LE MONSTRE AU CLAIR DE LUNE
SUR LES TRAVAUX DE R. BORCHERDS

Urmie RAY
Université de Strasbourg

Une des quatre prestigieuses médailles Fields a été décernée en 1988 à Richard E. Borcherds pour ses travaux en « algèbre et géométrie, en particulier pour sa démonstration de la conjecture dite de Moonshine ». Mathématicien britannique d'une extraordinaire originalité, il est Professeur de la Royal Society à l'université de Cambridge depuis 1996, où il a fait ses études, Fellow de la Royal Society, et Professeur à l'université de Berkeley depuis 1993. Il a ouvert le nouveau domaine des algèbres de vertex et en a déduit la construction des algèbres de Kac-Moody généralisées, appelées également algèbres de Borcherds. La portée de ces idées, basées entre autres sur une application remarquable de concepts de la théorie des cordes (de la physique théorique), est montrée par sa démonstration très élégante de la conjecture Moonshine (i.e. « clair de lune ») de Conway et Norton. Cette conjecture révèle la surprenante connexion entre deux domaines très différents (d'où le nom « Moonshine »), celle des groupes simples sporadiques, en particulier du Monstre, et celle des fonctions modulaires elliptiques.

Avant d'énoncer cette conjecture, il est nécessaire de donner un aperçu du « Monstre », des groupes finis simples, des représentations des groupes et des fonctions modulaires elliptiques.

Le *Monstre* [C], appelé aussi « Géant Amical » est le groupe fini simple sporadique le plus grand avec

$$2^{46}.3^{20}.5^{9}.7^{6}.11^{2}.13^{3}.17.19.23.29.31.41.47.59.71$$

(environ 8×10^{53}) éléments, ce qui représente à peu près le nombre d'atomes composant la Terre. Un *groupe* est un ensemble d'éléments avec une loi de composition satisfaisant certains axiomes et peut décrire les symétries d'une structure géométique [Bu]. Il est aisé d'imaginer les rotations d'un cube en dimension 3 et de conclure que son groupe de rotations a 24 éléments. Borcherds a travaillé sur les rotations d'un flocon de neige théorique dans un espace de dimension 196884. En effet le Monstre est le groupe d'automorphismes d'un algèbre dans un espace Euclidien de cette dimension.

Richard E. Borcherds

Les groupes finis simples[1] [G] sont en quelque sorte les briques de base avec lesquelles sont bâtis les groupes finis. Il est donc naturel d'étudier les groupes finis simples. Dans les années 70, plusieurs mathématiciens, dont J.H. Conway et J.G. Thompson, médaille Fields en 68, ont contribué à leur classification, œuvre de quelques milliers de pages. Il y a trois familles infinies de groupes finis simples (par exemple, celle des groupes cycliques d'ordre premier ($G = \{1, x, ..., x^{p-1}\}$ où p est premier et $x^p = 1$)), et 26 groupes finis simples qui ne font partie d'aucune famille. Ces 26 groupes sont par conséquent appelés *sporadiques.*

C'est via leurs représentations [S2] que les groupes sont utiles dans plusieurs autres domaines mathématiques et scientifiques. Revenons à notre groupe G des rotations du cube en dimension 3. Il existe un homomorphisme ρ de G (i.e. pour tout $g, h \in G$, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$) au groupe $GL(V)$ de toutes les applications linéaires bijectives d'un espace vectoriel V de dimension 3 (sur le corps des nombres complexes).[2] Pour tout $g \in G$, la trace de $\rho(g)$ est invariante de la base choisie pour écrire la matrice $\rho(g)$. Une représentation est complètement déterminée par la donnée des traces de $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. Tout groupe a une représentation triviale de dimension 1 donnée par $\rho(g)v = v$ pour tout $g \in G$, où $V = \mathbf{C}v$.

Il nous reste à donner une idée des fonctions modulaires elliptiques [S3], étroitement liées aux fonctions elliptiques. Un des exemples les plus communs, l'*invariant modulaire* j, est une fonction holomorphe (i.e.

[1] Un groupe G est simple si tout sous-groupe $H \leq G$ tel que $\forall g \in G$, $h \in H$, $g^{-1}hg \in H$, satisfait à $H = 1$ ou $H = G$. Donc pour tout groupe fini G, il existe des sous-groupes G_i $0 \leq i \leq n$ tel que $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = 1$ et $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ est simple pour tout i.

