rüssmann qui, sur le même sujet, énonce pour la première fois sous sa forme définitive la condition de non-dégénérescence la plus faible qui assure l'existence de tels tores invariants. Quant à Michel, il parle des phénomènes dynamiques associés aux torsions indéfinies, une situation qui se rencontre effectivement en mécanique céleste. La première rédaction complète du théorème de Rüssmann ne paraîtra qu'en 1998 avec des remerciements chaleureux à Michel Herman pour son intérêt constant. Michel appréciait beaucoup les travaux de ces deux mathématiciens dont sa sensibilité d'analyste le rapprochait. Dès son cours de l'École normale en 1980, auquel allait faire suite le séminaire de systèmes dynamiques, il avait insisté sur l'originalité des méthodes de Rüssmann. Plus récemment, il s'était réjoui du recrutement d'Eliasson par le département de mathématiques de l'Université Paris VII.

Le célèbre théorème d'Arnold sur la stabilité du problème planétaire des 3 corps n'apparaît pas à cette époque dans la liste des exposés au groupe de travail. Du fait de la dégénérescence du problème de Kepler — toutes les solutions d'énergie négative sont périodiques alors que pour un potentiel central générique elles peuvent être également quasi-périodiques — ce théorème ne découle pas directement du théorème de Kolmogorov. Il faut « lever la dégénérescence » en introduisant la lente (c'est le problème, elle s'annule avec les masses des planètes) précession des ellipses kepleriennes que gouverne le « système séculaire » de Lagrange et adapter la démonstration à cette situation, ce qui demande beaucoup de virtuosité. Plus précisément, au voisinage des mouvements circulaires coplanaires et de même sens de n planètes autour d'un soleil (ou d'un soleil fictif suivant les coordonnées utilisées pour effectuer la réduction du centre de masse), l'espace des phases du problème s'écrit naturellement comme le produit $(T^n \times D) \times B$ d'une partie $T^n \times D$ décrivant les mouvements rapides de chacune des n planètes sur son ellipse keplerienne approchée (T^n) et les valeurs des demi grands axes (= énergies) de ces ellipses (D, ouvert de $(R_+)^n$), et d'une partie B décrivant les variations lentes de ces ellipses au cours des siècles (mouvements séculaires=modification lente des excentricités et des inclinaisons des ellipses et précession des périhélies et des nœuds). B est une boule dans l'espace « séculaire », difféomorphe à $(S^2 \times S^2)^n$, des n-uples d'ellipses orientées normalisées de même foyer dans R^3. Plus précisément, B est un voisinage du point représentant n cercles horizontaux de même sens et admet des coordonnées symplectiques $(\xi_i, \eta_i), (p_i, q_i)$, $i = 1, \ldots, n$, les coordonnées de Poincaré, qui l'identifient à un voisinage de l'origine dans $(R^2)^n \times (R^2)^n$. Le module $(\xi_i^2 + \eta_i^2)^{1/2}$ du vecteur $(\xi_i, \eta_i) \in R^2$ est essentiellement proportionnel à l'excentricité de la $i$ème ellipse, celui de (p_i, q_i) à son inclinaison. Les arguments respectifs sont la longitude du périhélie et celle du nœud. Après diagonalisation de la partie quadratique en les variables séculaires (remplacement des variables de Poincaré (ξ_i, η_i), $i = 1, \ldots, n$ (resp. (p_i, q_i), $i = 1, \ldots, n$) par des combinaisons linéaires (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, n$ (resp. (x_{j+n}, y_{j+n}), $j = 1, \ldots, n$), l'évolution du système planétaire est régie par un hamiltonien $H : (T^n \times B) \times D \to R$ de la forme suivante :

$$H(\theta, r, x, y) = H_0(r) + \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} a_j(r)(|x_j|^2 + |y_j|^2) + O(||(x, y)||^4) + \varepsilon H_1(\theta, r, x, y),$$

