L'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique

Charles-Michel MARLE

En raison de ses liens étroits avec la mécanique et, plus généralement, la représentation mathématique de l'univers physique, la géométrie symplectique ne pouvait que susciter l'intérêt d'André Lichnérowicz, qui fut à la fois géomètre, mécanicien et physicien. Son œuvre dans ce domaine est vaste et importante ; je vais m'efforcer d'en présenter quelques aspects (ceux que je connais le mieux), sans prétendre à l'exhaustivité.

Les variétés de Poisson

Rappelons qu'une variété symplectique (W, F) est une variété différentiable W, de dimension paire $2n$, munie d'une 2-forme différentielle F fermée ($dF = 0$), partout de rang maximum, c'est-à-dire $2n$. L'application $\mu : TW \to T^*W$, $\mu(X) = -i(X)F$, est un isomorphisme de fibrés vectoriels qui se prolonge aux puissances extérieures, ce qui permet de considérer le champ de 2-tenseurs contravariants antisymétriques $\Lambda = \mu^{-1}(F)$. Pour alléger, nous dirons dans la suite simplement *tenseur* pour *champ de tenseurs contravariants antisymétriques*.

La condition de maximalité imposée au rang de F s'est très vite révélée trop contraignante pour nombre d'applications, notamment à la mécanique. Aussi de nombreux auteurs ont-ils considéré la notion de *variété présymplectique* (variété différentiable W munie d'une 2-forme différentielle F fermée, mais pas nécessairement de rang maximum). Malgré l'ingéniosité des chercheurs qui se sont intéressés à ces objets, les résultats ont été décevants et mal adaptés aux applications envisagées, sauf peut-être dans le cas très particulier où le rang de F est constant. André Lichnérowicz a été, à ma connaissance, le premier à voir clairement qu'une généralisation fructueuse des variétés symplectiques devait utiliser le tenseur contravariant Λ plutôt que la 2-forme F [15]. Il considère un couple (W, Λ), où W est une variété différentiable et Λ un 2-tenseur sur W. Le *crochet de Poisson* de deux fonctions u et $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ est alors défini par $\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv)$, et le *champ de vecteurs hamiltonien* X_u associé à une fonction $u \in N$ est le champ tel que, pour tout $v \in N$, $i(X_{u)}dv = \{u, v\}$. A. Lichnérowicz montre alors que le crochet de Poisson des fonctions vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si le tenseur Λ vérifie la condition $[\Lambda, \Lambda] = 0$ (le crochet figurant dans cette expression étant le crochet de Schouten-Nijenhuis). Lorsque cette condition est vérifiée, l'espace N des fonctions différentiables sur W, avec le crochet de Poisson pour loi de composition, est une algèbre de Lie et l'application $u \mapsto X_u$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. On dit alors que (W, Λ) est une *variété de Poisson*, dont Λ est le *tenseur de Poisson*. Ce dernier pemet de définir un morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*M \to TM$ en posant $\langle \Lambda^\sharp \alpha, \beta \rangle = i(\Lambda)(\alpha \wedge \beta)$, où α et β sont deux éléments de la même fibre de T^*W. Ce morphisme se prolonge aux puissances extérieures. Bien entendu, une variété de Poisson (W, Λ) de dimension paire $2n$ dont le tenseur de Poisson est partout de rang $2n$ est une variété symplectique : le morphisme $\Lambda^\sharp$ est alors un isomorphisme et la 2-forme symplectique est $F = (\Lambda^\sharp)^{-1}(\Lambda)$.

Les variétés de Jacobi

Rappelons qu'une *forme de contact* sur une variété différentiable W de dimension impaire $2n+1$ est une 1-forme différentielle ω telle que $\omega \wedge (d\omega)^n$ soit une forme élément de volume. Avec A. Lichnérowicz, nous dirons alors que (W, ω) est une *variété pfaffienne*. Comme celle d'une variété symplectique, la structure d'une variété pfaffienne peut être définie au moyen d'objets contravariants, au lieu de l'être par un objet covariant (la 1-forme de contact ω) ; mais alors que, pour une variété symplectique, un seul objet contravariant (le tenseur Λ) suffisait, deux objets contravariants sont maintenant nécessaires (correspondant, *grosso modo*, à la 1-forme ω et à sa différentielle extérieure $d\omega$) : un champ de vecteurs E appelé *champ de Reeb* (car il a été considéré pour la première fois par G. Reeb [20]) et un 2-tenseur Λ. A. Lichnérowicz a prouvé que ces deux objets vérifiaient les identités