[2] Une représentation ρ d'un groupe G quelconque est un homomorphisme de G dans $GL(V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension n. On identifie $GL(V)$ avec le groupe des matrices carrées d'ordre $n$avec déterminant non nul.

analytique complexe) sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{x+iy \in \mathbf{C} | y > 0\}$ invariante sous l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbf{Z})$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ telles que $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ et $ad - bc = 1$:

$$j(z) = j(\frac{az+b}{cz+d}) \quad \text{pour tout} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

En particulier $j(z+1) = j(z)$, $z \in \mathcal{H}$ puisque $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$. On peut donc écrire j comme une fonction de $q = e^{2\pi i z}$ et j est holomorphe dans le disque $|q| < 1$ moins l'origine. A l'origine j a un pôle (i.e. il existe un entier $m > 0$ tel que $\lim_{q \to 0} q^m j(q) \in \mathbf{C} - \{0\}$) et donc a une série de Laurent à l'origine : $j(q) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n q^n$. L'expression exacte de j est :

$$j(q) = \frac{(1 + 240 \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n)^3}{q \prod_{n>0} (1-q^n)^{24}} \quad \text{où} \quad \sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

On trouve

$$j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + \dots .$$

De plus j est une bijection du quotient $\mathcal{H}/PSL_2(\mathbf{Z})$ (espace où $z_1 = z_2$ si $j(z_1) = j(z_2)$) dans $\mathbf{C}$, et donc de la surface compacte de Riemann $\overline{\mathcal{H}/PSL_2(\mathbf{Z})}$ à la sphère $\mathbf{C} \cup \infty$.

En général une *fonction modulaire elliptique* f est méromorphe sur $\mathcal{H}$ (holomorphe partout sauf en un nombre fini de points, où f a des pôles) invariante sous l'action de sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbf{R})$ contenant la transformation $z \mapsto z+1$, $z \in \mathcal{H}$. La fonction f peut alors être écrite en termes de q, et par définition des fonctions modulaires, f a un pôle à l'origine, et donc une série de Laurent au voisinage de 0. Si la série de la fonction f est du genre $q^{-1} + a_1 q + a_2 q^2 + \dots$, f est dite *normalisée*. Et si f donne une bijection de $\overline{\mathcal{H}/G}$ avec la sphère $\mathbf{C} \cup \infty$, on dit que G est dite de *genre 0*.

Nous sommes maintenant prêts à donner la conjecture Moonshine. La plus petite représentation V_1 non-triviale du Monstre est de dimension 196883. McKay avait remarqué que l'invariant modulaire j a un coefficient égal à $196883 + 1$, donc à la dimension d'une représentation du Monstre M : $V_1 \oplus V$, où V est la représentation triviale de dimension 1. Puis Thompson a montré que chaque coefficient de $j - 744$ est la dimension d'une représentation V_n du Monstre. Notons que la dimension de V_n est la trace de l'identité du Monstre sur V_n. Que peut-on dire de la trace des autres éléments g du Monstre sur les représentations V_n ? S'appuyant entres autres sur des calculs pour n petit, Conway et Norton ont conjecturé en 1979 que [CN] :

Conjecture Moonshine. *Pour tout élément g du groupe Monstre,*

$$T_g = q^{-1} + \mathrm{trace}(g|V_1)q + \mathrm{trace}(g|V_2)q^2 + \dots$$

est une fonction modulaire elliptique normalisée pour un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{R})$ de genre 0.

Parlons maintenant brièvement des algèbres de vertex et des formules du dénominateur des algèbres de Borcherds qui jouent un rôle crucial dans la démonstration donnée par Borcherds de cette conjecture [Bo1],[Bo2].

La définition des algèbres de vertex est motivée par la construction des algèbres de Lie simples de dimension finie à partir de leur réseau de racines. Les *algèbres de Lie simples* classiques sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre des $n \times n$-matrices, l'opération de Lie $[.,.]$ étant définie par $[A, B] = AB - BA$ [S1]. Prenons par exemple L'algèbre sl_2 de dimension 3 des 2×2 matrices de trace 0, ayant pour base $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = [e, f] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors $[h, e] = 2e$ et $[h, f] = -2f$. Donc sl_2 est la somme directe des espaces propres de l'application linéaire $\mathrm{ad}(h)$ définie par $\mathrm{ad}(h)(x) = [h, x]$. Les valeurs propres appartiennent au dual[3] H^* de l'espace vectoriel $H = \mathbf{C}h$ (H est appelée *sous-algèbre de Cartan* de sl_2). Toute valeur propre non nulle est appelée *racine* de sl_2 (il s'agit de $\pm\alpha \in H^*$ avec $\alpha(h) = 2$). Il existe un forme bilinéaire symétrique sur le réseau de racines R (groupe abélien engendré par α), isomorphe à $\mathbf{Z}$. Les racines de sl_2 sont les éléments de R de norme 2. Soit $\hat{R}$ une extension centrale de R par un groupe d'ordre 2. Pour α (resp. $-\alpha$), notons e^α (resp. $e^{-\alpha}$) un élément fixe de $\hat{R}$ correspondant à α (resp. $-\alpha$). Alors sl_2 peut être défini comme le $\mathbf{Z}$-module $R \oplus \sum_{\alpha^2=2} e^\alpha$. Toute algèbre de Lie simple L de dimension finie a une décomposition comme ci-dessus par rapport à une sous-algèbre de Cartan, et on peut redéfinir L de manière analogue. Cette construction donne une base explicite (la base de Tits-Chevalley) pour L.

