

## Lichnérowicz et la géométrie différentielle

Marcel BERGER

---

**L**ichnérowicz s'est intéressé à de très nombreux aspects, facettes de la géométrie différentielle. Dans un certain nombre de cas, ce seront ci-dessous nos éclairs, sa contribution fut relativement ponctuelle. Dans d'autres au contraire il a poursuivi ses travaux sur de longues périodes, le cas kählérien en est l'un des plus frappants. Mais il reste un esprit remarquable par cette curiosité à grand angle (n'avait-il pas envisagé d'écrire une thèse sur le roman policier?), largeur de spectre qui explique, entre autres raisons, son énorme influence comme patron de thèse, en langage plus moderne on parle de directeur de recherches. Les sections 1 à 4 nous semblent couvrir les domaines qu'il a longuement et grandement explorés. Nous mentionnerons dans la section 5 ses recherches plus localisées. Par incompetence, nous devons ignorer ici ses contributions en géométrie symplectique, déformations et quantifications, elles feront l'objet d'un autre article rédigé par un expert, Charles-Michel Marle.

Il nous semble certain que son intérêt pour la géométrie différentielle « pure » était motivé par son profil à la fois de géomètre et de physicien mathématicien. Pure ne doit pas être mal compris, pour lui les variétés différentiables avaient une métrique, de la courbure mais aussi un laplacien, pouvaient être des espaces homogènes, des variétés à structure holomorphe complexe, etc.

Il faut mentionner qu'il a été l'un des premiers à introduire en France après-guerre une direction de thèse de proximité. Au lieu de s'entendre dire « voici un sujet de thèse, revenez-me voir dans huit ans quand vous aurez fini », on savait qu'on pouvait aller le voir très souvent. Il tenait aussi à cette qualité, essentielle si l'on ne veut pas risquer de causer éventuellement de graves dégâts chez les thésards, de vérifier que le sujet de thèse offert ne comportait pas de risque. Pour citer mon cas personnel, il m'a dit « tu peux travailler sur les groupes d'holonomie, je viens de vérifier que Chevalley ne s'en occupe plus ».

La France a connu de 1918 à 1955 un retard mathématique considérable, surtout sur le plan de l'enseignement. Il y avait certes Elie Cartan, Gaston Julia, Paul Lévy, mais ils étaient isolés de la grande masse des mathématiques diffusées largement. Par exemple il n'y avait, mettons de 1945-1955, pas un seul cours de mathématiques raisonnablement moderne à la Sorbonne (à l'exception de celui de troisième cycle de Paul Lévy). La cause est aujourd'hui admise semble-t-il : l'hémorragie absolue, si l'on excepte Gaston Julia et Paul Lévy, de la première guerre mondiale. Des livres comme le van der Waerden, le Courant-Hilbert et bien d'autres, étaient ignorés de presque tous les professionnels. Bien sûr, Bourbaki fut le grand sauveteur de notre isolement, mais Lichnérowicz y participa aussi largement. Dans de nombreux cours et par le livre qui les résume, il milita inlassablement pour diffuser en France l'écriture moderne des espaces vectoriels et le calcul tensoriel, la notion de variété et celle de forme différentielle extérieure, l'espace de Hilbert, les séries et la transformation de Fourier, les équations intégrales. C'était une partie de son enseignement de physique mathématique à Strasbourg et le livre (Lichnérowicz, 1947) eut une

influence considérable. La préface par Darmon en est instructive pour montrer l'isolement français dans le domaine en question : il n'y est question que d'ouvrages allemands d'avant-guerre.

