actifs dans tous les domaines. C'est ainsi que le développement des mathématiques est considéré par les physiciens américains comme une priorité. Mais l'utilité universelle des mathématiques pose de sérieuses questions en matière d'enseignement. La tendance existe déjà, et elle est naturelle, à ce que les spécialistes enseignent au fur et à mesure les mathématiques dont ils ont besoin. Si cela devenait la voie principale d'apprentissage des mathématiques, ce qui fait la valeur des mathématiques dans la formation générale disparaîtrait : on aurait, juxtaposées, les mathématiques des physiciens, des informaticiens, des économistes etc. Il y a un risque dans l'enseignement de divorce entre mathématiques utilitaires, enseignées par les utilisateurs, et mathématiques désincarnées, enseignées par les mathématiciens. En revanche, la possibilité existe plus que jamais de faire sentir la puissance et la beauté des mathématiques en articulant leur enseignement avec celui des disciplines où elles sont utilisées.

L'adresse aux mathématiciens, votée par la commission le 5 juin, vise à combler le fossé entre recherche mathématique et culture générale. En cela, elle s'inscrit bien dans les objectifs de l'année internationale des mathématiques. La commission demande aux mathématiciens, sur des exemples qui leur paraissent pertinents, de fournir aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges des éléments pour leur culture personnelle sous la forme de textes ou documents intéressants et accessibles. Je renvoie au texte de l'adresse pour les modalités que recommande la commission. Claudine Ruget fera le point sur les réalisations en décembre 2000. Les collègues intéressés peuvent s'adresser à elle ou à Rémi Langevin pour avoir une idée des possibilités d'édition. Il me semble utile de souligner un point important : parmi les éléments de culture les plus importants, nous devons compter tout ce qui vient de l'extérieur des mathématiques et qui contribue à l'élaboration des sciences mathématiques. L'appel s'adresse donc non seulement aux mathématiciens au sens strict, mais à tous ceux, informaticiens, physiciens, ou autres, dont une part de l'activité créatrice est de nature mathématique. Nous savons qu'une réponse de leur part est difficile, mais elle serait pour nous de grande valeur.

⋆ ⋆ ⋆

Calcul et démonstration

Michèle ARTIGUE (*Université Paris 7*)

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques a choisi de faire du « calcul » un de ses thèmes de réflexion prioritaires et Jean Pierre Kahane m'a chargé de piloter le travail de la commission sur ce thème. C'est sans aucun doute à ce titre que j'ai été sollicitée par la SMF pour introduire la partie du débat concernant calcul et démonstration. Le travail de la commission sur le calcul n'en est cependant qu'à ses débuts. Je me bornerai donc à préciser les axes selon lesquels nous avons choisi d'organiser la réflexion ainsi que quelques principes directeurs susceptibles de la guider, avant d'envisager les rapports entre calcul et démonstration. Il s'agit là d'un sujet extrêmement vaste. Je souhaiterais l'aborder sous un angle précis : celui de la transition lycée/université qui nous pose aujourd'hui à tous problème.

I. Quelques axes et principes directeurs pour organiser la réflexion sur le thème « calcul »

Précisons que ce qui suit correspond à une réflexion préliminaire et n'engage en aucun cas la commission dans son ensemble. Toutes les critiques, suggestions et contributions seront pour nous les bienvenues.

1. Articuler dans la réflexion deux dimensions complémentaires : la première que je qualifierai « d'épistémologique », la seconde de « didactique »

