[redacted]

importantes : mesure de Lebesgue et mesures de Radon, analyse spectrale

[redacted]

les étudiants sont censés savoir dans ce domaine en arrivant à l'Université *(ou en Math. sup.).*

Squares

A.R. Rajwade

Cambridge University Press, 1993.

Le problème d'écrire un nombre entier comme somme de n carrés a été résolu par Fermat pour $n = 2$ et par Lagrange pour $n = 4$. Il peut s'étendre à d'autres anneaux, notamment les anneaux de polynômes ou de séries formelles. Ce livre fait le point sur l'état du problème dans les différentes structures où il se pose.

Cohen-Macaulay Rings

Winfried Bruns, Jürgen Herzog

Cambridge University Press, 1993.

La notion d'anneau de Cohen-Macaulay est au carrefour de deux importantes directions de recherche actuelles en algèbre commutative. Le développement principal reste la théorie homologique des anneaux commutatifs, mais il y a maintenant des applications surprenantes en combinatoire algébrique. Ce livre de haut niveau fait le point sur ces sujets.

COMPTES RENDUS

An introduction to harmonic analysis on semisimple Lie groups

V.S. Varadarajan

Cambridge studies in advanced mathematics 16. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Ce livre, comme son titre l'indique, se veut une introduction à l'analyse harmonique sur les groupes de Lie semisimples. L'auteur présente certains aspects de la théorie, en les illustrant par l'exemple de $SL(2, R)$; il rend compte essentiellement des travaux de Harish-Chandra.

L'objectif principal de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie est de décomposer l'espace $L^2(G)$, d'un groupe de Lie G, en "somme" de représentations unitaires irréductibles de G (formule de Plancherel) ou, ce qui est équivalent, d'écrire la mesure de Dirac de support l'élément neutre comme une "somme" de caractères de représentations de G (formule d'inversion de Fourier). Cette théorie a des origines diverses, mais elle prend sa source essentiellement dans la théorie classique des séries de Fourier et la théorie des représentations des groupes finis; le mérite revient à Peter et Weyl, par leurs travaux sur les groupes compacts, d'unifier ces deux théories dans les années 20. Puis il a fallu attendre les travaux de Haar sur la mesure qui porte son nom dans les années 30 et les travaux de Von Neumann sur les algèbres d'opérateurs, pour qu'une théorie des représentations des groupes localement compacts non commutatifs soit développée; notamment, a été établie l'existence d'une formule de Plancherel pour une large classe de groupes dits de type I. On s'est alors posé le problème de décrire explicitement cette formule pour les groupes de Lie en termes de leur géométrie.

Dans cette théorie, les groupes semisimples occupent une place privilégiée de par la finesse des résultats obtenus et la similitude des méthodes utilisées avec celles de la théorie des groupes p-adiques ou finis. Les premiers exemples traités en détail fu-

[redacted]

Plancherel et l'approche infinitésimale de Harish-Chandra pour l'étude des représentations des groupes semi-

formes cuspidales.

Présenter une théorie à travers un exemple n'est pas un exercice facile;

certaines constructions particulières à l'exemple ne sont pas éclairantes pour le cas général. Je pense que Varadarajan a réussi dans une large mesure à présenter les idées les plus importantes qui ont contribué au développement de l'analyse harmonique sur les groupes semi-simples. Le livre est agréable à lire. On peut cependant regretter le manque de références précises ou de guide pour la littérature surtout pour les chapitres 6, 7 et 8.

Le livre de Varadarajan n'est pas la première tentative d'introduire cette théorie par des exemples. En 1986, Knapp a publié un excellent livre [K] qui se veut aussi une introduction à la théorie des représentations à travers des exemples. On peut dire, de façon schématique, que le but de Knapp est de présenter la classification des représentations tempérées des groupes semi-simples, c'est-à-dire le support de la mesure de Plancherel, alors que le but de Varadarajan est la description de cette mesure. Il est donc naturel que l'on trouve une grosse partie commune aux deux livres, mais elle est traitée avec des optiques différentes. Je pense qu'ils sont plutôt complémentaires que concurrents. Je signale, pour terminer, la parution en deux volumes d'un livre de Wallach [W] qui présente, de façon détaillée, certains aspects de la théorie des représentations ainsi que la formule de Plancherel.

[K] ßA.W. Knapp, Representation theory of semisimple groups, an overview based on examples, Princeton university Press, Princeton, 1986.

[W] ßN.R. Wallach, Real reductive groups I et II, Academic Press, Boston, 1988 et 1992.

Abderrazak BOUAZIZ
Université de Poitiers

CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Volume 1 : symmetries, exact solutions and conservation laws.

N.H. Ibragimov (Ed.),
CRC Press, 1994, 429 pages
Prix : £68
Distribué en France par Offilib.

