

FORMES DE TORSION ANALYTIQUE ET FAMILLES DE SUBMERSIONS I

PAR XIAONAN MA (*)

RÉSUMÉ. — Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$ et $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions holomorphes de variétés complexes de fibre compacte. Soit ξ un fibré holomorphe sur W . On démontre la fonctorialité des formes de torsion analytique relativement à la composition de deux submersions. Ce résultat étend une formule de Berthomieu-Bismut à une situation en famille.

ABSTRACT. — ANALYTIC TORSION FORMS AND FAMILIES OF SUBMERSIONS. — Let $\pi_1 : W \rightarrow V$ and $\pi_2 : V \rightarrow S$ be holomorphic submersions of complex varieties with compact fibre. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W . We prove the functoriality of the analytic torsion forms with respect to the composition of two submersions. This result extends to a relative situation a result by Berthomieu-Bismut, proved in the case where S is a point.

0. Introduction

Le but de ce travail est de démontrer la fonctorialité des formes de torsion analytique relativement à la composition de deux submersions; cet article est la première partie de ce travail.

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$, $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y . Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \rightarrow S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z .

Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W . Soient $R^\bullet \pi_{1*} \xi$, $R^\bullet \pi_{3*} \xi$, $R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi$ les images directes de ξ , ξ , $R^\bullet \pi_{1*} \xi$. On suppose que $R^\bullet \pi_{1*} \xi$, $R^\bullet \pi_{3*} \xi$ et $R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi$ sont localement libres.

Soient $H(Z, \xi|_Z)$, $H(X, \xi|_X)$ les cohomologies de $\xi|_Z$, $\xi|_X$. Alors $H(Z, \xi|_Z)$ est un fibré holomorphe \mathbb{Z} -gradué sur S . Plus exactement, on a

$$R^\bullet \pi_{3*} \xi = H(Z, \xi|_Z).$$

(*) Texte reçu le 27/10/98, révisé le 10/12/1998, accepté le 6/01/99.

X.MA, Université Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay CEDEX (France).

Email xiaonan@topo.math.u-psud.fr.

Mots clés : faisceaux, cohomologie des sections de fibrés vectoriels holomorphes, classes caractéristiques, nombres caractéristiques, théorie de l'index, théorie du point fixe.

Classification AMS : 32L10, 57R20, 58G10.

De même, on a $R^\bullet \pi_{1*} \xi = H(X, \xi|_X)$.

Soit ω^V (resp. ω^W) une (1,1)-forme réelle, fermée sur V (resp. W), dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. g^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ). Soit g^{TX} la métrique hermitienne sur TX induite par ω^W . Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ .

Soit $(\Omega(X, \xi|_X), \bar{\partial}^X)$ le complexe de Dolbeault des formes C^∞ sur la fibre X à valeurs dans ξ . On munit $\Omega(X, \xi|_X)$ de la métrique hermitienne L_2 associée à g^{TX}, h^ξ . On identifie $H(X, \xi|_X)$ aux formes harmoniques dans le complexe $\Omega(X, \xi|_X)$. Soit $h^{H(X, \xi|_X)} = h^{R\pi_{1*}\xi}$ la métrique L_2 associée sur $H(X, \xi|_X) = R^\bullet \pi_{1*} \xi$.

De même, on considère les complexes de Dolbeault relatifs $\Omega(Z, \xi|_Z)$ et $\Omega(Y, R^\bullet \pi_{1*} \xi|_Y)$ associés aux métriques g^{TZ}, h^ξ et $g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi}$. On désigne par $h^{H(Z, \xi|_Z)} = h^{R\pi_{3*}\xi}$ et $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$ les métriques L_2 correspondantes sur $H(Z, \xi|_Z) = R^\bullet \pi_{3*} \xi, R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi$.

Soient $T_1(\omega^W, h^\xi), T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$ et $T_3(\omega^W, h^\xi)$ les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [BKö] sur V, S, S associées à $(\pi_1, \omega^W, h^\xi), (\pi_2, \omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$ et (π_3, ω^W, h^ξ) . Les formes T_1 vérifient l'équation

$$(0.1) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} T_1(\omega^W, h^\xi) = \text{ch}(R^\bullet \pi_{1*} \xi, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \int_X \text{Td}(TX, g^{TX}) \text{ch}(\xi, h^\xi)$$

et les formes T_2 et T_3 vérifient des équations analogues.

Soit $\widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [BGS1] telle que

$$(0.2) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} \widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \\ = \text{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\text{Td}(TY, g^{TY})) \text{Td}(TX, g^{TX}).$$

Pour $s \in S$, il existe une suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s}), r \geq 2$, [Grot] telle que

$$E_2 = R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi.$$

Soit h^{E_2} la métrique sur E_2 induite par $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$. On définit une classe de Bott-Chern

$$\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$$

dans les trois cas suivants :

- i) lorsque le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.
- ii) lorsque le rang des E_r ($r \geq 2$) est localement constant sur S .

iii) lorsque π_1 et V sont projectives.

On vérifie que ces définitions sont compatibles.

La classe $\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)})$ vérifie l'équation

$$(0.3) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ = \text{ch}(H(Z, \xi|_Z), h^{H(Z, \xi|_Z)}) - \text{ch}(E_2, h^{E_2}).$$

Le but de cet article est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 0.1. — *Dans $P^S/P^{S,0}$, on a l'identité*

$$(0.4) \quad T_3(\omega^W, h^\xi) - T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ + \int_Z \tilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi, h^\xi) - \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) = 0.$$

On remarque que quand S est un point, le théorème 0.1 est exactement [BerB, th. 3.1]. Dans [BerB], le résultat est énoncé comme une formule qui compare les métriques de Quillen sur $\det R^\bullet\pi_{3*}\xi \simeq \det R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$.

Supposons maintenant que W, V, S sont des variétés arithmétiques. On rappelle que les images directes de Gillet et Soulé $\pi_{1!}, \pi_{2!}, \pi_{3!}$ contiennent les formes de torsion analytique T_1, T_2, T_3 . Le théorème 0.1 implique alors qu'on a la formule

$$(0.5) \quad \pi_{3!}(\xi, h^\xi) - \pi_{2!}(\pi_{1!}(\xi, h^\xi)) = - \int_Z \tilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi, h^\xi).$$

La formule (0.5) est un analogue d'un résultat de Faltings [F, lemme 5.5], dont la preuve est donnée dans [F, p. 75–76].

Cet article est organisé de la façon suivante.

- Au paragraphe 1, on calcule l'asymptotique de certains objets géométriques associés à une famille de submersions.
- Au paragraphe 2, on rappelle des résultats de [BGS2] et [BKö] sur les formes de torsion analytique.
- Au paragraphe 3, on énonce le théorème 0.1 dans les cas i) et iii).
- Au paragraphe 4, on énonce sept résultats intermédiaires, dont les preuves sont différées aux §§ 5–9. En utilisant ces résultats, on montre le théorème 0.1 dans le cas i).

Les paragraphes 5–9 sont consacrés aux preuves des résultats intermédiaires qui étendent [BerB, §5–9].

- Au paragraphe 5, on calcule l'asymptotique des supertraces évaluées à l'aide d'une superconnexion qui dépend de deux paramètres u et T .
- Au paragraphe 6, on établit une égalité triviale pour la classe de Bott-Chern

$$\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S / P^{S,0}$$

dans le cas i) pour lequel $H(Z, \xi|_Z) = E_2$.

Les paragraphes 7–9 contiennent des résultats de théorie de l'indice local relatif qu'on utilise pour montrer le théorème 0.1.

- Au paragraphe 10, on construit la classe de Bott-Chern

$$\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S / P^{S,0}$$

dans le cas où π_1 et V sont projectives.

- Au paragraphes 11 et 12, on montre le théorème 0.1 dans le cas iii).

La preuve du théorème 0.1 dans le cas ii) paraîtra comme partie II dans [Ma1].

Les résultats de cet article ont été annoncés dans [Ma]. On utilise le formalisme de superconnexion de Quillen [Q2]; pour les détails, on se référera aussi à [B1], [BGS1], [BGS2], [BerB].

REMERCIEMENTS. — Cet article est une partie de ma thèse de doctorat de l'Université Paris XI (Orsay). Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur J.-M. Bismut. Il m'a soutenu tout au long de ce travail, du français aux mathématiques. Sans ses utiles discussions et suggestions, cet article n'aurait jamais été écrit. Je remercie aussi vivement le professeur Christophe Soulé pour ses observations.

1. Fibrations kählériennes et limites adiabatiques

Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$ et $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions de variétés \mathcal{C}^∞ de fibres compactes X, Y . Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \rightarrow S$ est une submersion \mathcal{C}^∞ de fibre compacte Z .

Soient \tilde{g}^{TW}, g^{TV} des métriques sur W, V . Pour $T > 0$, on pose

$$g_T^{TW} = \frac{1}{T^2} \tilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}.$$

Par une construction de [BGS2, §1], la métrique g_T^{TW} détermine un sous-fibré $T_{3,T}^H W$ de TW , une connexion ∇_T^{TZ} , et des tenseurs $S_{3,T}$ et $T_{3,T}$.

Dans ce paragraphe, on étudie la limite quand T tend vers $+\infty$ de ces différents objets. Ce paragraphe étend les résultats de [BerB, §7 b)] obtenus dans le cas où S est un point.

En a), on calcule l'asymptotique des objets définis précédemment. En b), on applique les résultats de a) dans le cas des fibrations kählériennes (voir [BGS2, § 1]).

a) Fibrations et limites adiabatiques.

Soient W, V, S des variétés \mathcal{C}^∞ . Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$, $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions \mathcal{C}^∞ de fibres compactes X, Y . Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \rightarrow S$ est une submersion \mathcal{C}^∞ de fibre compacte Z . On a donc

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \\ & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \searrow \pi_3 \\ & & Y & \longrightarrow & V \longrightarrow S \\ & & & & \pi_2 \end{array}$$

Soient $TZ = TW/S$, TX, TY les fibrés tangents relatifs. Soient \tilde{g}^{TW}, g^{TV} des métriques sur W, V et $\tilde{g}^{TZ}, g^{TX}, g^{TY}$ les métriques induites par \tilde{g}^{TW}, g^{TV} sur TZ, TX, TY . Soit $T_1^H W$ (resp. $T_2^H V$) le sous-fibré de TW orthogonal à TX pour \tilde{g}^{TW} (resp. TV orthogonal à TY pour g^{TV}).

Soient $T_1, S_1, \langle S_1(\cdot) \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $T_2, S_2, \langle S_2(\cdot) \cdot, \cdot \rangle$) les tenseurs définis en [B4, §1.1] associés à $(\pi_1, g^{TX}, T_1^H W)$ (resp. $(\pi_2, g^{TY}, T_2^H V)$).

Pour $T > 0$, on pose

$$(1.1) \quad g_T^{TW} = \frac{1}{T^2} \tilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}, \quad g^{TW} = g_1^{TW}.$$

Soit g_T^{TZ} la métrique induite par g_T^{TW} sur TZ . Soit $T_{3,T}^H W$ le sous-fibré de TW orthogonal à TZ pour g_T^{TW} . Soient $T_{3,T}, S_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot) \cdot, \cdot \rangle_T$ les tenseurs définis en [B4, §1.1] associés à $(\pi_3, g_T^{TZ}, T_{3,T}^H W)$.

Soient $\nabla^{TX}, \nabla^{TY}, \nabla_T^{TZ}$ les connexions sur $(TX, g^{TX}), (TY, g^{TY}), (TZ, g_T^{TZ})$ associées à $(\pi_1, g^{TX}, T_1^H W), (\pi_2, g^{TY}, T_2^H V), (\pi_3, g_T^{TZ}, T_{3,T}^H W)$ (voir [B1, §1c]) et [B4, § 1.1]).

Le but de cette partie est de décrire l'asymptotique de

$$\nabla_T^{TZ}, T_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot) \cdot, \cdot \rangle_T \quad \text{quand } T \rightarrow \infty.$$

Si S est un point, on a déjà étudié cette question dans le cadre complexe dans [BerB, § 4 et § 7].

On pose :

$$(1.2) \quad T^H Z = TZ \cap T_1^H W.$$

Alors on a les identifications de fibrés vectoriels \mathcal{C}^∞ sur W ,

$$(1.3) \quad TZ \simeq T^H Z \oplus TX, \quad T^H Z \simeq \pi_1^* TY.$$

Les fibrés $T^H Z$ et TX sont orthogonaux pour \tilde{g}^{TZ} . Soit $P^{T^H Z}$ (resp. P^{TX}) la projection de $TZ = T^H Z \oplus TX$ sur $T^H Z$ (resp. TX). Soit $g^{T^H Z}$ la métrique sur $T^H Z$ induite par g^{TY} .

On pose :

$$(1.4) \quad T_{3,\infty}^H W = \{X \in T_1^H W, \quad \pi_{1*} X \in T_2^H V\}.$$

On a :

$$(1.5) \quad T_1^H W = T_{3,\infty}^H W \oplus T^H Z.$$

Les fibrés $T_{3,\infty}^H W$ et $T^H Z$ sont orthogonaux pour la métrique $\pi_1^* g^{TV}$.

Pour $U \in TS$, soit $U_{3,T}^H \in T_{3,T}^H W$ ($1 \leq T \leq +\infty$) (resp. $U_2^H \in T_2^H V$) le relèvement de U dans $T_{3,T}^H W$ (resp. $T_2^H V$) qui est tel que $\pi_{3*} U_{3,T}^H = U$ (resp. $\pi_{2*} U_2^H = U$). Pour $U \in TV$, soit $U_1^H \in T_1^H W$ le relèvement de U dans $T_1^H W$ qui est tel que $\pi_{1*} U_1^H = U$. On remarque que pour $U \in TS$,

$$(1.6) \quad U_{3,\infty}^H = (U_2^H)_1^H.$$

DÉFINITION 1.1. — Soient $h \in \text{End}(T^H Z)$, $h' \in \text{Hom}(T_{3,\infty}^H W, T^H Z)$ tels que si $U, V \in TY$, $X \in T_2^H V$, alors

$$(1.7) \quad \begin{cases} \langle U_1^H, V_1^H \rangle_{\tilde{g}^{TZ}} = \langle hU_1^H, V_1^H \rangle_{g^{T^H Z}}, \\ \langle X_1^H, V_1^H \rangle_{\tilde{g}^{TW}} = \langle h'X_1^H, V_1^H \rangle_{g^{T^H Z}}. \end{cases}$$

Soient g^{TS}, g'^{TS} des métriques sur TS . Notons que par [BGS2, rem. 1.6] et par (1.7), les objets introduits précédemment sont inchangés quand on remplace \tilde{g}^{TW} et g^{TV} par $\tilde{g}^{TW} + \pi_3^* g^{TS}$ et $g^{TV} + \pi_2^* g'^{TS}$.