La dimension épistémologique du travail visera à élucider la place, les fonctions du calcul dans les mathématiques actuelles, la diversité des pratiques qui s'y rattachent suivant les domaines mathématiques concernés, suivant aussi le type de travail que l'on effectue dans ces domaines. Elle visera aussi à comprendre comment l'évolution des instruments du calcul influence le champ des problèmes relevant du calcul, la façon de les poser, la manière de les résoudre. Il va sans dire que la réflexion, ici, rencontrera celle menée par ailleurs sur les rapports entre mathématiques et informatique. La dimension didactique du travail visera à élucider la façon dont cette réflexion épistémologique peut être exploitée pour interroger l'enseignement de ce qui relève du calcul, de l'école élémentaire à l'université, pour penser des évolutions souhaitables et/ou nécessaires de ce dernier, pour penser aussi les moyens nécessaires à ces évolutions, notamment en termes de formation des enseignants. Il me semble important, dans cette seconde dimension tout particulièrement, de savoir tirer les leçons du passé. La réflexion épistémologique peut et doit nourrir la réflexion sur l'enseignement, mais il ne faut pas non plus en surestimer les apports. Elle ne nous informe pas sur la viabilité des choix qu'elle peut inspirer, sur les conditions de cette viabilité. Quand j'ai étudié l'évolution de l'enseignement de l'analyse au lycée sur ce siècle [1], j'ai été frappée de voir comment les choix faits, au début des années 80, de promouvoir une entrée progressive des élèves dans le champ de l'approximation, en évitant à la fois une formalisation prématurée et une analyse réduite à des pratiques algébriques, tout à fait séduisants sur le plan épistémologique, s'étaient vus peu à peu dénaturés dans la réalité de l'enseignement, faute en particulier d'avoir mesuré le coût de la maîtrise technique de l'approximation requise. Il me semble du ressort de cette commission de réfléchir sérieusement aux conditions de viabilité de tel ou tel choix, en prenant en compte à la fois les enseignants et les élèves, sans pessimisme ni idéalisations excessives. Je voudrais préciser que ceci ne signifie en aucun cas pour moi renoncer à avoir des ambitions pour l'enseignement des mathématiques, loin de là, mais souligner que le travail d'étude des moyens de réaliser telle ou telle ambition, a priori légitime, est aussi important que celui de déterminer les ambitions.

2. Structurer la réflexion selon les deux axes calcul exact – calcul approché

S'agissant d'un thème aussi vaste, il est nécessaire de trouver des fils conducteurs pour structurer la réflexion. On pourrait les chercher dans la distinction des grands domaines mathématiques rencontrés progressivement au fil de la scolarité, qui organisent le rapport à cette entité complexe qu'est le calcul. Il nous a semblé préférable de les choisir plus transversaux, tout en ménageant un espace spécifique pour les premiers contacts avec le monde du calcul, à l'école élémentaire et au début du collège, centré autour des notions de nombre, grandeur, mesure et dimension. Nous avons de fait choisi comme fils conducteurs les deux axes du « calcul exact » et « du calcul approché ». Le choix d'éléments transversaux tels ceux évoqués ci-dessus me semble présenter plusieurs avantages :

• Ils nous évitent de nous laisser obnubiler trop prématurément par des questions locales liées à l'actualité de l'enseignement et de ses problèmes.

• Ils permettent de prendre en charge les questions d'enseignement et d'apprentissage dans la durée, car l'un et l'autre sont présents tout au long de la scolarité, de l'enseignement élémentaire à l'université.

Cette question de la prise en charge de la durée des apprentissages me semble essentielle et je pense que, sans rentrer dans le détail de la programmation de l'enseignement, ce qui ne saurait être notre rôle, nous devons marquer, de façon forte, notre attention à ces questions. Il me semble que nous vivons aujourd'hui dans un système qui, sous couvert de prendre en compte les difficultés des élèves, prend vis à vis de ces questions des décisions contraires à leur intérêt même. Ce qui est reconnu comme difficile n'est pas forcément reconnu comme quelque chose dont l'apprentissage doit être pensé dans le long terme mais comme quelque chose dont l'apprentissage doit être repoussé à des jours meilleurs avec, implicite sans doute, la conviction loin d'être justifiée qu'en s'y prenant plus tard, on économisera du temps d'apprentissage.

• Ils permettent de décloisonner la réflexion pour penser l'enseignement des mathématiques en termes de problématiques ou champ de problèmes que l'on se donne progressivement les moyens techniques et conceptuels de maîtriser.

3. Accorder une grande importance à la façon dont les instruments actuels du calcul influent sur les pratiques de calcul, sur les besoins mathématiques du calcul

Cette question des instruments de l'activité mathématique est sans aucun doute une question cruciale aujourd'hui et elle se pose des débuts de l'école élémentaire à l'université. Le domaine du calcul y est particulièrement sensible car une vision étroite de ce dernier peut laisser penser que les instruments étant aujourd'hui susceptibles de prendre en charge une partie du travail technique qui nous était dévolu, il n'est plus besoin d'apprendre. Il importe sans aucun doute à la commission de montrer que, si des équilibres nouveaux doivent se constituer, si les besoins mathématiques changent, une pratique mathématique instrumentée intelligente, efficace et contrôlée est une pratique qui nécessite des connaissances mathématiques substantielles.