où ε est de l'ordre des masses planétaires et $\int_{T^n} H_1(\theta, r, x, y) = 0$. Si l'on oublie les deux derniers termes, on obtient un système complètement intégrable qui admet les tores invariants normalement elliptiques d'équations $r = r_0$, $x_j = y_j = 0$, $j = 1, \ldots, 2n$ et les tores lagrangiens (qui les « entourent ») d'équations $r = r_0, |x_j|^2 + |y_j|^2 = \rho_j^2$, $j = 1, \ldots, 2n$. Dans ce monde simplifié, les lentes $(O(\varepsilon))$ modulations périodiques d'excentricité et les lentes précessions des périhélies sont découplées des lentes modulations des inclinaisons et des lentes précessions des nœuds. La dégénérescence, qui correspond à la singularité $\rho_j = 0$, $j = 1, \ldots, 2n$, se manifeste par le fait que H_0 ne dépend que de r, c'est-à-dire de n actions au lieu de $3n$: dans l'approximation considérée, elle se traduit par l'existence de la solution circulaire coplanaire dans laquelle aucune évolution séculaire ne se produit. Elle est « levée » par le deuxième terme qui dicte la lente évolution des solutions proches. Arnold avait choisi de « réduire » la symétrie de rotation, c'est-à-dire de fixer le moment cinétique puis de passer au quotient par le sous-groupe des rotations fixant ce dernier. Des changements de variables remontant à Birkhoff faisaient alors apparaître une approximation du système dont les tores invariants, non dégénérés, servaient de point de départ à la méthode d'itération rapide KAM rendue très délicate par la présence de petites fréquences. Un calcul de « torsion » (variation des fréquences normalement au tore invariant de l'approximation) était nécessaire pour conclure. Ce calcul était fait asymptotiquement par Arnold pour trois corps, dans la limite d'un rapport nul des demi grands axes des ellipses kepleriennes, mais seul le cas du plan était reproduit dans l'article. L'analyticité montrait alors que la torsion ne pouvait s'annuler qu'au plus pour des valeurs discrètes de ce rapport. Le cas de l'espace est étudié dans la thèse de Philippe Robutel, dirigée par Jacques Laskar. Utilisant un logiciel de calcul formel pour expliciter les formes normales, Philippe montre que la torsion ne s'annule pas dès que le rapport de demi grands axes appartient à un certain intervalle.

Michel a toujours considéré l'article d'Arnold comme très important mais aussi comme très difficile à la fois à lire et à généraliser. Depuis 1996 (je crois) il consacrait beaucoup d'efforts à l'écriture d'une autre démonstration qui vaudrait pour un nombre quelconque de corps. Il en a expliqué les grandes lignes lors de nombreuses séances-marathons de son séminaire, en particulier en 1998 dans la petite salle de la tour centrale de Paris VII (le bureau d'un physicien complaisant) où avaient lieu les réunions. Plus de deux cents transparents manuscrits gardent la trace de ces séances.

Le point de départ de Michel est un théorème de Rüssman qui, sous une condition très faible de « non-planarité de l'application des actions dans les fréquences » assure l'existence d'un ensemble de mesure positive de tores lagrangiens diophantiens invariants (tores de KAM) pour les perturbations d'un système hamiltonien qui est exactement du type de celui écrit plus haut, à ceci près qu'il n'y a d'ε que devant la perturbation H_1 : la condition est que l'image de l'application « fréquences »

$$r \longmapsto \left(\frac{\partial H_0}{\partial r}(r), a_1(r), \ldots, a_{2n}(r)\right)$$

ne soit pas contenue dans un hyperplan. Michel donne une nouvelle démonstration de ce théorème, basée sur une très belle technique d'addition de paramètres, et l'adapte au cas où ε est présent dès le deuxième terme du hamiltonien. Il obtient ainsi une généralisation commune du théorème de Rüssmann et de celui d'Arnold. Cette adaptation demande une virtuosité certaine. Michel était le maître de ces situations de « petit twist » et je me souviens encore de l'aide qu'il m'avait apportée quand je les avais rencontrées dans le premier de mes articles sur les bifurcations de points fixes elliptiques.

