MINISTÈRE
DE
L'INSTRUCTION
PUBLIQUE,
DES BEAUX-ARTS
ET
DES CULTES.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CONCOURS DE 1895.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et une sphère de rayon r et de centre A (x_0, y_0, z_0).

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E; du point A on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S et au pied P de cette normale on mène le plan tangent Π à cette quadrique.

1° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à une surface H_ρ, homofocale à l'ellipsoïde E, représentée par l'équation

$$H_\rho=\frac{x^2}{a^2-\rho}+\frac{y^2}{b^2-\rho}+\frac{z^2}{c^2-\rho}-1=0$$

2° Prouver que le plan Π est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques. Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies?

3° Par tout point M de l'espace il passe trois plans Π polaires du point A par rapport à trois quadriques H_λ, H_μ, H_ν du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonctions des paramètres λ, μ, ν.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans Π sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan Π, soit quand il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan Π coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique? En connaît-on des tangentes remarquables?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.