4. Etre attentifs à la diversité des formes que prend le calcul suivant les domaines et aux questions que pose cette diversité à l'enseignement

Derrière le terme « calcul » se cachent des mondes différents qui partagent bon nombre d'objets mais ne les traitent pas de façon identique. On sait que ceci pose aux élèves des difficultés résistantes, dans la transition entre arithmétique et algèbre, entre algèbre et analyse. Il importe sans doute à la commission d'être sensible à ces changements dans les rapports aux objets du calcul, aux reconstructions que ces changements nécessitent et que l'enseignement oublie trop souvent de prendre en charge.

5. Etre sensible enfin à la diversité des rapports possibles au monde du calcul et des besoins mathématiques dans ce domaine des différentes catégories d'élèves et étudiants, au delà de la scolarité commune

Il me semble en effet nécessaire de s'interroger, en particulier au niveau de l'université mais sans aucun doute dès le lycée, sur les formes de validation du calcul, sur les niveaux de formalisation qui nous semblent souhaitables, raisonnables, compte-tenu des publics auxquels nous nous adressons, compte-tenu des enjeux différents qu'aura nécessairement l'enseignement des mathématiques, pour ces différents publics. A mes yeux, il n'y a pas un rapport idéal au calcul dont tous les autres seraient des affaiblissements, voire des dénaturations, même si le monde de l'enseignement tend à nous enfermer dans le piège de cette vision. Il existe une multiplicité de rapports, avec des fonctionnalités, des efficacités diverses qu'il serait vain voire nocif de vouloir organiser dans des rapports hiérarchiques.

II. Calcul et démonstration dans la transition lycée/post-bac

Je n'ai pas la prétention, dans cette brève introduction, de présenter une analyse approfondie de la question des rapports entre calcul et démonstration, même en me limitant à la transition lycée/post bac. Je me bornerai à soulever un certain nombre de problèmes qui, du fait de mon expérience d'enseignante mais aussi de chercheur en didactique, me semblent pertinents pour lancer ce débat.

1. Les décalages entre la culture mathématique du lycée et la culture universitaire du calcul

Nous sommes de plus en plus sensibles à ces décalages qui nous semblent s'accroître d'année en année. Ils ne se posent pas de la même façon dans tous les domaines, par exemple en algèbre comme en analyse. En algèbre, les étudiants rencontrent un monde totalement nouveau : celui des structures algébriques et les calculs nouveaux, tant dans leurs objets que leurs techniques, qui lui sont associés. En analyse, le dépaysement est moindre, beaucoup d'objets sont déjà familiers mais les rapports à ces objets vont rapidement bouger. Pourtant, il faut éviter le schématisme. Si l'on considère la majorité des enseignements actuels de DEUG première année, on ne peut dire que l'on passe brutalement d'une analyse intuitive et algébrisée à une analyse formelle, centrée sur l'approximation. Comme le montre bien la thèse récente de Frédéric Praslon sur la notion de dérivée [2], le décalage culturel que nous ressentons résulte plus d'un amoncellement de micro-ruptures que d'une seule rupture fondamentale. Ces micro-ruptures s'expriment notamment en termes d'autonomie nécessaire de l'étudiant dans la résolution des tâches qui lui sont proposées, en termes d'éclatement des problèmes et des méthodes permettant de les résoudre, en termes de rythme d'introduction d'objets ou questions nouvelles, en termes de complexité technique du calcul et de rapport à la généralité. Tout ceci s'oppose au monde du lycée, peuplé de tâches bien calibrées portant sur des objets particuliers, de techniques bien routinisées, où le guidage est présent dès que l'on s'écarte des sillons tracés. Cela crée entre les exercices de terminale S et ceux de première année de DEUG un véritable saut, même lorsque les exercices concernent des objets a priori connus, même lorsque, ne s'engageant pas dans une analyse des ε, η, on s'appuie, comme au lycée, sur de solides théorèmes relais pour justifier et conduire le calcul. Là où, selon la terminologie introduite par Aline Robert [3], des connaissances de niveau technique ou mobilisable à la rigueur suffisaient, on exige maintenant des connaissances disponibles.