### 1. A la suite de Bochner (formules « à la Weitzenböck »)

Le texte (Bochner, 1946) restera une pierre incontournable : Bochner calcula le laplacien du carré de la norme d'une 1-forme différentielle  $\omega$  sur une variété riemannienne :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|\omega\|^2) = \|D\omega\|^2 + \langle D\omega, \omega \rangle + \text{Ricci}(\omega, \omega)$$

Ici  $\Delta$  est le laplacien sur les fonctions, mais aussi sur les 1-formes,  $D\omega$  désigne la dérivée covariante et Ricci la courbure de Ricci. Puisque l'intégrale d'une divergence (donc d'un laplacien en particulier) sur une variété compacte (sans bord) est toujours nul, Bochner déduit de son calcul qu'il n'existe aucune forme harmonique non nulle ( $\Delta\omega = 0$ ) sur une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci positive. Grâce au théorème de Hodge – de Rham cela entraîne que le premier nombre de Betti de la variété est nul. Les relations entre courbure et topologie forment peut-être le sujet le plus naturel de la géométrie riemannienne. Avant Bochner on n'en connaissait guère que de très faibles, si l'on excepte le cas de la courbure sectionnelle négative. Dans la direction « courbure positive » Bochner ouvrait une brèche, dont Lichnerowicz perçut de suite l'horizon dévoilé. Il s'en servit dans au moins quatre directions, cinq si l'on comprend l'extension pure et apparemment simple au cas des formes de degré supérieur à 1, extension développée outre Lichnerowicz par Bochner et Yano, et terminée, comprise, seulement dans (Meyer, 1971). Ce genre de formule est maintenant appelé « de Weitzenböck ». Effectivement une certaine partie de ces formules généralisées se trouve dans (Weitzenböck, 1923), comme exemples de calcul différentiel « absolu ». Mais l'auteur n'en fait strictement rien, ce pourquoi d'ailleurs il aurait été bien en peine puisque l'on ne disposait pas à l'époque du théorème du type Hodge-de Rham.

Dans (Lichnerowicz, 1950) on trouve le calcul qui fournit le laplacien de la norme carrée du tenseur de courbure complet  $R$  :

$$-\frac{1}{2}\Delta(\|R\|^2) = \|DR\|^2 + \text{Univ}(R, R, R) + Q(D(\text{Ricci}))$$

où  $\text{Univ}(R, R, R)$  est une forme cubique universelle en  $R$  et  $Q$  une forme quadratique universelle en la courbure de Ricci. Je suis encore surpris aujourd'hui du peu de choses que l'on a fait avec cette formule extraordinaire. Dans (Tricerri & Vanhecke, 1986) on voit en quelques lignes qu'elle entraîne que les espaces localement symétriques sont caractérisés par la forme algébrique ponctuelle de leur tenseur de courbure  $R$ , un résultat qui généralise des résultats très partiels obtenus auparavant de façon très pénible.

Dans (Lichnerowicz, 1958) il y a l'idée d'appliquer la formule de Bochner, non plus à une 1-forme harmonique, mais à la 1-forme qui est la dérivée  $df$  d'une fonction propre du laplacien :  $\Delta f = \lambda f$ . On trouve, en intégrant :  $0 =$

$$\int_M \|\text{Hess}f - \lambda \int_M \|df\|^2 + \int_M \text{Ricci}(df, df).$$

la première valeur propre  $\lambda_1$  du laplacien d'une variété riemannienne compacte  $M^d$  à courbure de Ricci vérifiant  $\text{Ricci} \geq d - 1$  vérifie  $\lambda_1 \geq d$ . Il me semble que c'est la première relation historique entre spectre et courbure. Sous la même hypothèse, il montre en outre dans le cas kählérien que l'on a mieux :  $\lambda_1 \geq 2d$ . Ceci parce qu'il s'intéresse en fait aux champs de vecteurs holomorphes  $\xi$  : ceux-ci vérifient  $\Delta x = 2 \cdot \text{Ricci}(\xi)$ , et on l'applique à la fonction propre qui est la divergence de  $\xi$ .