PROPOSITION 1.2. — Si $U \in TS$, $1 \leq T < +\infty$, on a l'identité suivante dans TW :

$$(1.8) \quad U_{3,T}^H = U_{3,\infty}^H - \frac{1}{T^2} \left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1} h' U_{3,\infty}^H.$$

Preuve. — Par définition, on a $T_{3,T}^H W \subset T_1^H W$. Donc il existe $U(T)$ appartenant à TV tel que $U_{3,T}^H = U(T)_1^H$. D'où

$$(1.9) \quad U(T) - U_2^H \in TY.$$

En utilisant (1.6), (1.7), (1.9), on en déduit facilement (1.8). \square

Maintenant, on étudie l'asymptotique de $\nabla_T^{TZ}, T_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot), \cdot \rangle_T$.

Soit $B_T (T \in [1, +\infty])$ une famille de tenseurs; quand T tend vers $+\infty$, on notera

$$B_T = O\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $K \subset S$ compact, il existe $c > 0$ tel que pour $T \geq 1$, le sup des normes de B_T et de ses dérivées d'ordre $\leq k$ sur K est dominé par cT^{-2} .

Soit $\nabla^{T^H Z}$ la connexion sur $T^H Z$ induite par ∇^{TY} ; soit ${}^0\nabla^{TZ}$ la connexion sur $TZ \simeq T^H Z \oplus TX$

$$(1.10) \quad {}^0\nabla^{TZ} = \nabla^{T^H Z} \oplus \nabla^{TX}.$$

Sur chaque fibre Z , soit $\tilde{\nabla}^{TZ}$ la connexion de Levi-Civita sur (TZ, \tilde{g}^{TZ}) . Soit $g'^{TZ} = \pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX}$ la métrique sur $TZ = T^H Z \oplus TX$.

DÉFINITION 1.3. — *Sous l'identification $TW = T_{3,\infty}^H W \oplus TZ$, soit $A_{3,\infty}$ la 1-forme sur W à valeurs dans $\text{End}(TZ)$ définie par*

$$(1.11) \quad \begin{cases} \langle A_{3,\infty}(X)Y, Z \rangle_{g'^{TZ}} = \langle (\tilde{\nabla}^{TZ} - {}^0\nabla^{TZ})(X)Y, P^{TX}Z \rangle_{g^{TX}} \\ \hspace{15em} \text{si } X, Y, Z \in TZ, \\ = \frac{1}{2} \{ \langle [X, P^{T^H Z}Y], P^{TX}Z \rangle_{g^{TX}} + \langle [h'X, P^{TX}Z], P^{T^H Z}Y \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} \} \\ \hspace{15em} \text{si } X \in T_{3,\infty}^H W \text{ et } Y, Z \in TZ. \end{cases}$$

On pose

$$(1.12) \quad \nabla_\infty^{TZ} = {}^0\nabla^{TZ} + A_{3,\infty}$$

THÉORÈME 1.4. — *La connexion ∇_∞^{TZ} préserve TX et sa restriction à TX est égale à ∇^{TX} . Quand T tend vers $+\infty$, on a*

$$(1.13) \quad \nabla_T^{TZ} = \nabla_\infty^{TZ} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Preuve. — Si Y, Z sont des sections C^∞ de TZ , pour $X \in TW$, on doit calculer l'asymptotique de $\langle \nabla_{T,X}^{TZ} Y, Z \rangle_{g'^{TZ}}$ quand $T \rightarrow +\infty$.

Soient Y_1, Z_1 (resp. Y_2, Z_2) des sections C^∞ de TY (resp. TX). Soient $Y = Y_{1,1}^H + Y_2, Z = Z_{1,1}^H + Z_2$.

i) *Le cas où $X \in TZ$.* — Soient X_1, X_2 des sections C^∞ de TY, TX . Soit $X = X_{1,1}^H + X_2$. Par (1.1), on a

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \langle \nabla_{T,X}^{TZ} Y, Z \rangle_{g'^{TZ}} \\ = T^2 \langle \nabla_{T,X}^{TZ} Y, Z_2 \rangle_{g_T^{TZ}} + \langle \nabla_{T,X}^{TZ} Y, Z_{1,1}^H \rangle_{g_T^{TZ}} \left(1 + O\left(\frac{1}{T^2}\right)\right). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la connexion de Levi-Civita [BeGeV, (1.18)], [B4, th. 1.1] et (1.14), on a

$$(1.15) \quad \langle \nabla_{T,X}^{TZ} Y, Z \rangle_{g'^{TZ}} = \langle \tilde{\nabla}_X^{TZ} Y, Z_2 \rangle_{g^{TX}} + \langle \nabla_{X_1}^{TY} Y_1, Z_1 \rangle_{g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

ii) *Le cas où $X \in T_{3,\infty}^H W$.* — Soit U une section C^∞ de TS . Soit $X = U_{3,\infty}^H$.

• Supposons d'abord que $Z \in TX$. Alors $Z_1 = 0$. Par [B4, th. 1.1], (1.1) et (1.8), on a

$$(1.16) \quad \begin{aligned} 2\langle \nabla_{T,U_{3,\infty}^H}^{TZ} Y, Z \rangle_{g'^{TZ}} &= 2T^2 \langle \nabla_{T,U_{3,T}^H}^{TZ} Y, Z \rangle_{g_T^{TZ}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\ &= T^2 \left\{ \langle [U_{3,T}^H, Y], Z \rangle_{g_T^{TZ}} + \langle [Z, U_{3,T}^H], Y \rangle_{g_T^{TZ}} \right. \\ &\quad \left. + U_{3,T}^H \langle Y, Z \rangle_{g_T^{TZ}} \right\} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\ &= 2\langle \nabla_{U_{3,\infty}^H}^{TX} Y_2, Z \rangle_{g^{TX}} + 2\langle A_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H)Y, Z \rangle_{g'^{TZ}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \end{aligned}$$

• Supposons que $Z \in T_1^H W$. Alors $Z_2 = 0$. En utilisant [B4, th. 1.1] et (1.8), on obtient :

$$(1.17) \quad \langle \nabla_{T,U_{3,\infty}^H}^{TZ} Y, Z_{1,1}^H \rangle_{g_T^{TZ}} = \langle \nabla_{U_2^H}^{TY} Y_1, Z_1 \rangle_{g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Nous avons bien démontré le théorème 1.4. \square

Soit g^{TS} une métrique sur TS , soit ∇^{TS} la connexion de Levi-Civita sur (TS, g^{TS}) . Soient $g^{T_{3,\infty}^H W}$ la métrique et $\nabla^{T_{3,\infty}^H W}$ la connexion sur $T_{3,\infty}^H W$ induites par g^{TS} , ∇^{TS} . Soit ${}^0\nabla_\infty^{TW}$ la connexion sur $TW = T_{3,\infty}^H W \oplus TZ$

$$(1.18) \quad {}^0\nabla_\infty^{TW} = \nabla^{T_{3,\infty}^H W} \oplus \nabla_\infty^{TZ},$$

et soit $T_{3,\infty}$ la torsion de ${}^0\nabla_\infty^{TW}$.

PROPOSITION 1.5. — *On a*

$$(1.19) \quad T_{3,\infty}(X, Y) = \begin{cases} T_1(X, Y) + [T_2(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y)]_1^H + A_{3,\infty}(X)Y & \text{si } X \in T_{3,\infty}^H W, Y \in TW, \\ 0 & \text{si } X, Y \in TZ. \end{cases}$$

Preuve. — On fait le calcul dans les cas suivants.

(i) *Le cas où $X, Y \in T_{3,\infty}^H W$.* — Soient U, U' des sections \mathcal{C}^∞ de TS ; alors :

$$\begin{aligned}
 (1.20) \quad T_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H, U'_{3,\infty}{}^H) &= \nabla_{U_{3,\infty}^H}^{T_{3,\infty}^H W} U'_{3,\infty}{}^H - \nabla_{U'_{3,\infty}{}^H}^{T_{3,\infty}^H W} U_{3,\infty}^H - [U_{3,\infty}^H, U'_{3,\infty}{}^H] \\
 &= \{[U, U']\}_{3,\infty}^H - [U_{3,\infty}^H, U'_{3,\infty}{}^H] \\
 &= T_1(U_{3,\infty}^H, U'_{3,\infty}{}^H) + [T_2(U_2^H, U'_2{}^H)]_1^H.
 \end{aligned}$$

(ii) *Le cas où $X \in T_{3,\infty}^H W, Y \in TX$.* — Soit U (resp. Y) une section \mathcal{C}^∞ de TS (resp. TX); alors, par (1.13),

$$(1.21) \quad T_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H, Y) = \nabla_{U_{3,\infty}^H}^{TX} Y - [U_{3,\infty}^H, Y] = T_1(U_{3,\infty}^H, Y).$$

(iii) *Le cas où $X \in T_{3,\infty}^H W, Y \in T_1^H W$.* — Soit U (resp. Z) une section \mathcal{C}^∞ de TS (resp. TY); alors

$$\begin{aligned}
 (1.22) \quad T_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H, Z_1^H) &= \nabla_{U_{3,\infty}^H}^{T_1^H Z} Z_1^H + A_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H)Z_1^H - [U_{3,\infty}^H, Z_1^H] \\
 &= -[U_{3,\infty}^H, Z_1^H] + [\nabla_{U_2^H}^{TY} Z]_1^H + A_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H)Z_1^H \\
 &= T_1(U_{3,\infty}^H, Z_1^H) + [T_2(U_2^H, Z)]_1^H + A_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H)Z_1^H.
 \end{aligned}$$

(iv) *Le cas où $X, Y \in TZ$.* — Soient X, Y des sections \mathcal{C}^∞ de TZ . D'après [B4, th. 1.1] et (1.13), on a

$$\begin{aligned}
 (1.23) \quad T_{3,\infty}(X, Y) &= \nabla_{\infty, X}^{TZ} Y - \nabla_{\infty, Y}^{TZ} X - [X, Y] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} (\nabla_{T, X}^{TZ} Y - \nabla_{T, Y}^{TZ} X - [X, Y]) = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons bien démontré la proposition 1.5. \square

THÉORÈME 1.6. — *Quand $T \rightarrow +\infty$,*

$$(1.24) \quad T_{3,T} = T_{3,\infty} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Preuve. — On a des identifications de fibrés vectoriels \mathcal{C}^∞ sur V

$$(1.25) \quad TW = T_{3,T}^H W \oplus TZ, \quad T_{3,T}^H W \simeq \pi_3^* TS.$$

Soit $\nabla_{3,T}^{T^H W}$ la connexion induite par ∇^{TS} sur $T_{3,T}^H W$. Alors $T_{3,T}$ est la torsion de la connexion $\nabla_{3,T}^{T^H W} \oplus \nabla_T^{TZ}$. En utilisant la proposition 1.2, (1.13) et (1.18), on a (1.24). \square

THÉORÈME 1.7.

(i) Pour $X \in TX$, $Z \in TZ$, $U, U' \in TS$, on pose

$$Y_T = Z + U_{3,T}^H, \quad Y'_T = U'_{3,T}^H.$$

Alors quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$(1.26) \quad T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T \rangle_T = \langle S_1(X)Y_\infty, Y'_\infty \rangle \\ + \frac{1}{2} L_X \langle h'Y'_\infty, P^{T^H}Z Z \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

(ii) Pour $X_1, Y_1 \in TY$, $U, U' \in TS$, on pose

$$X = X_{1,1}^H, \quad Y_T = Y_{1,1}^H + U_{3,T}^H, \quad Y'_T = U'_{3,T}^H.$$

Alors quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$(1.27) \quad \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T \rangle_T = \langle S_2(X_1)(Y_1 + U_2^H), U_2'^H \rangle + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Preuve. — (i) D'après [B4, (1.5), (1.6)], (1.8) et le théorème 1.6, quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$(1.28) \quad T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T \rangle_T = -T^2 \langle T_{3,T}(U_{3,T}^H, Z), X \rangle_{g_T^{TZ}} \\ + \frac{1}{2} T^2 \langle T_{3,T}(U_{3,T}^H, U_{3,T}^H), X \rangle_{g_T^{TZ}} \\ = -\langle P^{TX} T_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H, Z), X \rangle_{g^{TX}} \\ + \frac{1}{2} \langle P^{TX} T_{3,\infty}(U_{3,\infty}^H, U_{3,\infty}^H), X \rangle_{g^{TX}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Par [B4, (1.5), (1.6)], (1.11), (1.19), on a :

$$(1.29) \quad T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T \rangle_T \\ = -\langle T_1(U_{3,\infty}^H, P^{TX}Z), X \rangle_{g^{TX}} \\ + \frac{1}{2} \langle T_1(U_{3,\infty}^H + P^{T^H}Z Z, U_{3,\infty}^H), X \rangle_{g^{TX}} \\ + \frac{1}{2} \langle [X, h'U_{3,\infty}^H], P^{T^H}Z Z \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\ = \langle S_1(X)Y_\infty, Y'_\infty \rangle + \frac{1}{2} L_X \langle h'U_{3,\infty}^H, P^{T^H}Z Z \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

(ii) D'après [B4, (1.5), (1.6)], (1.8) et le théorème 1.6, quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
 (1.30) \quad & \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T \rangle \\
 &= -\langle T_{3,T}(U'^H_{3,T}, Y_{1,1}^H), X_{1,1}^H \rangle_{g_T^{TZ}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle T_{3,T}(U^H_{3,T}, U'^H_{3,T}), X_{1,1}^H \rangle_{g_T^{TZ}} \\
 &= -\langle P^{T^H Z} T_{3,\infty}(U'^H_{3,\infty}, Y_{1,1}^H), X_{1,1}^H \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle P^{T^H Z} T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}), X_{1,1}^H \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\
 &= -\langle T_2(U'^H_2, Y_1), X_1 \rangle_{g^{TY}} + \frac{1}{2} \langle T_2(U^H_2, U'^H_2), X_1 \rangle_{g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\
 &= \langle S_2(X_1)(Y_1 + U^H_2), U'^H_2 \rangle + O\left(\frac{1}{T^2}\right).
 \end{aligned}$$

On a fini la preuve du théorème 1.7. \square

b) L'asymptotique des tenseurs associés aux fibrations kählériennes.

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$, $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y . Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \rightarrow S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z . Soient TX, TY, TZ les fibrés tangents holomorphes relatifs.

Soit ω^V (resp. $\tilde{\omega}^W$) une (1,1)-forme réelle, fermée, \mathcal{C}^∞ sur V (resp. W) dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. \tilde{g}^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ).

Dans la suite, on utilisera un indice \mathbb{R} pour distinguer les fibrés réels des fibrés complexes.