La magie du théorème de Rüssmann et de sa généralisation est qu'aucune condition de torsion normale n'est nécessaire. C'est heureux car la vérification d'une telle condition, lorsque le nombre de corps augmente, devient vite insurmontable. Cependant, le théorème ne s'applique pas directement au problème non réduit à cause d'une valeur propre nulle ($a_{2n}(r) \equiv 0$) liée à l'invariance par rotation, dans le système séculaire linéarisé (celui qui est décrit par le deuxième terme de H), à une résonance mystérieuse dans ce système ($\sum_{j=1}^{2n} a_j(r) \equiv 0$) qu'il est le premier à signaler en toute généralité et éventuellement à des valeurs propres doubles. L'idée, empruntée à Poincaré, est alors de remplacer le hamiltonien H du problème des trois corps — dans lequel, contrairement à Arnold, on n'a pas effectué la réduction par le groupe des rotations — par un hamiltonien

$$\tilde{H} = H + \delta\varepsilon(C_x^2 + C_y^2) + \delta'\varepsilon C_z^2$$

légèrement perturbé par une combinaison des composantes C_x, C_y, C_z du moment cinétique (et donc commutant avec le premier) pour lequel les conditions du théorème soient satisfaites, au moins pour un ensemble de mesure positive de couples (δ, δ'). Les tores invariants KAM du système associé à $\tilde{H}$ sont alors permutés par le système initial et un argument d'intersection lagrangienne permet de conclure qu'ils sont en fait invariants par celui-ci.

Lors de ces dernières conférences, dans lesquelles il avait repris les choses à leur début en exposant aussi bien les preuves des théorèmes KAM que les prémisses de la théorie des systèmes séculaires, il faisait de nombreuses remarques historiques. Dans la partie traitant de la fonction perturbatrice — différence entre le hamiltonien du problème complet et son approximation keplerienne dans laquelle on néglige l'attraction mutuelle des planètes — qu'il avait en souriant sous-titrée l'« horreur céleste », il avait introduit le sigle BLC (Bonjour Les Calculs, en anglais HTF, Hello The Computations) qu'il écrivait en gros sur ses transparents et lisait en détachant chaque lettre, son regard moqueur fixé sur nous d'un air de défi signifiant que oui, lui les avait faits ces terribles calculs. Et c'était vrai qu'il les avait faits : à propos du problème des valeurs propres doubles, qui se présente dans la linéarisation du système séculaire dès qu'il y a au moins quatre planètes dont deux de masses très petites, il se plaisait à répéter que Lagrange avait vu le problème alors que Laplace l'avait ignoré ; il y avait aussi cette résonance mystérieuse, à laquelle j'ai fait allusion, qu'il avait remarquée, je crois, en 1996. Cette résonance (nullité de la trace du système linéarisé) avait jusqu'alors échappé aux spécialistes, sans doute en partie parce que, disparaissant après réduction des rotations, elle ne se manifeste pas dynamiquement. Alain Albouy a pris cette remarque comme point de départ du sujet de thèse qu'il a proposé à Khaled Abdullah. Je renvoie à leur compte-rendu commun intitulé *Sur une résonance mystérieuse signalée par Michel Herman* lors des journées scientifiques de l'Institut de Mécanique Céleste (IMCCE) en juin 2000 : ils notent que cette résonance généralise celle qui, dans la théorie de la lune, fait que les séries représentant le mouvement moyen du nœud et celui du périgée commencent par des termes exactement opposés.

En 1999 Michel Herman a été rapporteur de la thèse que Jacques Féjoz avait préparée sous ma direction après avoir passé un DEA avec Patrice Le Calvez. Le sujet en était l'étude globale du système séculaire du problème plan des trois corps, en particulier au voisinage des collisions de la planète intérieure avec le soleil, et l'application à cette situation d'une version raffinée due à Michel des théorèmes KAM dans un cas dégénéré. Lorsqu'il acceptait d'écrire un rapport sur un travail, Michel ne s'en acquittait jamais superficiellement. Il avait donc demandé à Jacques Féjoz de lui exposer en détail ses résultats. L'un d'eux, qui devait pourtant se révéler correct, l'avait fait bondir (un cas où aucune hypothèse diophantienne n'était nécessaire, presque un crime en quelque sorte...) et a valu à Jacques une très mauvaise nuit, il me l'a avoué après que tout fut terminé. La même attitude faisait de Michel un élément essentiel de la commission de spécialistes de Paris VII. Ses rapports sur les candidats étaient toujours le fruit d'un vrai travail d'analyse et de compréhension, ce que facilitait sa vaste culture. En novembre 1987 il avait même démissionné de la dite commission pour protester contre l'absurde brièveté (déjà à l'époque) des délais qu'on lui imposait pour écrire son rapport.

