

## HENRI DULAC 1870 – 1955

Robert MOUSSU

Ces quelques lignes sur la vie et l'oeuvre de Dulac empruntent beaucoup à la notice nécrologique présentée par Gaston Julia à la séance de l'académie des Sciences du 26 septembre 1995. Ses extraits sont en italiques.

*“Il était né le 3 octobre 1870. A sa sortie de l'Ecole polytechnique, en 1892, il s'oriente vers l'enseignement des Mathématiques. Agrégé en 1895, il fait un court voyage à l'étranger, puis, en même temps qu'il s'acquitte en toute conscience de ses lourdes fonctions de professeur aux lycées de Châteauroux, de Nantes et de Poitiers, il compose sur l'un des sujets qui vont fixer l'attention de toutes sa vie, un premier travail qu'il présente comme thèse en 1903. Toute sa carrière dans l'enseignement supérieur va se dérouler à Grenoble, à Alger, enfin à Lyon, où il demeurera 28 ans, dans la chaire de Mathématiques pures, jusqu'à sa retraite”.*

*“Lorsque Henri Dulac s'oriente vers la recherche, l'étude des points singuliers des intégrales des équations différentielles vient de marquer d'éclatants succès. Les noms de Briot et Bouquet, d'Henri Poincaré, d'Emile Picard, de Paul Painlevé, marquent les principales tendances qui se sont révélées dans cette étude.*

*Il nous reste à faire une étude approfondie de ces singularités, car les possibilités déjà révélées ne sont que les premières étapes d'une classification qui reste à faire et qui est indispensable pour établir une théorie bien ordonnée et cohérente; elle va faire l'objet d'efforts soutenus, où l'invention, la pénétration et aussi la persévérance d'Henri Dulac porteront de beaux fruits”.*

Dans “ses premiers travaux, rapprochant les vues de Briot et Bouquet et de Poincaré”, il étudie les points singuliers d'équations différentielles ordinaires holomorphes en dimension deux. Il obtient des résultats fondamentaux et très originaux sur l'existence de solutions singulières et sur l'existence d'intégrales générales. Son approche de ces problèmes représente un travail de pionnier. Ce n'est qu'un bon demi-siècle plus tard, que l'on a vraiment compris son importance. Il avait en effet déjà résolu partiellement un bon nombre de questions modernes : existence de séparatrices, existence d'intégrales premières holomorphes ou multiformes, classification des singularités dicritiques, existence et convergence de formes normales. Ses démonstrations reposent sur des arguments très géométriques dont on a redécouvert l'efficacité au début des années 70 : polygone de Newton, éclatements, monodromie des séparatrices...

Après la grande guerre, il applique ses résultats, ses méthodes à l'étude de

l'application retour d'un polycycle d'un champs analytique réel en dimension 2. Il s'agit essentiellement de prouver qu'une telle application a un nombre fini de points fixes; c'est-à-dire qu'il n'y a pas accumulation de cycles limites sur le polycycle "On sait l'importance des cycles limites, mais on sait fort peu de chose, hors leur existence possible, sur leur détermination précise et même sur la limitation de leur nombre. Or Poincaré avait énoncé un théorème très remarquable : "Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col", et Ivan Bendixson, dont on connaît les beaux travaux sur les points singuliers des équations différentielles, a longtemps cherché sans succès à montrer que la dernière restriction est inutile en particulier que : "Toute équation  $Xdx + Ydy = 0$ , où  $X$  et  $Y$  sont des polynômes, ne peut avoir qu'un nombre fini de cycles limites". Avec une profondeur, une ténacité, une ingéniosité de moyens qu'il faut admirer, Henri Dulac, après une longue recherche, a réussi à démontrer ce théorème". Malheureusement, cette démonstration considérée comme correcte pendant plus d'un siècle est incomplète. C'est en précisant la méthode de Dulac avec les fonctions multisommables, la résurgence, les cocycles de quasi-fonctions que J. Ecalle et J. Il'Yashenko ont finalement prouvé le théorème de finitude à la fin des années 80.

*"Dans un domaine de recherches qui paraissait inextricable, et d'une complication sans issue, Henri Dulac a apporté des principes de classification d'une grande netteté, ... Cette étude lui a révélé beaucoup de faits insoupçonnés. S'attaquant à des questions d'une grande difficulté, ..., il a réussi à y faire oeuvre originale et féconde. Ce savant de grand mérite, a montré au cours d'une carrière bien remplie les plus belles qualités morales... professionnelles : dévouement total, bienveillance jamais lassée, compétence indiscutée". Il "va d'un air simple à la vérité qu'il aime : la vérité lui sourit et quitte volontiers sa retraite pour se laisser produire au grand jour par un homme aussi modeste".*