Pour $T > 0$, on pose

$$(1.31) \quad \omega_T^W = \frac{1}{T^2} \tilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V, \quad \omega^W = \omega_1^W.$$

Soient g^{TX} et g_T^{TZ} les métriques hermitiennes sur TX, TZ induites par $\tilde{\omega}^W$ et ω_T^W . Soient $\nabla^{TX}, \nabla^{TY}, \nabla_T^{TZ}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(TX, g^{TX}), (TY, g^{TY}), (TZ, g_T^{TZ})$. Soient $T_1^H W, T_2^H V, T_{3,T}^H W$ les sous-fibrés vectoriels de TW, TV, TW orthogonaux à $\overline{TX}, \overline{TY}, \overline{TZ}$ pour $\tilde{\omega}^W, \omega^V, \omega_T^W$ [B4, th. 2.2].

Par [BGS2, th. 1.7], la connexion $\nabla^{T_{\mathbb{R}} X}$ sur $T_{\mathbb{R}} X$ préserve la structure complexe de $T_{\mathbb{R}} X$, et elle induit la connexion holomorphe hermitienne ∇^{TX} sur TX pour g^{TX} .

DÉFINITION 1.8. — Soient $h \in \text{End}(T^H Z)$, $h' \in \text{Hom}(T_{3,\infty}^H W, T^H Z)$ tels que si $U, V \in TY, X \in T_2^H V$,

$$(1.32) \quad \begin{cases} \langle U_1^H, \bar{V}_1^H \rangle_{g^{TZ}} = \langle hU_1^H, \bar{V}_1^H \rangle_{g^{T^H Z}}, \\ i\tilde{\omega}^W(X_1^H, \bar{V}_1^H) = \langle h'X_1^H, \bar{V}_1^H \rangle_{g^{T^H Z}}. \end{cases}$$

Alors h est une section auto-adjointe définie positive de $\text{End}(T^H Z)$. Soit $\bar{h} \in \text{End}(\overline{T^H Z})$ (resp. $\bar{h}' \in \text{Hom}(\overline{T_{3,\infty}^H W}, \overline{T^H Z})$) le conjugué de h (resp. h'). On prolonge h à $T_{\mathbb{R}}^H Z$ (resp. h' de $T_{3,\infty,\mathbb{R}}^H W$ à $T_{\mathbb{R}}^H Z$).

Notons que $\tilde{\omega}^W, \omega^V$ ne définissent en général pas des métriques kählériennes sur W, V . Toutefois, si $s_0 \in S$, si ω^S est une forme de Kähler sur un voisinage U de s_0 dans S , pour $\lambda \gg 0$, $\tilde{\omega}^W + \lambda\pi_3^*\omega^S, \omega^V + \lambda\pi_2^*\omega^S$ sont des formes kählériennes sur $\pi_3^{-1}(U), \pi_2^{-1}(U)$. On peut alors effectuer les constructions du § 1 a) sur $\pi_3^{-1}(U), \pi_2^{-1}(U)$. Les constructions qui suivent la définition 1.1 montrent que les objets construits ne dépendent pas de ω^S , et sont donc globalement définis sur W ou sur V .

Comme complément, on donne l'asymptotique de ∇_T^{TZ} .

On rappelle qu'on a l'identification de fibrés vectoriels \mathcal{C}^∞ sur W

$$(1.33) \quad TZ \simeq T^H Z \oplus TX.$$

Soit $\nabla^{T^H Z}$ la connexion induite par ∇^{TY} , soit ${}^0\nabla^{TZ}$ la connexion sur TZ

$$(1.34) \quad {}^0\nabla^{TZ} = \nabla^{T^H Z} \oplus \nabla^{TX}.$$

Soit $A \in T^{*(0,1)}W \otimes \text{Hom}(T^H Z, TX)$ tel que $\nabla^{TZ''} = {}^0\nabla^{TZ''} + A$. Soit A^* l'adjoint de A associé aux métriques $g^{T^H Z}$ et g^{TX} .

On écrit ∇_T^{TZ} sous forme matricielle relativement au scindage $TZ \simeq T^H Z \oplus TX$. D'après [BerB, (7.24)], on a

$$(1.35) \quad \nabla_T^{TZ} = \begin{bmatrix} \nabla^{T^H Z} + (T^2 + h)^{-1}\nabla^{T^H Z'} h & -(T^2 + h)^{-1}A^* \\ A & \nabla^{TX} \end{bmatrix}.$$

On pose

$$(1.36) \quad \nabla_\infty^{TZ} = \begin{bmatrix} \nabla^{T^H Z} & 0 \\ A & \nabla^{TX} \end{bmatrix}.$$

D'après (1.35), on a :

THÉORÈME 1.9. — Quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$(1.37) \quad \nabla_T^{TZ} = \nabla_\infty^{TZ} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

2. Formes de torsion analytique

Dans ce paragraphe, pour fixer les notations, on rappelle la construction de formes de torsion analytique dans [BKö] associées aux fibrations kählériennes $\pi : W \rightarrow V$. Pour une description plus complète, on se réfère à [B4, § 2].

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on rappelle la construction de la superconnexion de Levi-Civita associée à une fibration [B1] Dans b), on construit des formes de torsion analytique de [BKö].

a) Superconnexion de Levi-Civita d’une fibration kählérienne.

Soient W et V des variétés complexes, soit $\pi : W \rightarrow V$ une submersion holomorphe de fibre compacte X . Soit ω^W une $(1,1)$ -forme réelle, fermée, C^∞ sur W qui induit une métrique hermitienne g^{TX} sur TX .

Soit $T^H W$ le sous-fibré de TW orthogonal à \overline{TX} pour ω^W . Pour $U \in TV$, soit $U^H \in T^H W$ le relèvement de U dans $T^H W$ qui est tel que $\pi_* U^H = U$.

Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W . Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ . Soient ∇^{TX}, ∇^ξ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(TX, g^{TX}), (\xi, h^\xi)$. Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ induite par ∇^{TX} . Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$

$$(2.1) \quad \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} = \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi.$$

Pour $b \in V$, soit $(\Omega(X_b, \xi|_{X_b}), \overline{\partial}^{X_b})$ le complexe de Dolbeault relatif des sections C^∞ de $(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_b}$. Alors $\Omega(X_b, \xi|_{X_b})$ va être considéré comme une fibre d’un fibré vectoriel de dimension infinie sur V dont les sections C^∞ sont identifiées aux sections C^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ sur W .

Soit $*^{TX}$ l’opérateur de Hodge associé à g^{TX} sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* X)$. On définit le produit hermitien sur $\Omega(X_b, \xi|_{X_b})$,

$$(2.2) \quad \alpha, \alpha' \in \Omega(X_b, \xi|_{X_b}) \longmapsto \langle \alpha, \alpha' \rangle_b = \frac{1}{(2\pi)^{\dim X}} \int_{X_b} \langle \alpha \wedge *^{TX} \alpha' \rangle_{h^\xi}.$$

Soit dv_X la forme de volume sur X associée à g^{TX} sur TX . Soit $\langle \cdot \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi}$ le produit hermitien sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ associé aux métriques g^{TX}, h^ξ sur TX, ξ . Alors pour $\alpha, \alpha' \in \Omega(X_b, \xi|_{X_b})$, on a :

$$\langle s, s' \rangle_b = (2\pi)^{-\dim X} \int_{X_b} \langle s, s' \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} dv_X.$$

Soit $\overline{\partial}^{X_b*}$ l’adjoint formel de $\overline{\partial}^{X_b}$ pour le produit hermitien (2.2).

DÉFINITION 2.1. — Si s est une section C^∞ de $\Omega(X, \xi|_X)$, si $U \in T_{\mathbb{R}}V$, on pose :

$$(2.3) \quad \nabla_U^{\Omega(X, \xi|_X)} s = \nabla_{U^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} s.$$

Par [B1, § 1 (b)], $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)}$ est une connexion sur le fibré vectoriel $\Omega(X, \xi|_X)$. Soient $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)'}$, $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)''}$ les parties holomorphes et antiholomorphes de $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)}$.

La fibre $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ est un $c(T_{\mathbb{R}}X)$ -module de Clifford. En effet, si $U \in TX$, soit $U' \in T^{*(0,1)}X$ qui correspond à U par la métrique g^{TX} . Si $U, V \in TX$, on pose :

$$(2.4) \quad c(U) = \sqrt{2}U' \wedge, \quad c(\bar{V}) = -\sqrt{2}i_{\bar{V}}.$$

Pour $X \in T_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = TX \oplus \overline{TX}$, on définit $c(X)$ par prolongement \mathbb{C} -linéaire.

Soit f_1, \dots, f_{2m} une base de $T_{\mathbb{R}}V$ et soit f^1, \dots, f^{2m} la base duale de $T_{\mathbb{R}}^*V$.

DÉFINITION 2.2. — Soit

$$(2.5) \quad c(T) = \frac{1}{2} \sum f^\alpha f^\beta c(T(f_\alpha^H, f_\beta^H)).$$

Alors $c(T)$ est une section de $(\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*V) \widehat{\otimes} \text{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi))^{\text{impair}}$. On définit aussi $c(T^{1,0})$, $c(T^{0,1})$ par des formules semblables à (2.5), de sorte que

$$(2.6) \quad c(T) = c(T^{1,0}) + c(T^{0,1}).$$

DÉFINITION 2.3. — Pour $u > 0$, on pose :

$$(2.7) \quad \begin{cases} B_u'' = \nabla^{\Omega(X, \xi|_X)''} + \sqrt{u} \bar{\partial}^X - \frac{c(T^{1,0})}{2\sqrt{2}u}, \\ B_u' = \nabla^{\Omega(X, \xi|_X)'} + \sqrt{u} \bar{\partial}^{X*} - \frac{c(T^{0,1})}{2\sqrt{2}u}, \\ B_u = B_u' + B_u''. \end{cases}$$

D'après [BGS2, § 2(a)], B_u est la superconnexion de Levi-Civita $A_{u/2}$ définie par [B1, § 3].

Soit N_X l'opérateur de nombre de $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$, qui agit par multiplication par k sur $\Lambda^k(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$. Alors l'opérateur N_X définit une \mathbb{Z} -graduation sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$.

Pour tout $U, U' \in T_{\mathbb{R}}V$, on pose :

$$(2.8) \quad \omega^{H\bar{H}}(U, U') = \omega^W(U^H, U'^H).$$

DÉFINITION 2.4. — Pour $u > 0$, on pose :

$$(2.9) \quad N_u = N_X + i \frac{\omega^{H\bar{H}}}{u}.$$

b) Formes de torsions analytiques.

Soit $R^\bullet \pi_* \xi = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} R^k \pi_* \xi$ l'image directe de ξ par π . On suppose que, pour tout k , $0 \leq k \leq \dim X$, $R^k \pi_* \xi$ est localement libre. Pour $b \in V$, soit $H(X_b, \xi|_{X_b})$ la cohomologie du faisceau des sections holomorphes de $\xi|_{X_b}$ sur X_b . Alors les $H(X_b, \xi|_{X_b})$ sont les fibres du fibré holomorphe \mathbb{Z} -gradué $H(X, \xi|_X)$ sur V ; plus précisément,

$$(2.10) \quad R^\bullet \pi_* \xi = H(X, \xi|_X).$$

Désormais, on suppose que $R^k \pi_* \xi$, ($0 \leq k \leq \dim X$) est localement libre, et on identifie $R^\bullet \pi_* \xi$ à $H(X, \xi|_X)$.

On pose

$$(2.11) \quad D_b^X = \bar{\partial}^{X_b} + \bar{\partial}^{X_b*}, \quad K(X_b, \xi|_{X_b}) = \ker D_b^X.$$

Par la théorie de Hodge

$$(2.12) \quad H(X_b, \xi|_{X_b}) \simeq K(X_b, \xi|_{X_b}).$$

Donc $K(X_b, \xi|_{X_b})$ est de dimension localement constante. Les $K(X_b, \xi|_{X_b})$ sont les fibres d'un fibré $\mathcal{C}^\infty, K(X, \xi|_X)$, sur V . D'après [BGS3, th. 3.5], l'isomorphisme canonique des fibres (2.12) provient d'un isomorphisme de fibrés vectoriels \mathbb{Z} -gradués sur V ,

$$(2.13) \quad R^\bullet \pi_* \xi \simeq K(X, \xi|_X).$$

De plus $K(X, \xi|_X)$ hérite du produit hermitien (2.2) sur $\Omega(X, \xi|_X)$. Soit $h^{R\pi_* \xi}$ la métrique correspondante sur $R^\bullet \pi_* \xi$ par (2.13). Pour $0 \leq k \leq \dim X$, $(R^k \pi_* \xi, h^{R^k \pi_* \xi})$ est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur V .

DÉFINITION 2.5. — Soit P^W l'espace vectoriel de formes réelles sur W qui sont la somme de formes \mathcal{C}^∞ de type (p, p) . Soit

$$(2.14) \quad P^{W,0} = \{ \alpha \in P^W, \text{ il existe des formes } \beta, \gamma \mathcal{C}^\infty \text{ sur } W, \\ \text{telles que } \alpha = \partial\beta + \bar{\partial}\gamma \}.$$

On définit de la même manière P^V et $P^{V,0}$.

Soit P une série formelle ad-invariante définie sur les matrices carrées. Soit (E, g^E) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur W . Soit ∇^E la connexion holomorphe hermitienne sur E , et soit R^E sa courbure. Soit

$$P(E, g^E) = P\left(\frac{-R^E}{2\pi i}\right).$$

Alors $P(E, g^E)$ est une forme fermée dans P^W dont la classe de cohomologie $P(E)$ ne dépend pas de g^E .

On rappelle que, si A est une matrice carrée, alors

$$(2.15) \quad \text{Td}(A) = \det\left(\frac{A}{1 - e^{-A}}\right), \quad \text{ch}(A) = \text{Tr}[\exp(A)].$$

On pose

$$(2.16) \quad \text{Td}'(A) = \frac{\partial}{\partial b} \text{Td}(A + bI)|_{b=0}.$$

Soit

$$(2.17) \quad \text{ch}(R^\bullet \pi_* \xi, h^{R\pi_* \xi}) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \text{ch}(R^k \pi_* \xi, h^{R^k \pi_* \xi}).$$

Maintenant, on définit les formes de torsion analytique $T(\omega^W, h^\xi)$, en utilisant la superconnexion de Levi-Civita B_u comme en [BKö, déf. 3.8]. Par [BKö, th. 3.9], la forme $T(\omega^W, h^\xi)$ est dans P^V , et

$$(2.18) \quad \frac{\bar{\partial} \partial}{2\pi i} T(\omega^W, h^\xi) = \text{ch}(R^\bullet \pi_* \xi, h^{R\pi_* \xi}) - \int_X \text{Td}(TX, g^{TX}) \text{ch}(\xi, h^\xi).$$

Dans [BKö, th. 3.10], ils ont établi des formules d'anomalie pour ces formes.

3. Functorialité des formes de torsion analytique

Le but principal de cet article est d'établir les théorèmes 3.5 et 3.11.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on donne les hypothèses et les notations de cet article. Dans b), on énonce le résultat dans le cas où ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique. Dans c), on énonce le résultat dans le cas où π_1 et V sont projectives.