2. Le rapport aux instruments de calcul

L'enseignement des mathématiques au lycée est un enseignement avec calculatrices. Mais l'intégration de ces outils à l'enseignement reste pour l'instant marginale : il s'agit plus d'une utilisation sauvage, tolérée que d'une intégration, avec tous les vices que cela induit. Les élèves qui arrivent à l'université ont l'habitude de fonctionner avec des calculatrices mais ils ne contrôlent pas, dans leur très grande majorité, cette utilisation. L'enquête faite il y a trois ans pour la SMF avec Pierre Jarraud montrait que d'une part, la réaction de l'université à cet état de fait était majoritairement de bannir les calculatrices et que, d'autre part, l'introduction d'outils logiciels de calcul correspondant mieux à la pratique professionnelle des mathématiciens restait marginale. Personnellement, ceci ne me semble pas raisonnable. On calcule avec les instruments de calcul de son temps. Ceci d'autant plus que les recherches menées au niveau du lycée ces dernières années montrent bien comment la question du contrôle et d'une pratique mathématique efficace avec les outils graphiques et formels dont on dispose aujourd'hui est génératrice de questions mathématiques riches, à la portée des élèves et de besoins en connaissances [4].

On sent poindre aujourd'hui une évolution, notamment parce que les enseignements de méthodologie, parfois par défaut d'autres idées vis à vis de contenus possibles, sont utilisés pour une initiation à des outils de calcul comme Maple ou Mathematica. Mais il y a sans doute à penser sérieusement ces initiations en prenant en compte la culture machine des élèves de lycée et en essayant d'amener les étudiants, de façon plus globale, à une gestion plus contrôlée de leurs instruments de calcul.

3. L'opposition calcul/démonstration

Pour nos étudiants, le monde du calcul et le monde de la preuve, de la démonstration sont deux mondes en opposition et ceci a des conséquences pour le moins fâcheuses. Le monde de la démonstration est culturellement pour eux associé à la géométrie. C'est dans cet univers qu'au collège ils ont commencé à apprendre à démontrer, c'est dans cet univers que, tout au long du lycée, ils ont produit, rencontré des démonstrations. Il est significatif de ce point de vue de considérer les enseignants débutants en deuxième année d'IUFM. Comme le montre bien la thèse en cours d'Agnès Lenfant [5], quand on demande à ces débutants de préciser quelles fonctions ils voient à l'algèbre, l'idée que ce domaine puisse servir à prouver, notamment des propriétés numériques, n'est jamais spontanément évoquée. Le fait que l'on puisse exploiter d'autres domaines que la géométrie pour initier les élèves à la rationalité mathématique semble pour eux une réelle découverte. Nous venons de citer le cas de l'algèbre mais le calcul au sens large est un domaine où, dès l'école élémentaire, le raisonnement, la planification des actions, l'argumentation peuvent être mobilisés pour préparer et amorcer cette entrée dans la rationalité mathématique ; l'ouvrage que vient de publier l'équipe ERMEL de l'INRP [6] le montre bien.

Nous entendons souvent dire que les étudiants qui arrivent à l'université ne savent pas démontrer, qu'ils manquent complètement de logique. Ce diagnostic me semble pour le moins rapide. Les étudiants qui nous arrivent savent peut-être produire des démonstrations, mais dans un monde mathématique qui ne vit plus pour eux à l'université : celui de la géométrie synthétique. Il leur faut à l'université élargir leurs pratiques de démonstration à d'autres domaines, en particulier à l'univers ensembliste. Jean Luc Dorier et Marc Rogalski ont bien montré dans leurs recherches [7] combien un certain nombre de difficultés des étudiants en algèbre linéaire tenait à leur méconnaissance de ce monde ensembliste, des techniques spécifiques de preuve qui s'y développent, si loin pour eux de celles qu'ils ont eu l'habitude de pratiquer. On peut penser que la réintroduction de l'arithmétique, en terminale, peut aider à faire bouger la situation, en ouvrant d'autres espaces à l'activité de preuve dans le secondaire. Encore faut-il que les potentialités ainsi offertes soient réellement exploitées par le système et que le travail en arithmétique ne se réduise pas rapidement à la résolution stéréotypée de quelques exercices types.