C'est dans (Lichnérowicz, 1961), mû par la physique mathématique, qu'il découvre qu'il existe des laplaciens naturels pour d'autres objets que seulement les formes différentielles extérieures. On n'a pas fini d'épuiser cela, par exemple on l'applique avec fruit au cas des formes différentielles symétriques d'ordre 2 pour prouver que l'ensemble des structures d'Einstein sur une variété compacte est de dimension finie, voir (Besse, 1987). Le texte (Lichnérowicz, 1961) est aussi important par d'autres aspects, on y trouve une formule complète pour les variations à un paramètre des structures riemanniennes ou lorentziennes et comme application des résultats sur les variations des équations de la relativité générale.

Last not least, mû toujours par la physique c'est dans (Lichnérowicz, 1963) qu'il applique la technique de Bochner aux spineurs d'une variété spinorielle et trouve la formule, ahurissante de simplicité (si l'on se rappelle que, pour les formes différentielles extérieures de degré autre que 1, le terme résiduel était très complexe à déchiffrer) :  $\delta^2 = D * D + \frac{\text{scal}}{4}$ , où  $\delta$  est l'opérateur de Dirac,  $D$  la dérivée covariante et  $\text{scal}$  la courbure scalaire. Il identifie ensuite l'index de l'opérateur de Dirac avec le  $\hat{\alpha}$ -genre de Borel-Hirzebruch. D'où, grâce au théorème de l'index qui venait tout juste d'être démontré, une restriction topologique pour la condition ultra-faible « la courbure scalaire est positive » (ce fut même la seule restriction connue a fortiori pour l'hypothèse de la courbure sectionnelle positive, ce avant Gromov en 1981). Les avatars de cette formule sont loin d'être terminés, elle a diffusé dans une bonne partie de la littérature actuelle ; sous forme de livres on pourra l'apprécier par exemple dans (Berline, Getzler, & Vergne, 1992) et (Lawson & Michelsohn, 1989). Lichnérowicz continua à travailler sur les spineurs jusqu'à la dernière minute.

## 2. Le royaume de Kähler

Ce royaume, découvert dans (Kähler, 1933), resta très longtemps pratiquement ignoré, voir une de ses rares analyses historiques en (Bourguignon, 1993). Mais il nous semble que le déclenchement fut le livre (Hodge, 1941). Car il dissocia « à la Riemann » la structure de variété algébrique de celle de variété seulement kählérienne. Dans cette brèche l'après-guerre vit s'engouffrer, Chern en 46, Weil en 49 et bien d'autres. Lichnérowicz fut l'un de ceux-là. Une de ses motivations était la question d'Elie Cartan : les domaines bornés homogènes de  $\mathbf{C}^n$  sont-ils tous symétriques ? question à laquelle il travailla d'arrache-pied (on sait aujourd'hui qu'il y a des contre-exemples). Une question essentielle était de savoir ce qui restait, en kählérien seulement, des résultats de Lefschetz sur les variétés algébriques. Mais aussi ce qui restait dans le cas seulement symplectique (disons ici presque-kählérien). Bien que cela apparaisse aujourd'hui

« élémentaire », mais ce ne l'était pas à l'époque, ce fut lui qui établit l'équivalence entre variété kählérienne, variété à groupe d'holonomie compris dans le groupe unitaire complexe  $U(n)$ , et variété admettant une 2-forme extérieure de rang maximum qui est à dérivée covariante nulle. En outre aussi l'équivalence, dans le domaine kählérien, entre courbure de Ricci nulle et groupe d'holonomie contenu dans le groupe spécial unitaire  $SU(n)$ . Tout ceci permettait de commencer à voir plus clairement ce qui subsistait de Lefschetz.

Dans (Lichnérowicz, 1969) on trouve pour la première fois la généralisation aux cas riemannien, de dimension quelconque, de la notion de variété d'Albanese et de l'application de Jacobi sur cette variété, notions considérées auparavant seulement dans le cas des algébriques et celui des surfaces. Un résultat important est dans (Lichnérowicz, 1971) : si la courbure de Ricci (alias la première classe de Chern) d'une variété kählérienne compacte est non négative alors cette application de Jacobi est une fibration holomorphe.