On utilise les mêmes notations qu'au § 1 b).

a) Hypothèses et notations.

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \rightarrow V$, $\pi_2 : V \rightarrow S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y . Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \rightarrow S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z . Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W .

Soit ω^W (resp. ω^V) une (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W (resp. V) dont la restriction à chaque fibre Z (resp. Y) définit une métrique hermitienne g^{TZ} (resp. g^{TY}) sur TZ (resp. TY). Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ . On rappelle que g^{TX} est la métrique sur TX induite par ω^W .

On suppose que $R^\bullet \pi_{1*} \xi$, $R^\bullet \pi_{3*} \xi$ et $R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi$ sont localement libres. Comme au § 2 b), on peut identifier le fibré $R^\bullet \pi_{1*} \xi$ (resp. $R^\bullet \pi_{3*} \xi$, resp. $R^\bullet \pi_{2*} R^\bullet \pi_{1*} \xi$) aux éléments harmoniques associés dans le complexe de Dolbeault relatif $\Omega(X, \xi|_X)$ (resp. $\Omega(Z, \xi|_Z)$, resp. $\Omega(Y, R^\bullet \pi_{1*} \xi|_Y)$). Soient $h^{R\pi_{1*}\xi}$, $h^{R\pi_{3*}\xi}$, $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$ les métriques associées définies au § 2 b).

Sur W , on a une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens :

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow TX \rightarrow TZ \rightarrow \pi_1^* TY \rightarrow 0.$$

Par une construction de [BGS1, § 1 f)], il existe une unique classe de Bott-Chern $\widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W / P^{W,0}$ telle que

$$(3.2) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} \widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \text{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\text{Td}(TY, g^{TY}))\text{Td}(TX, g^{TX}).$$

Soient $T_1(\omega^W, h^\xi)$, $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$, $T_3(\omega^W, h^\xi)$ les formes de torsion analytique sur V, S, S pour π_1, π_2, π_3 définies au § 2 b).

Soit $s \in S$; alors d'après [Grot, § 3.7] (ou voir le § 10 b)), il existe une suite spectrale de Leray pour le foncteur dérivé du composé $\pi_{3*} = \pi_{2*} \circ \pi_{1*}$. On le notera $(E_{r,s}, d_{r,s})$. On a :

$$(3.3) \quad \begin{cases} E_2^{i,j} = H^i(Y, R^j \pi_{1*} \xi|_Y) \simeq R^i \pi_{2*} R^j \pi_{1*} \xi, \\ E_r \implies H(Z, \xi|_Z) \simeq R^\bullet \pi_{3*} \xi. \end{cases}$$

Donc $E_2^{\bullet,\bullet}$ est un fibré vectoriel holomorphe sur S . Soit h^{E_2} la métrique sur E_2 induite par $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$. Soit $h^{H(Z,\xi|_Z)}$ la métrique sur $H(Z, \xi|_Z)$ définie au § 2 b) associée à g^{TZ}, h^ξ .

b) Le cas acyclique.

Dans cette partie, on suppose que pour $i > 0$, on a

$$(3.4) \quad R^i \pi_{1*} \xi = 0, \quad R^i \pi_{3*} \xi = 0.$$

Alors la suite spectrale de Leray pour chaque fibre Z_s ($s \in S$) dégénère à partir de E_2 , et de plus,

$$(3.5) \quad E_2 = H(Z, \xi|_Z) = H^0(Z, \xi|_Z).$$

Donc par la construction de [BGS1, § 1 f)], la classe de Bott-Chern $\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$ est bien définie.

DÉFINITION 3.1. — Soit $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi)$ la forme dans $P^S/P^{S,0}$

$$(3.6) \quad \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = T_3(\omega^W, h^\xi) - T_2(\omega^V, h^{R\pi_1^*\xi}) - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ - \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) + \int_Z \tilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi, h^\xi).$$

PROPOSITION 3.2. — On a

$$(3.7) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0.$$

Preuve. — En utilisant (3.2) et (2.18), on a (3.7). \square

REMARQUE 3.3. — Soit ω'^W (resp. ω'^V) une autre (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W (resp. V) qui induit une métrique hermitienne sur TZ (resp. TY). Soit h'^ξ une autre métrique hermitienne sur ξ . Alors, en utilisant [BKö, th. 3.10], on peut vérifier que, comme dans [BerB, § 3 (b)], on a

$$(3.8) \quad \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = \Delta(\omega'^W, \omega'^V, h'^\xi) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

REMARQUE 3.4. — Soit ξ' un fibré vectoriel holomorphe sur S . Si on suppose que S est kählérienne et compacte, en utilisant [BerB, th. 3.1], [BGS3, th. 1.23], on peut vérifier aussi que

$$(3.9) \quad \int_S \text{Td}(TS) \text{ch}(\xi') \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0.$$

Le but de cet article est d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 3.5. — On a

$$(3.10) \quad \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0 \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

REMARQUE 3.6. — D'après le théorème 3.3, on sait que pour montrer le théorème 3.5, il suffit de le montrer pour une forme ω^W donnée. En remplaçant

ω^W par $\omega^W + \pi_1^* \omega^V$, on peut supposer que $\tilde{\omega}^W$ est une $(1, 1)$ -forme réelle, fermée sur W , qui induit une métrique hermitienne sur TZ , et que de plus

$$(3.11) \quad \omega^W = \tilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V.$$

c) Le cas où π_1 et V sont projectives.

Comme l'hypothèse (3.4) n'est pas satisfaite en général, on propose de montrer un résultat qui généralise le théorème 3.5. Dans le cas général, comme E_2 n'est pas isomorphe à $H(Z, \xi|_Z)$, le terme $\text{ch}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$ n'est plus bien défini. Dans la suite, on donnera une façon naturelle de construire la classe de Bott-Chern $\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)})$ quand π_1 et V sont projectives.

Dans cette partie, on suppose que π_1 et V sont projectives [BGS3, p. 337]. Alors W est aussi projective.

THÉORÈME 3.8. — *On peut définir la classe de Bott-Chern*

$$\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$$

de manière « naturelle » de sorte que

$$(3.12) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ = \text{ch}(H(Z, \xi|_Z), h^{H(Z, \xi|_Z)}) - \text{ch}(E_2, h^{E_2}).$$

THÉORÈME 3.9. — *On suppose que S est kählérienne. Soit g^{TS} une métrique kählérienne sur TS . Soit σ la section canonique de $\lambda^{-1}(E_2) \otimes \lambda(R^\bullet \pi_{3*} \xi)$. Alors on a*

$$(3.13) \quad \log \|\sigma\|_{\lambda^{-1}(E_2) \otimes \lambda(R^\bullet \pi_{3*} \xi)}^2 \\ = \int_S \text{Td}(TS, g^{TS}) \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}).$$

REMARQUE 3.10. — Les preuves des théorèmes 3.8, 3.9 sont reportées au § 10. On y expliquera précisément le mot « naturel ».

Maintenant, on définit la forme $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) \in P^S/P^{S,0}$ comme en (3.6). Le but de cet article est d'établir aussi le résultat suivant.

THÉORÈME 3.11. — *On a*

$$(3.14) \quad \Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0 \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.$$

4. Preuve du théorème 3.5

Dans ce paragraphe, on montre notre résultat essentiel, le théorème 3.5, pour ω^W donnée par (3.11).

L'organisation de ce paragraphe est la même que dans [BerB, § 4]. Comme dans [BerB, § 4], on donne des résultats intermédiaires dont les preuves sont données aux §§ 5–9.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on établit une identité $\sum_{k=1}^4 I_k^0 = \bar{\partial}\theta_1^0 - \bar{\partial}\theta_2^0 - \bar{\partial}\bar{\partial}\theta_3^0$ de formes dans P^S . Le théorème 3.5 sera obtenu par passage à la limite à partir de cette identité. Dans b), on énonce des résultats intermédiaires qu'on va utiliser dans la preuve du théorème 3.5. Dans c), on calcule l'asymptotique des I_k^0 . Dans d), on traite d'abord le terme à droite de l'équation ci-dessus. Comme un problème analogue a été résolu dans [B4, § 6], on omet les preuves. Le lecteur en trouvera le détail dans [B4, § 6]. Enfin, on finit la preuve du théorème 3.5.

Dans ce paragraphe, on utilise les mêmes hypothèses et notations qu'au §§ 3 a) et 3 b).

a) Une 1-forme fondamentale.

Soit ω_T^W ($T > 0$) la (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W définie par

$$(4.1) \quad \omega_T^W = \frac{1}{T^2} \tilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V.$$

Alors par (3.11), on a $\omega^W = \omega_1^W$.

On rappelle aussi que $g^{TZ}, g_T^{TZ}, g^{TX}, g^{TY}$ sont les métriques induites par $\omega^W, \omega_T^W, \omega^W, \omega^V$ sur TZ, TZ, TX, TY . Soit $*_T^{TZ}$ l'opérateur de Hodge agissant sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*Z)$ associé à la métrique g_T^{TZ} . On pose

$$(4.2) \quad Q_T = -(*_T^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (*_T^{TZ}).$$

On rappelle que le fibré $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ est un $c(T_{\mathbb{R}}Z)$ -module de Clifford. On note $c_T(\cdot)$ l'action de l'algèbre de Clifford de $(T_{\mathbb{R}}Z, g_T^{TZ})$ définie en (2.4).

Soit $\{e_a\}$ une base locale orthonormée de $T_{\mathbb{R}}Z$ pour la métrique g_T^{TZ} . Soit $\{g_\alpha\}$ une base de $T_{\mathbb{R}}S$, et soit $\{g^\alpha\}$ sa base duale de $T_{\mathbb{R}}^*S$.

DÉFINITION 4.1. — Soit

$$(4.3) \quad M_{3,u,T} = -\frac{i}{\sqrt{2u}} \left(\frac{\partial}{\partial T} \omega_T^W \right) (g_{\alpha,3,T}^H, e_a) g^\alpha c_T(e_a) \\ - \frac{i}{2u} \left(\frac{\partial}{\partial T} \omega_T^W \right) (g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H) g^\alpha \wedge g^\beta - Q_T.$$

Soit $\omega_{3,T}^{H\bar{H}}$ la forme correspondant à (π_3, ω_T^W) en (2.8). Soient $B_{3,u,T}, N_{3,u,T}$ les opérateurs définis en (2.7), (2.9) associés à ω_T^W, h^ξ et $\pi_3 : W \rightarrow S$.

On fixe une racine carrée $\sqrt{2\pi i}$ de $2\pi i$. Soit φ (resp. φ_1) l'homomorphisme de $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$ dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$ (resp. $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*V)$ dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*V)$) :

$$\alpha \longmapsto (2\pi i)^{-\frac{1}{2}} \deg \alpha.$$

DÉFINITION 4.2. — Soit $\alpha_{u,T}$ la 1-forme à valeurs dans P^S sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

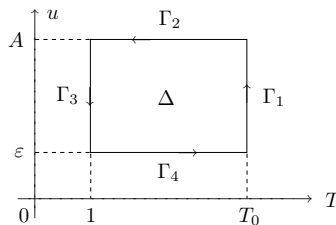
$$\alpha_{u,T} = du \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{2}{u} N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2) \right] + dT \varphi \text{Tr}_s [M_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2)].$$

Par [BKö, th. 2.9], on a la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 4.3. — On a l'égalité suivante :

$$(4.5) \quad d_{u,T} \alpha_{u,T} = \frac{2}{u} du dT \varphi \left\{ \begin{aligned} & \bar{\partial} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \text{Tr}_s [[B'_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T}] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T})] \right\}_{b=0} \\ & - \partial \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \text{Tr}_s [[B''_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T}] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T})] \right\}_{b=0} \\ & - \bar{\partial} \partial \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \text{Tr}_s [N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T})] \right\}_{b=0} \end{aligned} \right\}.$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq A < +\infty$, $1 < T_0 < +\infty$, soit $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon,A,T_0}$ le contour orienté dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:



Dans la figure, Γ est composé par les segments orientés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$. Alors le contour Γ est le bord d'un domaine rectangulaire Δ .

Pour $1 \leq k \leq 4$, on pose :

$$(4.6) \quad I_k^0 = \int_{\Gamma_k} \alpha_{u,T}.$$

Soient

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_1^0 &= (2\pi i)^{-1/2} \int_{\Delta} \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \text{Tr}_s \left[[B'_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} du dT, \\ \theta_2^0 &= (2\pi i)^{-1/2} \int_{\Delta} \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \text{Tr}_s \left[[B''_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} du dT, \\ \theta_3^0 &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Delta} \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \text{Tr}_s [N_{3,u^2,T}] \right. \\ &\quad \left. \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right\}_{b=0} du dT. \end{aligned} \right.$$

THÉORÈME 4.4. — On a l'égalité :

$$(4.8) \quad \sum_{k=1}^4 I_k^0 = \bar{\partial}\theta_1^0 - \partial\theta_2^0 - \bar{\partial}\partial\theta_3^0.$$

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.3. \square

b) Des résultats intermédiaires.

On rappelle qu'on a les identifications de fibrés vectoriels \mathcal{C}^∞ sur W ,

$$TZ \simeq T^H Z \oplus TX, \quad T^H Z \simeq \pi_1^* TY.$$

Ces identifications induisent une identification de fibrés \mathcal{C}^∞ \mathbb{Z} -gradués sur W

$$(4.9) \quad \Lambda(T^{*(0,1)} Z) \simeq \pi_1^* \Lambda(T^{*(0,1)} Y) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} X).$$

Soient N_Z, N_X, N_Y les opérateurs de nombre sur $\Lambda(T^{*(0,1)} Z), \Lambda(T^{*(0,1)} X), \Lambda(T^{*(0,1)} Y)$. D'après (4.9), les opérateurs N_X, N_Y agissent sur $\Lambda(T^{*(0,1)} Z)$. Ils agissent aussi naturellement sur $\Lambda(T^{*(0,1)} Z) \otimes \xi$ et sur $\Omega(Z, \xi|_Z)$. Naturellement,

$$(4.10) \quad N_Z = N_X + N_Y.$$

Soient $B_{1,u}, B_{2,u}, B_{3,u}$ les superconnexions de Levi-Civita associées à $(\pi_1, \omega^W, h^\xi), (\pi_2, \omega^V, h^{R\pi_1^*\xi}), (\pi_3, \omega^W, h^\xi)$ définies à la définition 2.3. Soit $\omega_1^{H\bar{H}}, \tilde{\omega}_1^{H\bar{H}}, \omega_2^{H\bar{H}}, \omega_3^{H\bar{H}}$ les formes associées à $(\pi_1, \omega^W), (\pi_1, \tilde{\omega}^W), (\pi_2, \omega^V), (\pi_3, \omega^W)$ définies en (2.8). Soient $N_{1,u}, \tilde{N}_{1,u}, N_{2,u}, N_{3,u}$ les opérateurs associés à $(\pi_1, \omega^W), (\pi_1, \tilde{\omega}^W), (\pi_2, \omega^V), (\pi_3, \omega^W)$ définis à la définition 2.4.