$$[E, \Lambda] = 0\,, \qquad [\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda\,, \tag{$*$}$$

le crochet figurant dans ces expressions étant le crochet de Schouten-Nijenhuis. Plus généralement, il considère une variété différentiable W munie d'un champ de vecteurs E et d'un 2-tenseur Λ. Il définit le *crochet de Jacobi* $\{u, v\}$ de deux fonctions différentiables u et $v \in N = C^\infty(W, \mathbf{R})$, et associe, à toute fonction différentiable $u \in N$, un champ de vecteurs X_u, dit *champ hamiltonien* associé à u, en posant

$$\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) + \langle u\,dv - v\,du, E\rangle\,, \quad X_u = \Lambda^\sharp(du) + uE\,. \tag{$**$}$$

A. Lichnérowicz montre que le crochet de Jacobi vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si E et Λ vérifient les identités $(*)$. Lorsque c'est le cas, (W, Λ, E) est une *variété de Jacobi* [16] ; l'espace N des fonctions différentiables sur W, muni du crochet de Jacobi, est une algèbre de Lie et l'application $u \mapsto X_u$ un homomorphisme d'algèbres de Lie. Lorsque W est de dimension impaire $2n+1$ et que le tenseur $E \wedge \Lambda^n$ ne s'annule en aucun point, la variété W est en fait une variété pfaffienne, dont la 1-forme de contact ω peut être exprimée au moyen de E et de Λ. Par ailleurs, une variété de Jacobi dont le champ de Reeb est identiquement nul est une variété de Poisson. Les variétés de Jacobi généralisent donc à la fois les variétés symplectiques, les variétés pfaffiennes et les variétés de Poisson. L'introduction des *variétés conformes de Jacobi* permet à A. Lichnérowicz d'inclure également les variétés de contact (dont la structure est définie par la donnée d'un sous-fibré de rang 1 du fibré cotangent localement engendré, au voisinage de chaque point, par une 1-forme de contact) et les variétés localement conformément symplectiques.

Géométries de Poisson et de Jacobi

L'importance des variétés de Poisson a été rapidement reconnue, notamment par A. Weinstein qui en a étudié les propriétés locales [23]. Signalons aussi d'autres travaux qui ont permis une vision nouvelle des variétés de Jacobi. Une *algèbre de Lie locale* sur une variété différentiable W est un fibré vectoriel (V, π, W) de base W, dont l'espace des sections différentiables est muni d'une loi de composition $(s_1, s_2) \mapsto \{s_1, s_2\}$ qui en fait une algèbre de Lie, cette loi de composition étant locale (le support de $\{s_1, s_2\}$ est contenu dans l'intersection des supports de s_1 et de s_2). Cette notion, introduite par Shiga, a été étudiée par A. Kirillov dans le cas où la dimension des fibres de V est 1 [12]. Elle s'est révélée équivalente à celle de variété conforme de Jacobi. Lorsque $R = W \times \mathbf{R}$ et que $\pi : V \to W$ est la première projection, l'espace des sections différentiales du fibré $(W \times \mathbf{R}, \pi, W)$ s'identifie à l'espace $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ des fonctions différentiables sur W. La donnée d'une loi de composition sur cet espace équivaut à celle d'une loi de composition sur N. Lorsque cette loi est locale et satisfait l'identité de Jacobi, A. Kirillov a montré qu'il existe sur W un tenseur Λ et un champ de vecteurs E tels que, pour tout couple (u, v) de fonctions différentiables sur W, le crochet $\{u, v\}$ soit donné par la première formule $(**)$ ci-dessus. Bien entendu, puisque ce crochet vérifie l'identité de Jacobi, Λ et E vérifient les identités $(*)$. En d'autres termes, (W, Λ, E) est une variété de Jacobi.

Avec F. Guédira, A. Lichnérowicz a effectué une étude approfondie des algèbres de Lie locales et de leurs relations avec les variétés de Poisson [10] ; ils ont notamment montré que l'espace total V d'un fibré de Jacobi (V, π, W) dont les fibres sont de dimension 1 est canoniquement muni d'une structure de Poisson homogène, le crochet de Poisson de deux fonctions homogènes sur V correspondant au crochet des deux sections qui leur sont canoniquement associées.