On a pu voir Michel comme un analyste préoccupé avant tout de passer de $C^{3+\varepsilon}$ à C^3 dans la régularité des tores invariants (voir *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, volume 2, Astérisque 144, 1986*), mais ce serait méconnaître sa passion constante pour l'origine physique ou astronomique des questions mathématiques auxquelles il réfléchissait, en particulier la mécanique céleste et la mécanique statistique. Périodiquement, le bruit de sa canne et l'odeur de sa cigarette annonçaient sa présence dans nos locaux de l'Observatoire. Il avait en général une question très précise, par exemple sur la rotation de la terre, ou bien il venait contester un terme dans le développement de la fonction perturbatrice. Le dossier qu'il avait réuni sur les sources de l'hypothèse ergodique est impressionnant ; quelques références, comme celles du beau livre de Paul et Tatiana Ehrenfest, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics, Cornell University Press 1959*, traduction de leur article de 1912 dans l'Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (vol. IV 2 *II*, no 6), affleurent dans les notes de la conférence *Stabilité en mesure des systèmes gravitationnels* qu'il avait prononcée pour la journée annuelle de la SMF consacrée à la mécanique céleste le 15 juin 1996. Pour cause de perfectionnisme, ces notes n'ont malheureusement pas été publiées avec celles des autres conférences. Il y discute en particulier l'hypothèse ergodique de Maxwell-Boltzmann (1870) et l'hypothèse quasi-ergodique de Birkhoff (1929) : la première, contredite par l'existence d'un ensemble de mesure positive de tores invariants KAM, aurait impliqué la densité de presque toute solution dans une surface d'énergie compacte ; la deuxième se contenterait de l'existence en général d'une orbite dense dans une telle surface d'énergie. Basés sur une fixation des fréquences imposée par le choix de la forme symplectique, les contre-exemples qu'avait donnés Michel à l'hypothèse quasi-ergodique ne s'appliquent pas aux systèmes mécaniques classiques définis sur un fibré cotangent muni de sa structure symplectique standard, donc pas à la mécanique céleste. Michel considérait ce problème comme l'un des plus fondamentaux de la mécanique céleste, plus fondamental en tous cas que celui de l'approximation des mouvements (bornés) par des orbites périodiques proposé par Poincaré dans le chapitre III (fin du paragraphe 36) des *Méthode nouvelles de la mécanique céleste*. Ici les surfaces d'énergie sont le plus souvent non compactes et l'hypothèse quasi-ergodique de Birkhoff affirme simplement que l'ensemble des conditions initiales conduisant à une orbite bornée est sans point intérieur dans une surface d'énergie générique (techniquement, il faut reparamétrer le flot pour qu'arriver à une collision prenne un temps infini). C'est une question qui le fascinait et à laquelle il réfléchissait en permanence. Et alors il était heureux. Il pénétrait dans ce domaine superbe où Lagrange et Poincaré l'avaient précédé. Lorsqu'il était sensible à la beauté et à l'ampleur d'un sujet, à son importance dans l'histoire des sciences, il voulait comprendre, démontrer, avancer, sans compromis, sans aucun intérêt pour ce qui était clinquant ou à la mode. Voici deux extraits (transcrits textuellement) du dernier paragraphe, intitulé *The oldest open question in dynamical systems*, du dernier article qu'il a publié, *Some Open Problems in Dynamical systems, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, Berlin 1998* :

I. Newton, $[N_1]$, certainly believed that the n-body problem, $n \geqslant 3$ (n particles moving under universal gravitation) is topological instable and, to paraphrase Laplace, makes the hypothesis that God solves the problem and controls the instabilities (hypothesis criticized by Leibniz and by all the enlighted XVIIIth century).

...