Maintenant, on expose des résultats qui vont être utilisés dans la preuve du théorème 3.5. Les preuves des résultats seront données aux §§ 5–9.

Dans la suite, on met sur les formes C^∞ sur S la topologie de la convergence uniforme des formes et de leurs dérivées sur les parties compactes de S . Pour éviter de noter explicitement des constantes qui dépendent du compact considéré, on suppose, pour simplifier, que S est compacte.

THÉOREME 4.5.

(i) Pour tout $u > 0$,

$$(4.11) \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi \text{Tr}_s [N_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] = \varphi \text{Tr}_s [N_{2,u} \exp(-B_{2,u}^2)].$$

(ii) Pour tout $u > 0$, il existe $C > 0$, $\delta > 0$ tels que pour $T \geq 1$,

$$(4.12) \quad \left| \varphi \text{Tr}_s [M_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] - \frac{2}{T} \varphi \text{Tr}_s [(N_X - \dim X) \exp(-B_{2,u}^2)] \right| \leq \frac{C}{T^{\delta+1}}.$$

THÉOREME 4.6. — Il existe $C > 0$, $T_0 > 1$ tels que, pour tout $T \geq T_0$, $u \geq 1$,

$$(4.13) \quad \left| \varphi \text{Tr}_s [N_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] \right| \leq \frac{C}{u}.$$

Pour $s \in S$, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T,s}$ le produit hermitien (2.2) sur $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ associé à g_T^{TZ}, h^ξ . Soit $\bar{\partial}_T^{Z_s,*}$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}^{Z_s}$ pour le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T,s}$ sur $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$. Soient

$$(4.14) \quad D_T^Z = \bar{\partial}^Z + \bar{\partial}_T^{Z,*}, \quad D^Y = \bar{\partial}^Y + \bar{\partial}^{Y,*}, \quad D^X = \bar{\partial}^X + \bar{\partial}^{X,*}.$$

Soit $P^{\ker D_T^Z}$ la projection orthogonale de $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ sur $\ker D_T^Z$ pour le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$. Dans la suite, on note $P^{\ker D_T^Z}$ par $P_T^{H(Z, \xi_{|Z})}$. Alors, par la théorie de Hodge, l'application

$$s \in \ker D^Z \longmapsto P_T^{H(Z, \xi_{|Z})} s \in \ker D_T^Z$$

est l'identification canonique de $\ker D^Z$ à $\ker D_T^Z$.

Soit $h_T^{H(Z, \xi_{|Z})}$ la métrique sur $H(Z, \xi_{|Z})$ associée à g_T^{TZ}, h^ξ définie au § 2 b). Soient $\nabla_T^{H(Z, \xi_{|Z})}, \nabla^{E_2}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(H(Z, \xi_{|Z}), h_T^{H(Z, \xi_{|Z})}), (E_2, h^{E_2})$. On pose

$$(4.15) \quad Q_T^{H(Z, \xi_{|Z})} = P_T^{H(Z, \xi_{|Z})} Q_T P_T^{H(Z, \xi_{|Z})}.$$

PROPOSITION 4.7. — Quand $T \rightarrow +\infty$, on a

$$(4.16) \quad \nabla_T^{H(Z, \xi_{|Z}), 2} = \nabla^{E_2, 2} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

De plus, on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(4.17) \quad \int_1^{+\infty} \left\{ \varphi \text{Tr}_s [Q_T^{H(Z, \xi|_Z)} \exp(-\nabla_T^{H(Z, \xi|_Z), 2})] \right. \\ \left. + \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{2(N_X - \dim X)}{T} \exp(-\nabla^{E_2, 2}) \right] \right\} dT \\ = -\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}).$$

THÉORÈME 4.8. — Pour tout $T > 0$, on a

$$(4.18) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3, \varepsilon^2, T/\varepsilon} \exp(-B_{3, \varepsilon^2, T/\varepsilon}^2) \right] \\ = \frac{2}{T} \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \varphi_1 \text{Tr}_s [(\tilde{N}_{1, T^2} - \dim X) \exp(-B_{1, T^2}^2)].$$

Si $J' \in \Lambda(T_{\mathbb{C}}^*V) \hat{\otimes} \mathbb{C}(du)$, J' peut s'écrire

$$J' = J'_0 + du J'_1 \quad \text{avec} \quad J'_0, J'_1 \in \Lambda(T_{\mathbb{C}}^*V).$$

On pose

$$(4.19) \quad [J']^{du} = J'_1.$$

D'après [BGS2, th. 2.16], on peut poser :

$$(4.20) \quad E_{1,0} = \lim_{u \rightarrow 0} \text{Tr}_s \left[\tilde{N}_{1,u} \exp \left(-B_{1,u}^2 + du \left(2u \frac{\partial B_{1,u}}{\partial u} \right) \right) \right]^{du}.$$

THÉORÈME 4.9.

(i) Il existe une forme $\mu_0(T)$, C^∞ sur S telle que pour T fixé, quand $u \rightarrow 0$,

$$(4.21) \quad \text{Tr}_s \left[u M_{3,u,T} \exp \left(-B_{3,u,T}^2 + du \frac{\partial}{\partial u} B_{3,u,T} \right) \right]^{du} = \mu_0(T) + O(u).$$

(ii) Il existe une forme E , C^∞ sur S telle que, quand $T \rightarrow +\infty$

$$(4.22) \quad \mu_0(T) = \frac{1}{T} E + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

avec

$$(4.23) \quad \varphi d^S E = (2\pi i)^{-\frac{1}{2}} d^S \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \varphi_1 E_{1,0}.$$

On rappelle aussi que ∇_T^{TZ} est la connexion holomorphe hermitienne sur (TZ, g_T^{TZ}) . Soit R_T^{TZ} sa courbure.

THÉORÈME 4.10. — *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, $\varepsilon \leq T \leq 1$,*

$$(4.24) \quad \left| \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] - \frac{2}{T^3} \int_Z \frac{\tilde{\omega}^W}{2\pi} \text{Td}(TZ, g_{T/\varepsilon}^{TZ}) \text{ch}(\xi, h^\xi) + \int_Z \frac{\partial}{\partial b} \text{Td} \left(\frac{-R_{T/\varepsilon}^{TZ}}{2\pi i} - b(g_{T/\varepsilon}^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (g_{T/\varepsilon}^{TZ}) \right)_{b=0} \text{ch}(\xi, h^\xi) + \frac{1}{\varepsilon} \varphi d^S \mu_0 \left(\frac{T}{\varepsilon} \right) \right| \leq C.$$

THÉORÈME 4.11. — *Il existe $\delta \in]0, 1]$, $C > 0$ tels que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, $T \geq 1$,*

$$(4.25) \quad \left| \varphi \text{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] - \frac{2}{T} \varphi \text{Tr}_s [(N_X - \dim X) \exp(-B_{2,\varepsilon^2}^2)] \right| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}.$$

REMARQUE 4.12. — Les théorèmes 4.5, 4.6 seront démontrés au § 5, la proposition 4.7 au § 6, le théorème 4.8 au § 7, les théorèmes 4.9 et 4.10 au § 8, le théorème 4.11 au § 9. L'hypothèse (3.4) ne sert qu'aux preuves des théorèmes 4.5–4.7.

c) L'asymptotique des I_k^0 .

Dans cette partie, on va procéder comme en [BerB, § 4 (c)], *i.e.* on calcule l'asymptotique de I_k^0 quand $A \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow +\infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$. On n'indiquera que la différence avec [BerB, § 4 (c)], et on omet les détails des calculs

1) *Le terme I_1^0 .* — Soient

$$(4.26) \quad \begin{cases} C_{2,0} = \int_Y [-\text{Td}'(TY, g^{TY}) + \dim Y \text{Td}(TY, g^{TY})] \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \times \text{ch}(R^\bullet \pi_{1*} \xi, h^{R\pi_{1*} \xi}), \\ E_{2,0} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{Tr}_s \left[N_{2,u} \exp \left(-B_{2,u}^2 + du \left(2u \frac{\partial B_{2,u}}{\partial u} \right) \right) \right]^{du}. \end{cases}$$

En utilisant [BGS2, th. 2.16], [B4, (2.50)], les théorèmes 4.5 et 4.6, après avoir passé à la limite $A \rightarrow +\infty$, $T_0 \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$(4.27) \quad I_1^3 = -T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*} \xi}) + \Gamma'(1)(C_{2,0} - \frac{1}{2} \varphi d^S E_{2,0}).$$

2) *Le terme I_2^0 .* — En utilisant la proposition 4.7, on a :

$$I_2^3 = -\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.$$

3) *Le terme I_3^0 .* — Ce terme a déjà été traité en [B4, (6.54)–(6.56)]. Soient

$$(4.28) \quad \begin{cases} C_{3,0} = \int_Z [-\text{Td}'(TZ, g^{TZ}) + \dim Z \text{Td}(TZ, g^{TZ})] \text{ch}(\xi, h^\xi), \\ E_{3,0} = \lim_{u \rightarrow 0} \text{Tr}_s \left[N_{3,u} \exp \left(-B_{3,u}^2 + du \left(2u \frac{\partial B_{3,u}}{\partial u} \right) \right) \right]^{du}. \end{cases}$$

Après avoir passé à la limite $A \rightarrow +\infty, T_0 \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$(4.29) \quad I_3^3 = T_3(\omega^W, h^\xi) + \Gamma'(1) \left\{ \frac{1}{2} \varphi d^S E_{3,0} - C_{3,0} + \varphi \text{Tr}_s [N_Z \exp(-\nabla^{H(Z, \xi|_Z), 2})] \right\}.$$

4) *Le terme I_4^0 .* — La différence principale avec [BerB, p. 115–121] est qu'on doit contrôler le terme $\varphi d^S \mu_0(T)$ dans le théorème 4.10, mais ce terme est déjà traité au théorème 4.9.

Évidemment, quand $T \rightarrow +\infty$

$$(4.31) \quad (g_T^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (g_T^{TZ}) = -\frac{2P^{TX}}{T} + O\left(\frac{1}{T^3}\right).$$

Par le théorème 1.4, on déduit facilement que quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(4.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial b} \text{Td} \left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (g_T^{TZ}) \right)_{b=0} \\ \quad = \frac{2}{T} \pi_1^*(\text{Td}(TY, g^{TY})) \text{Td}'(TX, g^{TX}) + O\left(\frac{1}{T^3}\right), \\ \text{Td} \left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} \right) = \pi_1^*(\text{Td}(TY, g^{TY})) \text{Td}(TX, g^{TX}) + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \end{cases}$$

En utilisant [B4, th. 2.17, 2.20, 2.24], les théorèmes 4.8, 4.9, 4.10 et (4.32), après être passé à la limite $A \rightarrow +\infty, T_0 \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0$, on obtient dans $P^S/P^{S,0}$

$$(4.33) \quad I_4^3 = \int_Z \widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi, h^\xi) - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) - \Gamma'(1) \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \left\{ \pi_{1*} [(\text{Td}'(TX, g^{TX}) - \dim X \text{Td}(TX, g^{TX})) \text{ch}(\xi, h^\xi)] + \text{ch}'(R^\bullet \pi_{1*} \xi, h^{R\pi_{1*} \xi}) \right\}.$$

d) Preuve du théorème 3.5.

Comme dans [B4, §§ 6.6–6.8], on établit l'équation

$$(4.34) \quad \sum_{k=1}^4 I_k^3 = \bar{\partial} \theta_1^3 - \partial \theta_2^3 - \bar{\partial} \partial \theta_3^3.$$

Bien sûr, on doit étudier en détail le terme à droite de (4.8). Comme la situation est plus simple que dans [B4, § 6], on ne le fait pas; le lecteur peut trouver les détails dans [B4, § 6].

On remarque aussi que, si S est compacte et kählérienne, l'espace $P^{S,0}$ est fermé dans P^S pour la topologie de convergence uniforme. Dans ce cas, on voit facilement que, comme $\sum_{k=1}^4 I_k^0 \in P^{S,0}$, on a $\sum_{k=1}^4 I_k^3 \in P^{S,0}$.

Par (4.27), (4.28), (4.30), (4.33), le coefficient de $\Gamma'(1)$ du terme à gauche de (4.34) est nul dans $P^S/P^{S,0}$.

Par (4.27), (4.28), (4.30), (4.33), (4.34), on en déduit le théorème 3.5. \square

5. L'asymptotique des supertraces contenant l'opérateur $\exp(-B_{3,u,T}^2)$ pour u ou T tendant vers l'infini

Le but de ce paragraphe est de montrer les théorèmes 4.5 et 4.6. C'est une extension de [BerB, § 5], qui traite le cas où S est un point.

Dans [BerB, § 5], $TD_T^X + D_T^H$ est un opérateur différentiel elliptique. La nouvelle difficulté est que $B_{3,u,T}$ est une superconnexion, et que seul le carré $B_{3,u,T}^2$ est un opérateur elliptique standard agissant sur chaque fibre. Un problème similaire a déjà été considéré dans [B4, § 9]. C'est pourquoi on va toujours se ramener à la situation traitée dans [B4, § 9].

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on rappelle des notations de [BerB, § 5]. Dans b), on remplace la superconnexion $B_{3,u,T}$ par $A_{u,T}$. Soit $A_T = A_{1,T}$; on obtient alors l'asymptotique de A_T quand $T \rightarrow +\infty$. Dans c), on obtient l'asymptotique de A_T^2 écrite sous forme matricielle relativement à un scindement de $E_0 = \Omega(Z, \xi|_Z)$. Dans d), on décrit le spectre de $A_{u,T}^2$. Dans e), on énonce deux résultats intermédiaires, d'où les théorèmes 4.5 et 4.6 peuvent être facilement déduits. Le reste du paragraphe est consacré à la preuve de ces deux résultats intermédiaires.

Dans f), on donne des estimations pour la résolvante de A_T^2 . Dans g), on obtient une estimation uniforme pour le noyau de $F_u(A_T^2)$. Dans h), on calcule l'asymptotique de l'opérateur $F_u(A_T^2)$ quand $T \rightarrow +\infty$. Dans i), on montre le premier résultat intermédiaire et (4.12). Dans j), on montre le deuxième résultat intermédiaire.

Dans ce paragraphe, on suppose que la forme ω^W sur W est donné par (3.11), et que le fibré holomorphe ξ vérifie l'hypothèse d'acyclicité (3.4). On utilise les mêmes notations qu'aux §§ 1 b), 3 et 4.

a) Le cas où S est un point.