Soit (W, Λ, E) une variété de Jacobi. Le champ de directions engendré par le champ de vecteurs E et par l'image du morphisme $\Lambda^\sharp$ est appelé *champ caractéristique*. Ce n'est en général pas un sous-fibré vectoriel de TW (son rang n'est pas nécessairement constant). Cependant, A. Kirillov a prouvé que ce champ de directions est, en un sens généralisé, complètement intégrable et définit un *feuilletage de Stefan* de W, c'est-à-dire une partition de W en sous-variétés immergées connexes maximales, appelées *feuilles*, dont l'espace tangent, en chaque point, est la valeur en ce point du champ caractéristique. Les feuilles ne sont pas nécessairement toutes de même dimension ; celles de dimension paire sont des variétés symplectiques et celles de dimension impaire des variétés pfaffiennes. Lorsque la variété de Jacobi considérée est en fait une variété de Poisson (W, Λ), les feuilles, toutes de dimension paire, sont appelées *feuilles symplectiques*. Ce résultat met en évidence le fait que les singularités du couple (Λ, E), c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du champ caractéristique n'est pas constant, s'organisent en sous-variétés immergées et sont donc beaucoup plus simples que les singularités du rang et de la classe d'une forme de Pfaff ; de même, pour une variété de Poisson (W, Λ), les singularités du tenseur de Poisson Λ (c'est-à-dire les points au voisinage desquels le rang du morphisme $\Lambda^\sharp$ n'est pas constant) sont beaucoup plus sympathiques que les singularités des formes présymplectiques. C'est peut-être pour cette raison que les variétés de Poisson sont beaucoup mieux adaptées aux applications à la mécanique et à la physique que les variétés présymplectiques.

La cohomologie de Poisson-Lichnérowicz

Soit (W, Λ) une variété de Poisson. Dès sa première publication sur les variétés de Poisson [15], A. Lichnérowicz a remarqué que l'opérateur ∂_Λ, qui associe à tout p-tenseur P le $(p+1)$-tenseur $\partial_\Lambda P = [\Lambda, P]$ (ce crochet étant le crochet de Schouten-Nijenhuis) est de carré nul, donc permet de définir une cohomologie sur W (en utilisant comme p-cochaînes les p-tenseurs contravariants antisymétriques). Cette cohomologie, communément appelée *cohomologie de Poisson*, mais qu'il serait plus judicieux d'appeler *cohomologie de Poisson-Lichnérowicz*, est en général compliquée, car elle reflète certaines propriétés topologiques de la variété W et du feuilletage de Stefan formé par ses feuilles symplectiques. A. Lichnérowicz en a commencé l'étude, actuellement très activement poursuivie par de nombreux chercheurs (voir par exemple les ouvrages récents [4] et [21]). Il a notamment montré que le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*W \to TW$, prolongé aux puissances extérieures, est tel que, pour toute p-forme différentielle η sur W, $\Lambda^\sharp(d\eta) = \partial_\Lambda(\Lambda^\sharp\eta)$. Par suite, $\Lambda^\sharp$ détermine un homomorphisme de la cohomologie de De Rham dans la cohomologie de Poisson-Lichnérowicz. Lorsque la variété de Poisson considérée est en fait une variété symplectique, cet homomorphisme est un isomorphisme.

Signalons encore une importante propriété des variétés de Poisson, bien que sa découverte (faite indépendamment par plusieurs auteurs, dont B. Fuchssteiner, F. Magri et C. Morosi, A. Weinstein, P. Dazord) ne soit pas attribuable à André Lichnérowicz : le fibré cotangent T^*W à une variété de Poisson (W, Λ) possède une structure d'algébroïde de Lie ayant pour ancre le morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\sharp : T^*W \to TW$. Cela signifie qu'il existe, sur l'espace des sections différentiables de ce fibré (c'est-à-dire sur l'espace des 1-formes différentielles sur W), une loi de composition (notée $(\zeta, \eta) \mapsto [\zeta, \eta]$), qui en fait une algèbre de Lie, vérifiant, pour tout couple (ζ, η) de 1-formes différentielles et toute fonction différentiable f sur W,

$$\Lambda^\sharp[\zeta, \eta] = [\Lambda^\sharp\zeta, \Lambda^\sharp\eta]\,, \quad [\zeta, f\eta] = \big(\mathcal{L}(\Lambda^\sharp\zeta)f\big)\eta + f[\zeta, \eta]\,.$$

Le crochet de deux 1-formes exactes du et dv est lié au crochet de Poisson $\{u, v\}$ par la relation $[du, dv] = d\{u, v\}$.

J.-L. Koszul a prouvé que le crochet des 1-formes différentielles sur une variété de Poisson (W, Λ) se prolonge en une loi de composition sur l'espace vectoriel gradué des formes différentielles de tous degrés, faisant de cet espace une algèbre de Lie graduée [13]. Le morphisme $\Lambda^\sharp$, prolongé aux puissances extérieures, est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées (l'espace vectoriel gradué des tenseurs contravariants antisymétriques étant muni du crochet de Schouten-Nijenhuis pour loi de composition).