The fact that the bounded orbits have positive Lebesgue measure when the masses belong to a non empty open set, is a remarkable result announced by V.I. Arnold [A_4] *(Arnold only gives a proof for planar* 3*-body problem and if the author is not mistaken, Arnold's claim is correct). In some respect Arnold's claim proves that Lagrange and Laplace, against Newton, are correct in the sense of measure theory and that in the sense of topology, the above question, in some respect, could show Newton is correct.*

Je vois encore dans sa bibliothèque le petit volume de Voltaire sur « la physique de Monsieur Neuton ». Cette bibliothèque était fascinante, et pas seulement dans sa partie mathématique pourtant considérable. C'est là, il y a longtemps, qu'entre les livres d'économie, les pamphlets gauchistes, les romans du 18ème siècle et les *Mémoires secrets* de Bachaumont, il m'avait fait connaître *L'homme sans qualité* de Robert Musil. Il m'avait montré en souriant ce passage au tout début où il est dit comment Ulrich, double de l'auteur, avait abandonné les mathématiques puis la philosophie : « Bon dieu, dit-il, je n'ai pourtant jamais eu l'intention d'être mathématicien toute ma vie ? » (traduction de Philippe Jaccottet).

D'autres souvenirs seulement évoqués, sa sœur Marianne très proche de lui, son désarroi à la mort brutale de Diane, sa mère dont j'entends encore la voix rieuse rue Berryer, les discussions aux dîners qui suivaient les expositions du peintre Roland Bierge, son beau-père.

Plus loin encore, il y a plus de trente-cinq ans, assis sur le lit de sa chambre à Polytechnique, il écoute Yves Nat jouer l'opus 106 de Beethoven. Pendant le temps que dure la sonate, il oublie combien l'atmosphère de l'école lui pèse. Heureusement, à l'X, il y a Laurent Schwartz, la magie de son cours d'Analyse, prolongée par le séminaire. Des résumés des leçons sont rédigés par les élèves. La douzième leçon du premier semestre 1963-1964 concerne le calcul des variations, l'intégrale de Riemann et le théorème de Cauchy-Lipschitz d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles. Le résumé est signé Herman.

Ensuite, il y eut le Centre de mathématiques que Schwartz avait créé pour les cinq élèves qui, à leur sortie, avaient choisi de se lancer dans la recherche en mathématiques : Jean-Pierre Delale, Michel Herman, François Laudenbach, Dominique Thillaud et l'auteur de ces lignes. Dix ans plus tard, le centre quittait la rue de la Montagne-Sainte-Geneviève pour emménager à Palaiseau. C'est là que Michèle Lavallette et Marie-Jo Lécuyer ont tapé sa thèse. Depuis, Jean-Pierre s'est tué en faisant de la voile et Michel n'est plus là. Ces quelques pièces aux hauts plafonds de la rue de la Montagne-Sainte-Geneviève sont un bien cher souvenir.

La sonate que joue Yves Nat s'achève, Michel m'explique combien ce vieil enregistrement est supérieur à d'autres plus récents dont le caractère trop analytique a supprimé le charme. Il est déjà sans compromis.

Photo

Photo communiquée par Marianne Herman.

Reminiscences of Michel Herman's first great theorem

Dennis Sullivan

In the middle seventies, Henri Epstein and I would walk over to Orsay from the IHES to hear Michel Herman's lectures on circle diffeomorphisms. We marveled at how much structure and elegance evolved from Michel's study of the iteration of $x \mapsto x + y(x)$ where y is any smooth function of periodicity one.

A couple of years earlier a new edition of Denjoy's work was published by the CNRS and Michel was involved. This provided Michel the opportunity to reconsider Denjoy's arguments showing a twice differentiable circle diffeomorphism either has a periodic orbit or only dense orbits. Basically, Denjoy was controlling the nonlinearity of the first return iterates q_1, q_2, q_3, $\ldots$ rising the differentiability hypothesis of f and the disjointness of an orbit of intervals up to first return. This involved calculating the first and second derivatives of long iterates of f. The first derivative is just the usual chain rule while second derivative involves in modern terms the chain rule for the non linearity $\frac{f''}{f'} = (\ln f')'$.

Michel wanted to control the higher derivative of the iterates in order to attack Arnold's conjecture that if the q_1, q_2,... did not grow rapidly the Denjoy continuous conjugation Df of f to a rotation would actually be smooth. From the Kolmogoroff-Arnold-Moser theory, Michel already knew that if he could introduce coordinates to make the non linearity small enough for a given growth condition on the first returns $q_1, q_2, \ldots$, then he would win.