Dans la suite, on rappelle des notations de [BerB, §5] en fixant un point $s \in S$. Alors $\pi_1 : Z \rightarrow Y$ est une submersion holomorphe de fibre compacte X .

On rappelle que $h \in \text{End}(\pi_1^*TY)$ est défini en (1.32).

DÉFINITION 5.1. — Pour $T \geq 1$ et $\alpha \in \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))$, on définit $a_T\alpha \in \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))$ de la manière suivante :

$$(5.1) \quad v_1, \dots, v_p \in \overline{TY} \mapsto a_T\alpha(v_1, \dots, v_p) = \alpha\left(\left(1 + \frac{\hbar}{T^2}\right)^{-1/2} v_1, \dots, \left(1 + \frac{\hbar}{T^2}\right)^{-1/2} v_p\right).$$

Alors a_T agit sur

$$\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \simeq \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y)) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}X)$$

(voir (4.9)) comme $a_T \widehat{\otimes} 1$.

DÉFINITION 5.2. — Pour $T \geq 1$, soient

$$(5.2) \quad B_T = \det^{1/2}\left(1 + \frac{\hbar}{T^2}\right) a_T, \quad C_T = T^{N_X - \dim X} B_T.$$

DÉFINITION 5.3. — Pour $a \in Y$, soient E_a, E_0 les espaces vectoriels des sections \mathcal{C}^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ sur X_a, Z . On a donc

$$(5.3) \quad E_a = \Lambda(T^{*(0,1)}Y)_a \widehat{\otimes} \Omega(X_a, \xi|_{X_a}).$$

Soit dv_Z (resp. dv_X, dv_Y) la forme de volume sur Z (resp. X, Y) associée à la métrique $\pi_1^*g^{TY} \oplus g^{TX}$ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX$ (resp. g^{TX} sur TX, g^{TY} sur TY). Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi, \infty}$ le produit hermitien sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ associé aux métriques $\pi_1^*g^{TY} \oplus g^{TX}, h^\xi$ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX, \xi$. Pour $a \in Y$ et $s, s' \in E_a$, on pose

$$(5.4) \quad \langle s, s' \rangle|_{E_a} = (2\pi)^{-\dim X} \int_{X_a} \langle s, s' \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi, \infty} dv_X.$$

DÉFINITION 5.4. — Pour $\mu \in \mathbb{R}$, soient E_0^μ, E_1^μ les espaces de Sobolev d'ordre μ des sections de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi, \text{Ker } D^X$ sur Z, Y .

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_0^0} = \langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ le produit hermitien sur E_0^0 associé aux métriques $\pi_1^*g^{TY} \oplus g^{TX}, h^\xi$ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX, \xi$ défini en (2.2). Soit $\| \cdot \|_{E_0^0}$ la norme correspondante sur E_0^0 . Soit $E_1^{0,\perp}$ l'espace orthogonal à E_1^0 dans E_0^0 .

Soit $\Omega(Y, \Omega(X, \xi|_X)|_Y)$ l'espace vectoriel des sections \mathcal{C}^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Y) \widehat{\otimes} \Omega(X, \xi|_X)$ sur Y . Donc $\Omega(Y, \Omega(X, \xi|_X)|_Y)$ est l'espace vectoriel des sections \mathcal{C}^∞ de $\pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y)) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ sur Z . Par l'identification (4.9), on a une identification d'espaces vectoriels

$$(5.5) \quad \Omega(Z, \xi|_Z) \simeq \Omega(Y, \Omega(X, \xi|_X)|_Y).$$

Soit $\nabla|_Y^{\Omega(X, \xi|_X)}$ la restriction de la connexion $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)}$ sur $\Omega(X, \xi|_X)$ à Y . Sous l'identification (5.5), $\nabla|_Y^{\Omega(X, \xi|_X)''}$ agit naturellement sur $\Omega(Z, \xi|_Z)$. De même $\bar{\partial}^X$ et D^X agissent sur $\Omega(Z, \xi|_Z)$. Désormais, on pose

$$(5.6) \quad \bar{\partial}^H = \nabla|_Y^{\Omega(X, \xi|_X)''}.$$

Soit $\bar{\partial}_\infty^{H*}$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}^H$ relativement à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$.

DÉFINITION 5.5. — Pour tout $T \in [1, +\infty]$, on pose

$$(5.7) \quad \begin{cases} \bar{\partial}_T^X = B_T \bar{\partial}^X B_T^{-1}, & \bar{\partial}_T^{X*} = B_T^{-1} \bar{\partial}^{X*} B_T, \\ \bar{\partial}_T^H = B_T \bar{\partial}^H B_T^{-1}, & \bar{\partial}_T^{H*} = B_T^{-1} \bar{\partial}^{H*} B_T, \\ D_T^X = \bar{\partial}_T^X + \bar{\partial}_T^{X*}, & D_T^H = \bar{\partial}_T^H + \bar{\partial}_T^{H*}. \end{cases}$$

DÉFINITION 5.6. — Pour $a \in Y$, $T \in [1, +\infty]$, soit $p_{T,a}$ la projection orthogonale de E_a sur $\ker D_{T,a}^X$ associée au produit hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle_{E_a}$. On pose $p_{T,a}^\perp = 1 - p_{T,a}$.

Soit E_1 l'espace vectoriel des sections C^∞ de $\ker D^X$ sur Y . Pour $T \in [1, +\infty]$, soit $E_{1,T}$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de $\ker D_T^X$ sur Y , et soit $q_T : E_{1,\infty} \rightarrow E_{1,T}$ l'application linéaire

$$(5.8) \quad s \in E_{1,\infty} \longmapsto q_T s = p_T B_T s \in E_{1,T}.$$

Soit q_T^* l'adjoint de q_T . On pose

$$(5.9) \quad r_T = (q_T^* q_T)^{1/2}, \quad J_T = q_T r_T^{-1}.$$

Alors $J_T : E_{1,\infty} \rightarrow E_{1,T}$ est un isométrie linéaire.

Dans la suite, si S_T (avec $T \in [1, +\infty]$) est une famille d'opérateurs différentiels, on écrit que, quand $T \rightarrow +\infty$,

$$S_T = S_\infty + O\left(\frac{1}{T^\ell}\right) \quad \text{avec } \ell \in \mathbb{Z},$$

si pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour $T \geq 1$, les normes des coefficients de $S_T - S_\infty$ et de leurs dérivées d'ordre $\leq k$ sont dominées par $CT^{-\ell}$.

b) L'asymptotique de la superconnexion A_T quand T tend vers l'infini.

Pour $U \in T_{\mathbb{R}}Z$, on note $c(U)$ l'action de l'algèbre de Clifford sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$ associée à $(TZ, \pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX})$. Alors pour

$$U = U^{T^H Z} + U^{TX} \in T_{\mathbb{R}}Z,$$

avec $U^{T^H Z} \in T_{\mathbb{R}}^H Z$ et $U^{TX} \in T_{\mathbb{R}}X$, on a

$$(5.10) \quad C_T c_T \left(\left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1/2} U^{T^H Z} + T U^{TX} \right) C_T^{-1} = c(U^{T^H Z}) + c(U^{TX}).$$

Soit g_α une base de $T_{\mathbb{R}}S$; soient e_i, w_i des bases orthonormées de $(T_{\mathbb{R}}X, g^{TX})$ et (TX, g^{TX}) ; soient f_ℓ, θ_ℓ des bases orthonormées de $(T_{\mathbb{R}}Y, g^{TY})$ et (TY, g^{TY}) ; soient $g^\alpha, e^i, w^i, f^\ell, \theta^\ell$ les bases duales associées. Soient enfin

$$(5.11) \quad f_{\ell,T} = \left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1/2} f_{\ell,1}^H, \quad \theta_{\ell,T} = \left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1/2} \theta_{\ell,1}^H.$$

Alors $Te_i, f_{\ell,T}$ (resp. $Tw_i, \theta_{\ell,T}$) est une base orthonormée de $(T_{\mathbb{R}}Z, g_T^{TZ})$ (resp. (TZ, g_T^{TZ})).

On rappelle que $\nabla_T^{TZ}, \nabla^{TX}, \nabla^{TY}, \nabla^\xi$ sont les connexions holomorphes hermitiennes sur

$$(TZ, g_T^{TZ}), \quad (TX, g^{TX}), \quad (TY, g^{TY}), \quad (\xi, h^\xi).$$

Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}, \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ les connexions sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X), \Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ induites par ∇^{TX}, ∇^{TY} . Soient $R_T^{TZ}, R^{TX}, R^{TY}, R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}, L^\xi$ les courbures associées à $\nabla_T^{TZ}, \nabla^{TX}, \nabla^{TY}, \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}, \nabla^\xi$.

Soit $\nabla_{\pi_1^*TY} = \pi_1^*\nabla^{TY}$; alors ${}^0\nabla^{TZ} = \nabla_{\pi_1^*TY} \oplus \nabla^{TX}$ est une connexion sur

$$TZ \simeq \pi_1^*TY \oplus TX.$$

Soient $\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}, {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}$ les connexions induites par $\nabla_T^{TZ}, {}^0\nabla^{TZ}$ sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$. Soient $\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi}, {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi}$ les connexions sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ induites par $\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}, {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}, \nabla^\xi$ définies en (2.1).

Pour $T > 0$, on définit la connexion $\nabla_T^{\Omega(Z, \xi|_Z)}$ sur $\Omega(Z, \xi|_Z)$ comme en (2.3) correspondant à g_T^{TZ}, h^ξ . En effet, si s est une section C^∞ de $\Omega(Z, \xi|_Z), U \in T_{\mathbb{R}}S$, on pose

$$(5.12) \quad \nabla_{T,U}^{\Omega(Z, \xi|_Z)} s = \nabla_{T, U_{3,T}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} s.$$

De même, on définit une connexion ${}^0\nabla^{\Omega(Z, \xi|_Z)}$ sur $\Omega(Z, \xi|_Z)$ par la formule : si s est une section C^∞ de $\Omega(Z, \xi|_Z), U \in T_{\mathbb{R}}S$,

$$(5.13) \quad {}^0\nabla_U^{\Omega(Z, \xi|_Z)} s = {}^0\nabla_{U_{3,\infty}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} s.$$

Comme dans [BerB, § 5], on préfère considérer les opérateurs sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$ dans le cadre d'une métrique fixée. On va conjuguer la superconnexion $B_{3,u,T}$ définie au paragraphe 4 a).

DÉFINITION 5.7. — Pour $T \geq 1$, soient

$$(5.14) \quad A_{u,T} = C_T B_{3,u^2,T} C_T^{-1}, \quad A_T = A_{1,T}.$$

Comme $N_{3,u^2,T}$ est invariant par la conjugaison, on a

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \varphi \operatorname{Tr}_s [N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2)] &= \varphi \operatorname{Tr}_s [N_{3,u^2,T} \exp(-A_{u,T}^2)], \\ \varphi \operatorname{Tr}_s [M_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2)] &= \varphi \operatorname{Tr}_s [C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1} \exp(-A_{u,T}^2)]. \end{aligned}$$

Soit $A_T^{(0)}$ (resp. $A_T^{(>0)}$) la partie de A_T de degré 0 (resp. > 0) dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$. D'après [BerB, prop. 5.9], (2.7) et (5.14), on a

$$(5.16) \quad \begin{cases} A_T^{(0)} = TD_T^X + D_T^H, \\ A_T^{(>0)} = C_T \left(\nabla_T^{\Omega(Z, \xi|_Z)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} c_T(T_{3,T}) \right) C_T^{-1}. \end{cases}$$

Soit \mathcal{B} la superconnexion sur E_0

$$(5.17) \quad \mathcal{B} = {}^0\nabla^{\Omega(Z, \xi|_Z)} + D_\infty^H - \frac{1}{2\sqrt{2}} c(T_2).$$

THÉORÈME 5.8. — *Quand $T \rightarrow +\infty$, on a :*

$$(5.18) \quad A_T = TD^X + \mathcal{B} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Preuve. — i) D'après (5.2), on a

$$(5.19) \quad B_T = 1 + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Par (5.7) et (5.19), on a

$$(5.20) \quad D_T^H = D_\infty^H + O\left(\frac{1}{T^2}\right), \quad D_T^X = D^X + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

ii) En utilisant la proposition 1.2, (1.35) et (5.10), pour $U \in T_{\mathbb{R}}S$, on a :

$$(5.21) \quad \begin{aligned} C_T \nabla_{T,U}^{\Omega(Z, \xi|_Z)} C_T^{-1} &= B_T {}^0\nabla_{U_{3,T}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} B_T^{-1} \\ &\quad + \overline{\langle (T^2 + h)^{-1} \nabla_{U_{3,T}^H}^{\pi_1^{TY'}} h \bar{\theta}_{\ell,T}, \theta_{m,T} \rangle_{g_{Tz}^{Tz}} \bar{\theta}^\ell \wedge i_{\bar{\theta}_m}} \\ &\quad + \frac{1}{T} \langle A(U_{3,T}^H) \bar{\theta}_{\ell,T}, w_j \rangle_{g_{Tx}} \bar{\theta}^\ell \wedge i_{\bar{w}_j} \\ &\quad - T \langle (T^2 + h)^{-1} A^*(U_{3,T}^H) \bar{w}_j, \theta_\ell \rangle_{g_{Tz}^{Tz}} \bar{w}^j \wedge i_{\bar{\theta}_\ell} \\ &= {}^0\nabla_{U_{3,\infty}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} + O\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

iii) D'après la proposition 1.2, le théorème 1.6 et (5.10), on a :

$$(5.22) \quad \begin{aligned} C_T c_T(T_{3,T}) C_T^{-1} &= \sum \frac{1}{2} \langle T_{3,T}(g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H), T e_i \rangle_{g_{Tz}^{Tz}} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge c(e_i) \\ &\quad + \sum \frac{1}{2} \langle T_{3,T}(g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H), f_{\ell,T} \rangle_{g_{Tz}^{Tz}} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge c(f_{\ell,1}^H) \\ &= \sum \frac{1}{2} \langle T_{3,\infty}(g_{\alpha,3,\infty}^H, g_{\beta,3,\infty}^H), f_{\ell,1}^H \rangle_{\pi_1^{TY}} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge c(f_{\ell,1}^H) + O\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

D'après (1.20) et (5.22), on a

$$(5.23) \quad C_T c_T(T_{3,T}) C_T^{-1} = \sum \frac{1}{2} \langle T_2(g_{\alpha,2}^H, g_{\beta,2}^H), f_\ell \rangle_{g_{TY}} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge c(f_{\ell,1}^H) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

En utilisant (5.19)–(5.23), on a (5.18).