Certaines de ces propriétés ont depuis été étendues aux algébroïdes de Lie généraux, qui apparaissent étroitement liés aux variétés de Poisson. Ainsi par exemple, l'espace total du fibré dual d'un algébroïde de Lie possède une structure de Poisson homogène canonique. Ainsi, l'importance des variétés de Poisson se confirme !

Déformations de l'algèbre des fonctions sur une variété

Avec M. Flato (malheureusement décédé quelques semaines avant lui), D. Sternheimer, F. Bayen et C. Fronsdal, A. Lichnérowicz a appliqué la théorie des déformations de structures algébriques (initiée par M. Gerstenhaber [9]) aux structures d'algèbre associative et d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions sur une variété symplectique (ou de contact) [1,2,7,8,17]. Indiquons brièvement le point de départ de ces travaux, en considérant, par exemple, l'espace $N = C^\infty(W, \mathbf{R})$ des fonctions sur une variété de Poisson (W, Λ). Soit $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ une application bilinéaire de $N \times N$ dans l'espace $E(N, \nu)$ des séries formelles en un paramètre ν et à coefficients dans N, de la forme $u *_\nu v = uv + \sum_{r=1}^\infty \nu^r C_r(u, v)$. Les $C_r : N \times N \to N$ sont des applications bilinéaires appelées *cochaînes*. On dit que $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ est une *déformation formelle* de la structure d'algèbre associative de N (en abrégé, un $*_\nu$*-produit*) si la propriété d'associativité $(u *_\nu v) *_\nu w = u *_\nu (v *_\nu w)$ est formellement vérifiée. Deux déformations formelles, notées $(u, v) \mapsto u *_\nu v$ et $(u, v) \mapsto u *'_\nu v$, sont dites *équivalentes* s'il existe un endomorphisme formel $T_\nu = \mathrm{id}_N + \sum_{s=1}^\infty \nu^s T_s$, où les T_s sont des endomorphismes linéaires de N, tel que l'on ait formellement $T_\nu(u *'_\nu v) = (T_\nu u) *_\nu (T_\nu v)$.

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont immédiatement vu qu'il convenait de choisir $C_1(u, v) = \{u, v\}$, crochet de Poisson. Ils ont montré que lorsqu'on cherche à déterminer successivement les cochaînes C_r pour $r = 2, 3, \ldots$, on rencontre, à chaque ordre du développement en série formelle, une obstruction représentée par un élément du troisième espace d'une cohomologie (la *cohomologie de Hochschild*) dont les p-cochaînes sont les applications p-multilinéaires de N^p dans N. La nullité de cette classe est la condition nécessaire et suffisante pour que le développement en série formelle puisse être poussé à l'ordre immédiatement supérieur. De même, l'étude de l'équivalence de deux déformations de la structure d'algèbre associative de N fait apparaître, à chaque ordre, une obstruction représentée par un élément du deuxième espace de cohomologie de Hochschild.

De manière analogue, on peut définir et étudier les déformations formelles de la structure d'algèbre de Lie de N, le rôle précédemment joué par l'identité exprimant l'associativité étant joué par l'identité de Jacobi. Les obstructions sont alors des classes d'une autre cohomologie, la *cohomologie de Chevalley*, dont les p-cochaînes sont les applications p-multilinéaires alternées de N^p dans N. De toute déformation formelle de la structure d'algèbre associative de N on peut déduire, par antisymétrisation, une déformation formelle de sa structure d'algèbre de Lie.

A. Lichnérowicz et ses collaborateurs ont montré que les déformations formelles de l'algèbre associative N des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) offrent une *méthode de quantification* des systèmes hamiltoniens classiques, autre que la méthode basée sur la quantification géométrique de B. Kostant et J.-M. Souriau.