### 3. Groupes d'holonomie

Cette notion, essentielle aujourd'hui (cordes, variétés miroirs en physique mathématique, mais aussi en mathématiques « pures » : conjecture de Calabi, variétés hyperkähleriennes, Kähler-quaternioniennes), créée par Elie Cartan dans (Cartan, 1925), resta très longtemps au purgatoire avant d'en être violemment sortie par (Borel & Lichnérowicz, 1952) : il y est montré le résultat ahurissant que le groupe d'holonomie d'une variété riemannienne, même locale (ouverte), est toujours un groupe de Lie compact. Rappelons que ce groupe est celui formé par le transport parallèle le long de tous les lacets issus d'un point. Il est surprenant qu'il soit compact pour des variétés qui sont des ouverts « si petits soient-ils ». L'espoir d'Elie Cartan était d'obtenir à l'aide de ce groupe une classification des variétés riemanniennes. On sait aujourd'hui que ce n'est pas le cas, hormis celui très spécial des espaces symétriques, sinon il ne reste que (hormis le groupe orthogonal total ou spécial et les dimensions exceptionnelles 7 et 8) : le cas kählérien, le cas kählérien à courbure de Ricci nulle, le cas kähler-quaternionien et le cas hyperkählierien. Ceci explique, joint à la conjecture de Calabi (prouvée par Thierry Aubin dans le cas négatif et Yau dans le cas général) l'importance des variétés spéciales citées juste ci-dessus. Nous avons mentionné plus haut comment Lichnérowicz réalisa le lien direct entre holonomie dans  $U(n)$  et être kählérienne, plus le cas à courbure de Ricci nulle. Il ne manqua pas d'utiliser aussi les groupes d'holonomie de façon essentielle pour les résultats de la section suivante.

### 4. Le royaume des homogènes

Toujours mû par la question d'Elie Cartan sur les domaines bornés homogènes, les espaces homogènes ne cessèrent de le hanter. De toute façon, vus à la Klein, les géométries sont toutes homogènes. Le livre entier (Lichnérowicz, 1958) leur est consacré. Mais dès (Lichnérowicz, 1953) il classait presque complètement (dans le cas semi-simple) les espaces homogènes kählériens compacts, classification terminée dans (Borel, 1954) pour le cas semi-simple, voir

le livre (Besse, 1987). Mais il ne s'arrêta pas là, (Lichnérowicz, 1990) termine complètement la question pour le cas des groupes kählériens.

On sait que les opérateurs différentiels invariants sont importants, dès (Lichnérowicz, 1965) il démontre qu'ils commutent sous la seule condition qu'il y ait un élément de volume invariant. Ces opérateurs ont été très étudiés plus tard, voir le livre (Helgason, 1984).

## 5. Eclairs

### A. *L'harmonie des sphères*

(Lichnérowicz, 1943) démontre que les espaces harmoniques de dimension 4 sont symétriques. Les espaces harmoniques sont les variétés riemanniennes pour lesquelles le laplacien admet une solution élémentaire ne dépendant que de la distance (ou plein d'autres conditions équivalentes, par exemple la valeur d'une fonction harmonique est égal à sa moyenne sur les boules, etc.) Sont connus pour être harmoniques tous les espaces symétriques de rang 1, c'est-à-dire ceux où le groupe d'isotropie est symétrique. On sait maintenant que l'harmonicité, jointe à la compacité, entraîne la symétrie. En revanche il y a des contre-exemples dans le cas non compact.

### B. *Bien avant les submersions riemanniennes*

(Lichnérowicz, 1949) considère les fibrations d'un point de vue riemannien, bien avant leur mise en forme dans (O'Neill, 1966b), avec l'idée de voir ce que l'on peut faire avec des conditions sur les fibres via Hodge-de Rham. Il obtient ainsi des résultats topologiques lorsque les fibres sont des sous-variétés minima.