On a bien terminé la preuve du théorème 5.8. \square

THÉORÈME 5.9. — *Pour tout $T \in [1, +\infty[$, l'opérateur $J_T^{-1} p_T A_T p_T J_T$ est une superconnexion sur $E_{1,\infty}$. Quand $T \rightarrow +\infty$, on a :*

$$(5.24) \quad J_T^{-1} p_T A_T p_T J_T = B_{2,1} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Preuve. — Soit $\nabla^{R\pi_{1*}\xi}$ la connexion holomorphe hermitienne sur $(R^*\pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi})$. Soit $\nabla^{\Omega(X, \xi|_X)}$ la connexion sur $\Omega(X, \xi|_X)$ comme en (2.3) correspondant à g^{TX}, h^ξ . Alors par [BKö, th. 3.5], on a :

$$(5.25) \quad \nabla^{R\pi_{1*}\xi} = p_\infty \nabla^{\Omega(X, \xi|_X)} p_\infty.$$

En utilisant [BerB, (5.34)], (5.17) et (5.25), on a :

$$(5.26) \quad p_\infty \mathcal{B} p_\infty = B_{2,1}.$$

Par [BerB, (5.47)], on a :

$$(5.27) \quad p_T = p_\infty + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

En utilisant le théorème 5.8, (5.9) et (5.26), on a (5.24). \square

c) La structure de l'opérateur A_T^2 quand T tend vers l'infini.

Dans la suite, on pose

$$(5.28) \quad p = p_\infty, \quad p^\perp = p_\infty^\perp.$$

Maintenant, on va considérer A_T^2 comme un opérateur de $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} E_0$ dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} E_0$. On pose

$$(5.29) \quad E_T = p A_T^2 p, \quad F_T = p A_T^2 p^\perp, \quad G_T = p^\perp A_T^2 p, \quad H_T = p^\perp A_T^2 p^\perp.$$

Alors on écrit A_T^2 sous forme matricielle correspondant au scindage $E_0^0 = E_1^0 \oplus E_1^{0,\perp}$.

$$(5.30) \quad A_T^2 = \begin{pmatrix} E_T & F_T \\ G_T & H_T \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 5.10. — *Il existe des opérateurs E, F, G, H tels que, pour $T \rightarrow +\infty$,*

$$(5.31) \quad \begin{cases} E_T = E + O\left(\frac{1}{T}\right), & F_T = TF + O(1), \\ G_T = TG + O(1), & H_T = T^2H + O(T). \end{cases}$$

Soit

$$(5.32) \quad Q_\infty = [D^X, \mathcal{B}].$$

Alors $Q_\infty(E_1^0) \subset E_1^{0,\perp}$, et

$$(5.33) \quad Q_\infty = \frac{1}{2} \sum c(e_i)c(f_{\ell,1}^H) [(R^{\Lambda(T^{*(0,1)X}}) + L^\xi)(e_i, f_{\ell,1}^H) - {}^0\nabla_{T_1(e_i, f_{\ell,1}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum c(e_i)g^\alpha [(R^{\Lambda(T^{*(0,1)X}}) + L^\xi)(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H) - {}^0\nabla_{T_1(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}].$$

On a aussi

$$(5.34) \quad E = p\mathcal{B}^2p, \quad F = pQ_\infty p^\perp, \quad G = p^\perp Q_\infty p, \quad H = p^\perp D^{X,2} p^\perp.$$

Preuve. — D'après le théorème 5.8, on a

$$(5.35) \quad E = p\mathcal{B}^2p.$$

D'après le théorème 5.8, on sait aussi que le coefficient de T (resp. T^2) dans l'asymptotique de A_T^2 quand $T \rightarrow +\infty$ est $[D^X, \mathcal{B}]$ (resp. $D^{X,2}$).

D'après [BerB, (5.65), (5.66)], on a

$$(5.36) \quad \begin{cases} D^X = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum c(e_i) {}^0\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}, \\ D_\infty^H = \frac{1}{\sqrt{2}} c(f_\ell) {}^0\nabla_{f_{\ell,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}, \\ [D^X, D_\infty^H] = \frac{1}{2} \sum c(e_i)c(f_\ell) [(R^{\Lambda(T^{*(0,1)X}}) + L^\xi)(e_i, f_{\ell,1}^H) \\ - {}^0\nabla_{T_1(e_i, f_{\ell,1}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}]. \end{cases}$$

En utilisant (5.13), (5.36), on peut calculer comme dans [BerB, (5.66)],

$$(5.37) \quad [D^X, {}^0\nabla^{\Omega(Z, \xi|Z)}] \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum c(e_i)g^\alpha [(R^{\Lambda(T^{*(0,1)X}}) + L^\xi)(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H) - {}^0\nabla_{T_1(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)Z}) \otimes \xi}].$$

Par (5.32), (5.36) et (5.37), on a (5.33).

Par (5.32), on a aussi

$$(5.38) \quad pQ_\infty p = 0.$$

On a montré le théorème 5.10. \square

d) Le spectre de $A_{u,T}^2$.

Comme on suppose que S est compacte, toutes les estimations qui suivent seront uniformes en $s \in S$. Si C est un opérateur, on note $\text{Sp}(C)$ le spectre de C . Soit

$$(5.39) \quad R_{u,T} = C_T \left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|Z)} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2}u} \right)^2 C_T^{-1} + u \left[C_T \left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|Z)} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2}u} \right) C_T^{-1}, A_T^{(0)} \right].$$

Alors

$$(5.40) \quad A_{u,T}^2 = u^2 A_T^{(0),2} + R_{u,T}.$$

Par [B1, th. 2.5], $R_{u,T}$ est la somme de formes de degré strictement positif dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$, à valeur dans les opérateurs différentiels d'ordre 1 le long de la fibre Z .

Les opérateurs $A_{u,T}^2$ et $A_T^{(0),2}$ sont des opérateurs non bornés agissant sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} E_0$, dont le domaine est $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} E_0^2$.

THÉORÈME 5.11. — *Il existe $c_1 > 0, T_0 \geq 1$ tels que, pour tout $T \geq T_0$,*

$$(5.41) \quad \text{Sp}(A_T^{(0),2}) \cap \{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \leq c_1 \} \subset \{0\}$$

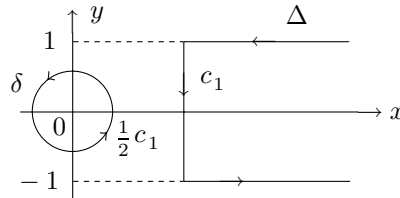
Preuve. — En utilisant (3.4), [BerB, § 6 (d)], on a (5.41). \square

D'après [B4, prop. 9.2], on a :

PROPOSITION 5.12. — *Pour tout $u > 0, T > 0$,*

$$(5.42) \quad \text{Sp}(A_{u,T}^2) = \text{Sp}(u^2 A_T^{(0),2}).$$

Soit $\Gamma' = \delta \cup \Delta$ le contour suivant dans \mathbb{C} :



Par le théorème 5.11 et la proposition 5.12, il est clair que pour $u \geq 1$ et $T \geq T_0$, on a

$$(5.43) \quad \begin{cases} \exp(-A_{u,T}^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - u^{-2} A_{u,T}^2} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A_{u,T}^2} d\lambda, \\ \exp(-u^2 A_T^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda. \end{cases}$$

e) Deux résultats intermédiaires.

Dans la suite, u_0 est une constante positive fixée.

Pour $u > 0$, soit $\psi_u : \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \rightarrow \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$ l'application

$$(5.44) \quad \alpha \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \longrightarrow u^{-\deg \alpha} \alpha \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S).$$

Alors ψ_u agit comme $\psi_u \widehat{\otimes} 1$ sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$.

PROPOSITION 5.13. — Pour $u > 0$ et $T > 0$, on a :

$$(5.45) \quad \begin{cases} A_{u,T} = u\psi_u A_T \psi_u^{-1}, & B_{2,u^2} = u\psi_u B_{2,1} \psi_u^{-1}, \\ N_{3,u^2,T} = \psi_u N_{3,1,T} \psi_u^{-1}, & N_{2,u^2} = \psi_u N_{2,1} \psi_u^{-1}, \\ M_{3,u^2,T} = \psi_u M_{3,1,T} \psi_u^{-1}. \end{cases}$$

Preuve. — C'est évident. \square

PROPOSITION 5.14. — Pour $u > 0, T > 0$, on a :

$$(5.46) \quad \begin{cases} \text{Tr}_s [C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1} \exp(-A_{u,T}^2)] \\ \quad = \psi_u \text{Tr}_s [C_T M_{3,1,T} C_T^{-1} \exp(-u^2 A_T^2)], \\ \text{Tr}_s [N_{3,u^2,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - u^{-2} A_{u,T}^2} d\lambda] \\ \quad = \psi_u \text{Tr}_s [N_{3,1,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda], \end{cases}$$

et pour $u > 0$, on a :

$$(5.47) \quad \begin{aligned} \text{Tr}_s [N_{2,u^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - u^{-2} B_{2,u^2}^2} d\lambda] \\ = \psi_u \text{Tr}_s [N_{2,1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - B_{2,1}^2} d\lambda]. \end{aligned}$$

Preuve. — C'est une conséquence directe de la proposition 5.13. \square

THÉORÈME 5.15. — Il existe $\delta \in]0, 1]$ et $C > 0$ tels que, pour $u \geq u_0$ et $T \geq T_0$,

$$(5.48) \quad \left| \text{Tr}_s [N_{3,1,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda] - \text{Tr}_s [N_{2,1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - B_{2,1}^2} d\lambda] \right| \leq \frac{C}{T^\delta}.$$

Il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que, pour $u \geq u_0$ et $T \geq T_0$,

$$(5.49) \quad \left| \text{Tr}_s \left[N_{3,1,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\exp(-u^2 \lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda \right] \right| \leq c \exp(-Cu^2).$$

THÉORÈME 5.16. — Il existe $\delta \in]0, 1]$ et $c > 0$ tels que, pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$(5.50) \quad \left| \text{Tr}_s \left[N_{3,u^2,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A_{u,T}^2} d\lambda \right] - \text{Tr}_s \left[N_{2,u^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - B_{2,u^2}^2} d\lambda \right] \right| \leq \frac{C}{T^\delta}.$$

Il existe $C > 0$ tel que, pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$(5.51) \quad \left| \text{Tr}_s \left[N_{3,u^2,T} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A_{u,T}^2} d\lambda \right] \right| \leq \frac{C}{u}.$$

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve des théorèmes 5.15 et 5.16.

REMARQUE 5.17. — Comme dans [B4, rem. 9.7], les équations (4.11), et le théorème 4.6 peuvent être déduits des théorèmes 5.15 et 5.16.

f) Propriétés de régularité de la résolvante de A_T^2 .

Soit e_1, \dots, e_{2n_0} (resp. f_1, \dots, f_{2m_0}) une base orthonormée locale C^∞ de $T_{\mathbb{R}}X$ (resp. $T_{\mathbb{R}}Y$). Pour $s, s' \in E_0$, on pose :

$$(5.52) \quad |s|_0 = \|s\|_{E_0^0}, \quad \langle s, s' \rangle_0 = \langle s, s' \rangle_{E_0^0}.$$

DÉFINITION 5.18. — Pour $T > 1$ et $s \in E_0$, on pose :

$$(5.53) \quad |s|_{T,1}^2 = |p_T s|^2 + T^2 |p_T^\perp s|_0^2 + \sum_{\ell} |{}^0\nabla_{f_{\ell,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} s|_0^2 + T^2 \sum_i |{}^0\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} p_T^\perp s|_0^2.$$

Alors (5.53) définit une norme sur E_0^1 , et $(E_0^1, | \cdot |_{T,1})$ se plonge continûment dans $(E_0^0, | \cdot |_0)$. On identifie E_0^0 à son antidual par $\langle \cdot \rangle_0$. Alors on peut identifier E_0^{-1} à l'antidual de E_0^1 . Soit $| \cdot |_{T,-1}$ la norme sur E_0^{-1} associée à $| \cdot |_{T,1}$. Alors on a les inclusions continues denses suivantes dont les normes sont inférieures à 1,

$$(5.54) \quad E_0^1 \longrightarrow E_0^0 \longrightarrow E_0^{-1}.$$

Soit g^{TS} une métrique sur TS . Alors la définition de $|s|_0, |s|_{T,1}$ se prolonge naturellement à $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$. Soit

$$(5.55) \quad R_T = R_{1,T} = [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}] + A_T^{(>0),2}.$$

THÉORÈME 5.19. — Il existe $C_1, C_2, C_3 > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $T \geq T_0, s, s' \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$,

$$(5.56) \quad \begin{cases} |A_T^{(0)} s|_0^2 \geq C_1 |s|_{T,1}^2 - C_2 |s|_0^2, \\ |\langle A_T^{(0)} s, A_T^{(0)} s' \rangle_0| \leq C_3 |s|_{T,1} |s'|_{T,1}, \\ |\langle R_T s, s' \rangle_0| \leq C_3 (|s|_{T,1} |s'|_0 + |s|_0 |s'|_{T,1}). \end{cases}$$

Preuve. — D'après la preuve de [BerB, th. 5.19], il existe $C > 0, T_0 > 0$ tels que, pour $T \geq T_0, s \in E_{1,T}^{1,\perp}$,

$$(5.57) \quad |A_T^{(0)} s|_0^2 \geq C [\|s\|_{E_0^1}^2 + T^2 (|D_T^X s|^2 + |s|_0^2)].$$

En utilisant [BerB, th. 5.17, et 5.18], (5.53), on a la première inégalité de (5.56).

La deuxième inégalité de (5.56) est triviale.

Par (5.16), pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$, on a

$$(5.58) \quad \begin{aligned} |\langle R_T s, s' \rangle_0| \\ \leq c (|s|_{T,1} |s'|_0 + |s|_0 |s'|_{T,1}) + |\langle [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}] p_T s, p_T s' \rangle_0|. \end{aligned}$$

Mais

$$(5.59) \quad \begin{aligned} |\langle [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}] p_T s, p_T s' \rangle_0| &= |\langle [D_T^H, A_T^{(>0)}] p_T s, p_T s' \rangle_0| \\ &\leq c |s|_{T,1} |s'|_0. \end{aligned}$$

D'après (5.58), (5.59), on a la troisième inégalité de (5.56). On a bien terminé la preuve du théorème. \square

Comme S est compacte, il existe U_1, \dots, U_m (resp. $U'_1, \dots, U'_{m'}$) une famille de sections \mathcal{C}^∞ de $T_{\mathbb{R}}Y$ (resp. $T_{\mathbb{R}}X$) telle que, pour tout $y \in V$, (resp. $x \in W$), $U_1(y), \dots, U_m(y)$ (resp. $U'_1(x), \dots, U'_{m'}(x)$) engendrent $(T_{\mathbb{R}}Y)_y$ (resp. $(T_{\mathbb{R}}X)_x$).