4. Les besoins logiques de l'activité mathématique

Nous avons insisté dans ce qui précède sur la dépendance des techniques de démonstration des domaines mathématiques concernés, sur la difficulté qu'ont nos étudiants à prendre la mesure de ce phénomène et du travail à effectuer pour s'y adapter, vu la coupure qui existe pour eux entre le monde de la géométrie où l'on démontre et les mondes du calcul (algèbre, analyse, probabilités, statistiques). Il n'en demeure pas moins que des problèmes plus fondamentaux sont loin d'être résolus à l'entrée en DEUG, comme l'ont bien montré les travaux de Marc Legrand par exemple [8]. Les techniques de débat scientifique qu'il utilisait en début de DEUG l'ont en effet amené à constater que bon nombre d'étudiants débutants n'avaient pas une claire compréhension des distinctions entre logique quotidienne et logique mathématique, puis à élaborer des situations permettant de travailler cette distinction. La logique quotidienne obéit par exemple au principe du maximum d'information, l'exception y confirme la règle, le vrai se doit d'y être utile et le contraire y joue souvent le rôle de négation, on y change pragmatiquement les énoncés en fonction du sens véhiculé.

Cette logique imprègne notre fonctionnement culturel et social, elle ne s'efface pas miraculeusement derrière la logique mathématique.

Les besoins en logique de nos étudiants ne se résument pas cependant à une sensibilisation à cette distinction entre logique quotidienne et logique mathématique. Et, sur ce point, je voudrais insister sur le fait que ces besoins logiques ne relèvent pas du seul calcul propositionnel. Les démonstrations de la géométrie du secondaire peuvent conforter dans cette illusion car la structure des énoncés y est peu complexe mais, comme l'a bien montré notamment Viviane Durand Guerrier dans sa thèse [9], les besoins logiques des mathématiques universitaires relèvent du calcul des prédicats. Comment remplir ces besoins ? Les réponses à cette question sont loin d'être évidentes car il semble bien qu'il ne suffise pas d'enseigner la logique correspondante pour qu'elle soit injectée dans un contrôle des raisonnements. Nos raisonnements sont contextualisés. La nature des objets concernés, ce que nous en connaissons, le caractère plausible ou non des résultats obtenus prime dans le contrôle exercé et le contrôle logique joue un rôle second. Il est d'autant plus difficile pour nos étudiants débutants que les énoncés formalisés sur lesquels il s'exerce sont pour eux des objets très peu familiers, compte-tenu des limitations de l'enseignement secondaire dans ce domaine.

J'ai dans ce qui précède, choisi ces quelques points pour ouvrir le débat sur calcul et démonstration. Je ne prétends en aucun cas avoir fait le tour de la question, ni avoir fait les choix les plus judicieux, j'ai simplement cherché à soulever quelques questions, affiché des points de vue, dont je pense qu'ils peuvent susciter un débat utile au sein de notre communauté.

Références :

[1] Artigue M. (1996) Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994), in B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin (eds), Les sciences au lycée — un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, p. 195-216, Vuibert, Paris.

[2] Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition terminale S/deug Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement, Thèse de doctorat, université Paris 7 Denis Diderot.

[3] Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 18.2, p. 139-190.

[4] Guin D. (ed) (1999) Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques, Actes du colloque européen de la Grande Motte, mai 1998, irem de Montpellier.

[5] Lenfant A. La construction de la professionnalité enseignante en algèbre chez les enseignants débutants, Thèse de doctorat en cours, université Paris 7 Denis Diderot. [6] Douaire J. & Hubert C. (eds) (1999) Vrai ? Faux ? ... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, inrp, Paris.

[7] Dorier J.L. (ed) (1997) L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[8] Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, Repères irem n° 10, p. 123-158.

[9] Durand Guerrier V. (1996) Logique et raisonnement mathématique, Thèse de doctorat, université de Lyon 1.