En 1967, Kac et Moody ont indépendamment défini une nouvelle classe d'algèbres de Lie [K], connues aujourd'hui sous le nom d'algèbres de Kac-Moody qui inclut les algèbres de Lie simples de dimension finie et les algèbres affines (algèbres ayant multiples applications en physique et mathématique). Les *algèbres de Kac-Moody* ont aussi un réseau de racines et une décomposition analogue à sl_2. Une *algèbre de vertex* V généralise la construction ci-dessus pour les algèbres de Kac-Moody. C'est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{R}$ identifiable à l'espace de Fock des physiciens qui est défini à partir du réseau de racines d'une algèbre de Kac-Moody,

[3]Le dual d'un'espace vectoriel complexe V est l'espace vectoriel des fonctions linéaires de V dans $\mathbf{C}$.

avec un nombre infini de produits bilinéaires. Il peut être considéré en quelque sorte comme un anneau commutatif avec une action formelle du groupe $\mathbf{C}$, où l'action de $z \in \mathbf{C}$ sur $a \in V$ est l'opérateur $a(z)$, et $a(z)b$ est donné par le produit de $a(z)$ avec b. Borcherds montre que, pour certaines algèbres de vertex V, un certain sous-quotient de V est une algèbre de Lie généralisant le concept d'algèbre de Kac-Moody. Ce sont les algèbres aujourd'hui appelées *algèbres de Borcherds* qui ont aussi un réseau de racines et une décomposition comme pour sl_2. En particulier, il construit l'algèbre de Lie dite du Monstre : $G = \mathbf{R^2} \oplus_{m,n \in \mathbf{Z}} G_{(m,n)}$, où $\mathbf{R^2}$ est la sous-algèbre de Cartan et le réseau de racines est $\mathbf{Z^2}$. L'espace radiciel $G_{(m,n)}$ (espace propre de $\mathbf{R}^2$ correspondant à la racine (m,n)) est une représentation du Monstre isomorphe à V_{mn}.

D'autre part, il existe une classe importante de représentations pour les algèbres de Borcherds qui généralisent la notion de représentations de dimension finie pour les algèbres simples de dimension finie. Il s'agit des représentations de plus haut poids (en général de dimension infinie), qui sont une somme directe d'espaces propres de dimension finie de la sous-algèbre de Cartan. Il existe une formule, démontrée par Borcherds, donnant la dimension de ces espaces pour certaines représentations irréductibles et généralisant la formule de Kac-Weyl. En calculant cette formule de deux façons différentes, on trouve de nouvelles formules intéressantes de fonctions modulaires ou on redécouvre d'anciennes formules. Par exemple, via la représentation triviale, on arrive à la formule du dénominateur dont le terme de gauche est un produit infini et le terme de droite est une série infinie. La formule du dénominateur caractérise les algèbres de Borcherds. Pour l'algèbre du Monstre G, Borcherds a montré qu'elle est :

$$p^{-1} \prod_{m>0, n \in \mathbf{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(mn)} = j(p) - j(q),$$

donnant ainsi la formule maintenant célèbre pour l'invariant modulaire j.

Plus récemment Borcherds a prouvé que les formules du dénominateur des algèbres de Borcherds correspondent à des formes automorphes pour un groupe orthogonal $O_{s+2,2}(\mathbf{R})^+$, où $s+2$ est la dimension de la sous-algèbre de Cartan [Bo3] et il a fait un travail remarquable sur les formes automorphes et aussi les surfaces $K3$ (lié aux formes automorphes). Il a ainsi ouvert plusieurs directions de recherches extrêmement intéressantes.

Références

[Bo1] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol. 83, 3068–3071, 1986

[Bo2] R.E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. math.*, Vol. 109, 405–444, 1992

[Bo3] R.E. Borcherds, Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbf{R})^+$ and generalized Kac-Moody algebras, *ICM* 1994

[Bu] W. Burnside, The Theory of Groups of Finite Order, C.U.P., Cambridge, 1911

[C] J.H. Conway, A simple construction of the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.*, Vol. 79, 513–540, 1985

[CN] J.H. Conway, S.P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 11, 308–339, 1979

[G] D. Gorenstein, Finite simple groups, An introduction to their classification, The University Series in Mathematics, New York - London : Plenum Press.

[K] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Third ed., C.U.P., Cambridge 1990

[S1] J-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, W.A. Benjamin, Inc, New-York, 1966

[S2] J-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967

[S3] J-P. Serre, Cours d'Arithmétique, P.U.F., Paris, 1970