Depuis les travaux d'H. Weyl (1931) et J. Moyal (1949), on connaît un exemple de déformation non triviale de l'algèbre associative des fonctions différentiables sur $\mathbf{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique canonique, appelé *crochet de Moyal-Weyl*. De nombreux chercheurs ont étudié l'existence de déformations formelles des structures d'algèbre associative ou d'algèbre de Lie de l'espace des fonctions différentiables sur une variété symplectique (ou de Poisson) générale. Les premiers résultats sont dus à J. Vey pour la structure d'algèbre de Lie [22], O. Neroslavsky et A. Vlassov pour la structure associative [18], sous une hypothèse topologique (nullité du troisième nombre de Betti). Cette hypothèse a été levée d'abord par M. Cahen et S. Gutt dans le cas d'un fibré cotangent [3], puis par M. De Wilde et P. Lecomte dans le cas d'une variété symplectique quelconque [5]. Des preuves plus simple de ce théorème d'existence ont été données ensuite par plusieurs auteurs, notamment Karasev et Maslov [11], Omori, Maeda et Yoshioka [19], Fedosov [6]. Récemment, M. Kontsevich a obtenu, comme conséquence d'une conjecture (qu'il avait formulée en 1993 et prouvée en 1997), un résultat très profond : sur toute variété différentiable, il y a équivalence entre les classes de déformations formelles de l'algèbre associative des fonctions différentiables et les classes de déformations formelles de la structure de Poisson nulle [14].

En guise de conclusion

Faute de place, j'ai dû renoncer à présenter bien d'autres aspects de l'œuvre d'André Lichnérowicz en géométrie symplectique qui mériteraient une description détaillée : étude des algèbres de Lie associées aux variétés symplectiques, de contact, de Poisson, de Jacobi ; géométrie des transformations canoniques ; espaces homogènes de contact ; ...

J'ai eu le privilège d'être élève d'André Lichnérowicz, et j'ai la plus grande admiration tant pour ses qualités humaines que pour son œuvre scientifique. Lorsque, dans les années 60, je suivais ses cours au Collège de France, j'admirais son exceptionnelle virtuosité calculatoire et le parfait agencement des démonstrations difficiles, qu'il exposait toujours de manière complète. Avec plus de recul, je me rends compte que plus admirable encore est la profondeur de sa vue, qui lui a permis de dégager des concepts clefs des mathématiques d'aujourd'hui et de demain.

Références

1. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Quantum mechanics as a deformation of classical mechanics, *Letters in Math. Phys.*, 1977, **1**, 521–530.
2. F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, I : deformation of symplectic structures, and II : physical applications, *Annals of Physics*, 1978, **3**, 61–110 and 111-152.
3. M. Cahen and S. Gutt, Regular star-representations of Lie algebras, *Letters in Math. Phys.*, 1982, **6**, 395–404.
4. A. Cannas da Silva and A. Weinstein, *Geometric Models for Noncommutative Algebras*, Berkeley mathematics lecture notes Vol. 10, American Mathematical Society, 1999.

5. M. De Wilde and P. Lecomte, Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds, *Letters in Math. Phys.*, 1983, **7**, 487–496.
6. B. Fedosov, A simple geometrical construction of deformation quantization, *J. Differential Geometry* (1994), **40**, 213–238.
7. M. Flato, A. Lichnérowicz and D. Sternheimer, Deformations of Poisson brackets, Dirac brackets and applications, *J. Math. Phys.*, 1976, **9**, 1754–1762.
8. M. Flato, A. Lichnérowicz et D. Sternheimer, Crochet de Moyal-Vey et quantification, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1976, **283**, A, 19–24.
9. M. Gerstenhaber, Deformation theory of algebraic structures, *Ann. of Math.*, 1964, **79**, 59–90.
10. F. Guédira et A. Lichnérowicz, Géométrie des algèbres de Lie de Kirillov, *J. Math pures et appl.*, 1984, **63**, 407–484.
11. M. Karasev and V. Maslov, *Nonlinear Poisson Brackets : geometry and quantization*, Translations of Mathematical Monographs 119, American Mathematical Society, Providence, 1993.
12. A. Kirillov, Local Lie algebras, *Russsian Math. Surveys*, 1976, **31**, 4, 55–75.
13. J.-L. Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, dans *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque hors série, Société Mathématique de France, 1985, 257–271.
14. M. Kontsevich, Deformation quantization of Poisson manifolds, I, preprint (1997), q-alg/9709040.
15. A. Lichnérowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Differential geometry*, 1977, **12**, 253–300.
16. A. Lichnérowicz, Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées, *J. Math. pures et appl.*, 1978, **57**, 453–488.
17. A. Lichnérowicz, Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les $*_\nu$-produits), *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1982, **32**, 157–209.
18. O. M. Neroslavsky et A. T. Vlassov, Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1981, **292**, 71.
19. H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, *Advances in Math.* (1991) **85**, 224–255.
20. G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, *Mém. Acad. Roy. Belgique, Sci.*, 1952, **27**, 130–194.
21. I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics vol. 118, Birkhäuser, Basel, 1994.
22. J. Vey, Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique, *Comment. Math. Helvetici*, 1975, **50**, 421–454.
23. A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential geometry*, 1983, **18**, 523–557.