Ce livre a été signalé à mon attention par un prospectus de son éditeur, pour l'instant peu connu chez nous. Son titre indique bien qu'il s'agit d'un manuel de référenceS, donnant une présentation unifiée des innombrables travaux sur le sujet depuis Sophus Lie. Comme il n'était guère facile jusqu'à présent de se frayer un chemin dans une jungle de publications aux styles très divers, on ne peut que se féliciter de ce projet ambitieux auquel collaborent W.F. Ames, R.L. Anderson, V.A. Dorodnitsyn, E.V. Ferapontov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov et S.R. Svirshchevskii.

Le premier volume, seul paru à ce jour, se divise en trois parties de longueurs inégales : la première présente rapidement (73 pages) les idées essentielles de la théorie, la deuxième (270 pages) est consacrée à de très nombreux exemples d'application, en général issus de la physique mathématique; la dernière (55 pages) traite des méthodes numériques. Le reste du volume est occupé par une brève introduction, des index assez bien faits et, bien entendu, une très longue liste de références. Mes compétences limitées

[redacted]

de solutions. Si marginales que fussent ces questions, Lie n'a pas jugé indigne de son génie de leur consacrer beaucoup de temps, puisqu'il s'est attaqué avec succès au problème de classifier les équations d'ordre m arbitraire — en classifiant, bien sûr, des algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{C}^2$.

C'est par cette classification (pour $m \leq 2$, ce qui facilite les choses) qu'Anderson et Ibragimov commencent leur exposé. Le style reste "d'époque", c'est-à-dire qu'il faut réfléchir pour savoir si ce que l'on fait est local ou global, et que certains énoncés ne sont vrais que "génériquement, aux points génériques". Une telle critique pourra paraître dirimante aux enfants de Bourbaki, mais cette manière d'écrire les mathématiques présente l'avantage d'être simple, concise et accessible à un éventail assez large de lecteurs

équations du premier ordre ($p = m = 1$, n arbitraire) au voisinage des points réguliers du feuilletage caractéristique. Dans ce cas, le "groupe" des transformations de contact de $Oxyy'$ est en effet beaucoup plus gros que le sous-groupe obtenu en relevant les transformations de Oxy, assez gros pour "redresser" toutes les équations.

Lie avait l'intuition que ce miracle ne se produirait pas en général, ce que son élève Bäcklund a confirmé : pour $p > 1$ (resp. $m > 1$), toute transformation de contact d'ordre m s'obtient en relevant une transformation ponctuelle (resp. d'ordre 1); comme les équations aux dérivées partielles, elles, sont de plus en plus compliquées quand m et p augmentent, il n'y a plus assez de transformations de contact pour les classifier.

A la suite de Lie, on peut donc se poser deux types de questions : quelles *sont les équations invariantes (ou équivalentes à des équations plus simples) sous l'action de transformations appartenant à ces "petits" groupes, et quels groupes "plus gros" faire agir? Une réponse tentante à la seconde question, popularisée par A.M. Vinogradov, consiste à passer à la limite* $m = +\infty$*; on a alors énormément de transformations de contact, mais il faut prendre ses précautions si l'on ne veut pas obtenir des objets fantômes agissant sur un espace fantôme.*

A cette théorie encore dans l'œuf, Johnson et Ibragimov ont apporté une contribution intéressante sous la forme des "groupes de Lie-Bäcklund". L'idée est de considérer des champs de vecteurs sur l'espace Oxy *à coefficients dans un espace de jets d'ordre fini, que l'on relève en des transformations de contact infinitésimales (formelles) de l'espace des jets d'ordre infini; les groupes formels à un paramètre qu'ils engendrent sont des séries formelles par rapport au paramètre dont chaque coefficient est défini sur un espace de jets d'ordre fini. Dans les bons cas, ces séries convergeront...*

On peut enfin adjoindre à ces transformations encore locales les transformations non locales introduites par divers auteurs et que je ne puis ici définir en détail. Etant donnée une équation, on peut donc chercher ses symétries ponctuelles (transformations de l'espace Oxy *qui la préservent), ses symétries de contact, ses symétries de Lie-Bäcklund et ses symétries non locales. C'est à un inventaire de ce que l'on sait faire en la matière (avec références) qu'est consacrée la deuxième partie du livre; il y fallait beaucoup de courage, et il est évident que ce "catalogue" rendra service aux spécialistes comme aux utilisateurs.*

Un mot encore : les auteurs reconnaissent, dans ce premier volume, avoir quelque peu manqué à leur devoir d'exhaustivité en parlant avant tout de ce qui les intéresse, comptant sur leurs lecteurs pour leur suggérer des références à inclure dans les volumes suivants. Je souhaite donc que mes quelques réserves n'empêchent pas ce livre de trouver des lecteurs en France : le sujet le mérite, et il n'est pas certain que la théorie atteigne avant quelques siècles l'état où cette approche "zoologique" paraîtra désuète.

Marc CHAPERON
Université Denis Diderot (Paris 7)