### C. *Harmoniques versus holomorphe*

A plusieurs reprises Lichnérowicz, typiquement pour la « fibration » de Jacobi ci-dessus où il s'en servit de façon capitale, s'est intéressé aux relations entre applications holomorphes et applications harmoniques. En fait il fut l'un des premiers à réaliser l'importance des applications harmoniques, créées par Eells et Sampson en 1964. Par exemple (Lichnérowicz, 1970) est une étude fine de cette liaison et en particulier étend des résultats connus au cas presque-kählérien. On retrouve encore là son souci d'étendre le plus de choses possibles au cas symplectique.

## Bibliographie

- BERLINE, N., GETZLER, E., & VERGNE, M. (1992). *Heat kernels and Dirac operators*. Springer.
- BESSE, A. (1987). *Einstein manifolds*. Springer.
- BOCHNER, S. (1946). Vector fields and Ricci curvature. *Bulletin of Amer. math. Soc.*, 52, 776-797.
- BOREL, A. (1954). Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups. *Proc. national Acad. Sc.*, 40, 1147-1151.
- BOREL, A., & LICHNÉROWICZ, A. (1952). Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 234, 1835-1837.
- BOURGUIGNON, J.-P. (1993). Eugenio Calabi and Kähler metrics. In P. de Bartolomeis, F. Tricerri, & E. Vesentini (Ed.), *Manifolds and geometry*, (pp. 61-85). Pisa : Cambridge University Press.

- CARTAN, E. (1925). Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. sc. Ecole norm. sup., 42, 17-88.
- HELGASON, S. (1984). *Groups and geometric analysis*. Academic press.
- HODGE, W. (1941). *The theory and applications of harmonic integrals* (second edition 1952). Cambridge University Press.
- KÄHLER, E. (1933). Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrik. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 9, 173-186.
- LAWSON, B., & MICHELSON, L. (1989). *Spin geometry*. Princeton University Press.
- LICHNÉROWICZ, A. (1943). Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. Bull. soc. math. France, 72, 146-168.
- LICHNÉROWICZ, A. (1947). *Algèbre et analyse linéaires*. Masson.
- LICHNÉROWICZ, A. (1949). Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale. Commentarii math. helvetici.
- LICHNÉROWICZ, A. (1950). Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques. In International congress of math., (pp. 216-223). Harvard.
- LICHNÉROWICZ, A. (1953). Espaces homogènes kählériens. In C. R. Acad. Sc. Paris 237, 695-697
- LICHNÉROWICZ, A. (1958). *Géométrie des groupes de transformations*. Dunod.
- LICHNÉROWICZ, A. (1961). Propagateurs et commutateurs en relativité générale. Publications math. IHES, 10, 293-344.
- LICHNÉROWICZ, A. (1963). Spineurs harmoniques. C. R. Acad. Sc. Paris, 257, 7-9.
- LICHNÉROWICZ, A. (1965). Opérateurs différentiels invariants sur les espaces homogènes. Annales scientifiques E. N. S., 81, 341-385.
- LICHNÉROWICZ, A. (1969). Applications harmoniques à valeur dans un tore. C. R. Acad. Sc. Paris, 269, 912-916.
- LICHNÉROWICZ, A. (1970). Application harmoniques et variétés kählériennes. Symposia mathematica, 3, 341-402.
- LICHNÉROWICZ, A. (1971). Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variétés riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative. J. of differential geometry, 6, 47-94.
- LICHNÉROWICZ, A. (1990). Groupes kählériens. C. R. Acad. Sc. Paris, 310, 671-676.
- MEYER, D. (1971). Sur les variétés riemanniennes à opérateur de courbure positif. C. R. Acad. Sc. Paris, 272, 482-485.
- O'NEILL, B. (1966b). The fundamental equations of a submersion. Michigan math. journal, 13, 459-469.
- TRICERRI, F., & VANHECKE, L. (1986). Variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est celui d'un espace symétrique riemannien irréductible. C. R. Acad. Sc. Paris, 302, 233-235.
- WEITZENBÖCK, R. (1923). *Invariantentheorie*. Groningen : Noordhoff.