DÉFINITION 5.20. — Pour $T > 0$, soit \mathcal{D}_T la famille d'opérateurs agissant sur E_0

$$(5.60) \quad \mathcal{D}_T = \left\{ p_T {}^0\nabla_{U_{\ell,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} p_T, p_T^\perp {}^0\nabla_{U_{\ell,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} p_T^\perp, p_T^\perp {}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} p_T^\perp \right\}.$$

THÉORÈME 5.21. — Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que, pour $T \geq 1$, $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{D}_T$ et $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} E_0$, on a :

$$(5.61) \quad \left| \langle [Q_1, [Q_2, \dots [Q_k, A_T^2], \dots]]s, s' \rangle_0 \right| \leq C_k |s|_{T,1} \cdot |s'|_{T,1}.$$

Preuve. — Comme

$$\left[{}^0\nabla_{U_{\ell,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi}, p_T \right], {}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} p_T, p_T {}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi}$$

sont des opérateurs dont les restrictions aux fibres X_b (avec $b \in V$) ont des noyaux \mathcal{C}^∞ uniformément bornés pour $x, x' \in X_b, b \in V$ et $T \geq 1$, en procédant comme dans la preuve de [B4, th. 9.17], on obtient le théorème. \square

Soit

$$(5.62) \quad F_u(A_T^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} e^{-u^2\lambda} (\lambda - A_T^2)^{-1} d\lambda.$$

Soient $P_{u,T}(x, x'), F_u(A_T^2)(x, x')$ (avec $x, x' \in Z_s$) les noyaux \mathcal{C}^∞ des opérateurs $\exp(-u^2 A_T^2)$ et $F_u(A_T^2)$ relativement à $dv_Z(x') / (2\pi)^{\dim Z}$.

g) La borne uniforme des noyaux de $\exp(-u^2 A_T^2)$ et $F_u(A_T^2)$.

THÉORÈME 5.22.

(i) Pour $m \in \mathbb{N}$ et $0 < u_1 < u_2$ fixés, il existe $C > 0$ tel que, pour $x, x' \in Z_s$, $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq T_0$,

$$(5.63) \quad \sup_{|\alpha|, |\alpha'| \leq m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial x^\alpha \partial x'^{\alpha'}} P_{u,T}(x, x') \right| \leq C.$$

(ii) Pour $m \in \mathbb{N}$, il existe $c > 0$ et $C' > 0$ tels que, pour $x, x' \in Z_s$, $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$(5.64) \quad \sup_{|\alpha|, |\alpha'| \leq m} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial x^\alpha \partial x'^{\alpha'}} F_u(A_T^2)(x, x') \right| \leq c \exp(-C' u^2).$$

Preuve. — En utilisant les théorèmes 5.19 et 5.21, comme

$$\left[{}^0 \nabla_{U_{\ell,1}^H} \Lambda(T^{*(0,1)} Z) \otimes \xi, p_T \right], {}^0 \nabla_{U_i'} \Lambda(T^{*(0,1)} Z) \otimes \xi, p_T, p_T {}^0 \nabla_{U_i'} \Lambda(T^{*(0,1)} Z) \otimes \xi$$

sont des opérateurs dont les restrictions aux fibres X_b (avec $b \in V$) ont des noyaux C^∞ uniformément bornées pour $x, x' \in X_b$, $b \in V$, $T \geq 1$, en procédant comme dans la preuve de [B4, th. 9.20], on a le théorème 5.22. \square

h) L'asymptotique de l'opérateur $F_u(A_T^2)$ quand T tend vers l'infini.

DÉFINITION 5.23. — Soit Ξ l'opérateur différentiel d'ordre 2 agissant sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \hat{\otimes} E_1$,

$$(5.65) \quad \Xi = p(E - FH^{-1}G)p.$$

THÉORÈME 5.24. — On a l'identité

$$(5.66) \quad B_{2,1}^2 = \Xi.$$

Preuve. — D'après (5.26), (5.32) et (5.34), on a (5.66). \square

Pour $A \in L(E_0^0, E_0^0)$, on note $\|A\|^{0,0}$ la norme de A relativement à $|\cdot|_0$.

THÉORÈME 5.25.

(i) Pour $0 < u_1 < u_2$ fixés, il existe $C > 0$ tel que, pour $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq T_0$,

$$(5.67) \quad \left\| \exp(-u^2 A_T^2) - p_T J_T \exp(-u^2 B_{2,1}^2) J_T^{-1} p_T \right\|^{0,0} \leq \frac{c}{T^{1/4}}.$$

(ii) Il existe $c > 0, C > 0$ tels que, pour $u \geq u_0, T \geq T_0$,

$$(5.68) \quad \|F_u(A_T^2) - p_T J_T F_u(B_{2,1}^2) J_T^{-1} p_T\|^{0,0} \leq \frac{c}{T^{1/4}} \exp(-Cu^2).$$

Preuve. — En utilisant les théorèmes 5.10 et 5.24, en procédant comme dans la preuve de [BL, th. 13.42], on a le théorème 5.25. \square

i) Preuves du théorème 5.15 et de (4.12).

Par (4.1), (4.3) et (5.10) (on peut aussi se référer au § 7), pour $u > 0$ fixé, on a

$$(5.69) \quad \left| C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1} - \frac{2}{T} (N_X - \dim X) \right| \leq \frac{C}{T^3}.$$

En utilisant (5.15), la proposition 5.14, les théorèmes 5.22 et 5.25, et en procédant comme en [BL, §11 (p) et §13 (q)], on a le théorème 5.15 et (4.12). \square

j) Preuve du théorème 5.16.

DÉFINITION 5.26. — Pour $a \in \mathbb{C}^*, b, c \in \mathbb{C}$ et $T \geq 1$, on pose

$$(5.70) \quad \mathcal{G}_{a,b,c,T} = \frac{1}{a^2} A_T^{(0),2} + C_T \left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|Z)} - \frac{b}{2\sqrt{2}u} c_T(T_{3,T}) \right)^2 C_T^{-1} \\ + u \left[C_T \left(c \nabla_T^{\Omega(Z,\xi|Z)} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2}u} \right) C_T^{-1}, A_T^{(0)} \right],$$

Ces opérateurs sont les analogues des opérateurs définis dans [B4, (9.151)]. En procédant comme en [B4, § 9 (m)], on a aussi des résultats analogues à [B4, th. 9.29 et 9.30] pour l'opérateur $\mathcal{G}_{a,b,c,T}$.

Évidemment

$$(5.71) \quad A_{u,T}^2 = \mathcal{G}_{1/u,1/u,u,T}.$$

En procédant comme en [B4, § 9 (m) et (n)], on a le théorème 5.16. \square

6. Preuve de la proposition 4.7

On utilise les mêmes notations qu'aux §§ 4 b) et 5 a). On suppose aussi que ξ vérifie l'hypothèse (3.4).

On rappelle que $h \in \text{End}(T^H Z)$ est défini à la définition 1.8.

Pour $\alpha, \alpha' \in E_2 = H(Z, \xi|Z) = H^0(Z, \xi|Z)$, on a :

$$(6.1) \quad \begin{cases} \langle \alpha, \alpha' \rangle_{hE_2} = \frac{1}{(2\pi)^{\dim Z}} \int_Z \langle \alpha, \alpha' \rangle_{h\xi} dv_Y dv_X, \\ \langle \alpha, \alpha' \rangle_{h_T^{H(Z,\xi|Z)}} = \frac{1}{(2\pi)^{\dim Z}} T^{-2 \dim X} \int_Z \det \left(1 + \frac{h}{T^2} \right) \langle \alpha, \alpha' \rangle_{h\xi} dv_Y dv_X. \end{cases}$$

Soit $h'_T = T^{2 \dim X} h_T^{H(Z, \xi|_Z)}$ la métrique sur $H(Z, \xi|_Z)$. Alors par (6.1), on sait que

$$(6.2) \quad h'_T = h^{E_2} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

En utilisant (6.1), on a

$$(6.3) \quad \nabla_T^{H(Z, \xi|_Z)} = \nabla^{E_2} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Par [BKö, (3.31)], on a

$$(6.4) \quad Q_T^{H(Z, \xi|_Z)} = -(h'_T)^{-1} \frac{\partial}{\partial T} h'_T + \frac{2 \dim X}{T}.$$

En utilisant (6.3) et (6.4), on peut donc poser

$$(6.5) \quad \begin{aligned} & H(H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ &= \int_1^{+\infty} \left\{ \varphi \operatorname{Tr}_s [Q_T^{H(Z, \xi|_Z)} \exp(-\nabla_T^{H(Z, \xi|_Z), 2})] \right. \\ & \quad \left. + \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{2(N_X - \dim X)}{T} \exp(-\nabla^{E_2, 2}) \right] \right\} dT. \end{aligned}$$

D'après [BGS1, cor. 1.30 et rem. 1.31], (6.2), (6.5), on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(6.6) \quad H(H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) = -\tilde{\operatorname{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}).$$

Par (6.5) et (6.6), on a bien terminé la preuve de la proposition 4.7. \square

7. Preuve du théorème 4.8

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème 4.8, relatif à l'asymptotique quand $\varepsilon \rightarrow 0$, de certaines supertraces où apparaît l'opérateur $B_{3, \varepsilon^2, T/\varepsilon}$. Ce paragraphe est une extension de [BerB, § 7], dans laquelle le théorème 4.8 est établi quand S est un point.

En remplaçant le théorème d'indice local par le théorème d'indice local relatif, on applique les techniques de [BerB, §7], à notre situation.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on remplace l'opérateur $B_{3, \varepsilon^2, T/\varepsilon}$ par un opérateur conjugué $L_{3, \varepsilon, T}^0$ et on établit une formule de Lichnerowicz pour $L_{3, \varepsilon, T}^0$. Dans b), on fait un changement de coordonnées locales sur Y_{s_0} et un changement d'échelle [Ge] sur l'algèbre de Clifford [BeGeV]. Dans c), on calcule l'asymptotique des opérateurs $L_{3, \varepsilon, T}^3$ et $M_{3, \varepsilon, T}^3$ quand ε tend vers zéro. Dans d), on conjugue l'opérateur $L_{3, 0, T}^3$ pour faire apparaître la superconnexion de Levi-Civita. Dans e), on montre le théorème 4.8.

On utilise les mêmes notations qu'aux paragraphes 1 b), 4, 5 a) et 5 b).

a) Une formule de Lichnerowicz.

Dans cette partie, on va utiliser souvent les notations du § 5 b).

On rappelle qu'on note e_i, f_ℓ, θ_ℓ des bases orthonormées de $(T_{\mathbb{R}}X, g^{T_{\mathbb{R}}X}), (T_{\mathbb{R}}Y, g^{T_{\mathbb{R}}Y}), (TY, g^{TY})$, et qu'on note e^i, f^i, θ^ℓ les bases duales associées. Soit g_α une base de $T_{\mathbb{R}}S$; soit g^α la base duale associée de $T_{\mathbb{R}}^*S$.

On va utiliser la notation suivante : soit C une section \mathcal{C}^∞ de $T_{\mathbb{R}}^*X \widehat{\otimes} \text{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)$; alors

$$(7.1) \quad (\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} + C(e_i))^2 = \sum_i (\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} + C(e_i))^2 - \nabla_{\sum_i \nabla_{e_i}^{TX} e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} - C(\sum_i \nabla_{e_i}^{TX} e_i).$$

On pose

$$(7.2) \quad \begin{cases} M_{3,\varepsilon,T}^0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{N_X} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{-N_X}, \\ L_{3,\varepsilon,T}^0 = \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{N_X} B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2 \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{-N_X}. \end{cases}$$

Alors on a :

$$(7.3) \quad \text{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] = \text{Tr}_s [M_{3,\varepsilon,T}^0 \exp(-L_{3,\varepsilon,T}^0)].$$

En utilisant [BerB, (7.5) et (7.36)], (4.1), (4.3), (5.10) et (7.2), on a

$$(7.4) \quad M_{3,\varepsilon,T}^0 = \frac{i}{T^3} \widetilde{\omega}^W(g_{\alpha,3,T/\varepsilon}^H, g_{\beta,3,T/\varepsilon}^H) g^\alpha \wedge g^\beta + \frac{\sqrt{2}i}{T^2} \widetilde{\omega}^W(g_{\alpha,3,T/\varepsilon}^H, e_i) g^\alpha c(e_i) + \frac{\sqrt{2}i\varepsilon}{T^2} \widetilde{\omega}^W(g_{\alpha,3,T/\varepsilon}^H, f_{\ell,T/\varepsilon}) g^\alpha c_{T/\varepsilon}(f_{\ell,T/\varepsilon}) + \frac{2}{T} (N_X - \dim X) - \frac{2\varepsilon^2}{T^3} \left\langle h \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{T^2} h\right)^{-1} \bar{\theta}_\ell, \theta_m \right\rangle_{g^{TY}} i_{\bar{\theta}_m} \wedge \bar{\theta}^\ell.$$

Soit

$$(7.5) \quad L'_{3,T}^\xi = L^\xi + \frac{1}{2} \text{Tr} R_T^{TZ}.$$

En utilisant le théorème 1.4, on sait que, quand $T \rightarrow +\infty$, on a :

$$(7.6) \quad \text{Tr} R_T^{TZ} = \text{Tr} R^{TX} + \text{Tr} R^{TY} + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Soit $K_{1/\varepsilon}^Z$ la courbure scalaire de $(TZ, \tilde{g}^{TZ} + \frac{1}{\varepsilon^2} \pi_1^* g^{TY})$. Soit $'\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$:

$$(7.7) \quad '\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} = T^{N_X} \nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} T^{-N_X}.$$

Pour simplifier, dans l'équation suivante, on identifie g_α, f_ℓ aux relèvements $g_{\alpha,3,T/\varepsilon}^H, f_{\ell,T/\varepsilon}$. En utilisant la formule de Lichnerowicz [B1, th. 3.6], on a

$$\begin{aligned}
 (7.8) \quad L_{3,\varepsilon,T}^0 &= -\frac{T^2}{2} \left\{ \nabla_{T/\varepsilon, e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} \right. \\
 &\quad + \frac{T}{\sqrt{2}\varepsilon^2} \langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)e_j, g_\alpha \rangle_{T/\varepsilon} c(e_i)g^\alpha \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)f_\ell, g_\alpha \rangle_{T/\varepsilon} c_{T/\varepsilon}(f_\ell)g^\alpha \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon^2} \langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)g_\alpha, g_\beta \rangle_{T/\varepsilon} g^\alpha \wedge g^\beta \right\}^2 \\
 &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \nabla_{T/\varepsilon, f_\ell}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon} \langle S_{3,T/\varepsilon}(f_\ell)f_m, g_\alpha \rangle_{T/\varepsilon} c_{T/\varepsilon}(f_\ell)g^\alpha \\
 &\quad + \frac{T}{\sqrt{2}\varepsilon^2} \langle S_{3,T/\varepsilon}(f_\ell)e_i, g_\alpha \rangle_{T/\varepsilon} c(e_i)g^\alpha \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon^2} \langle S_{3,T/\varepsilon}(f_\ell)g_\alpha, g_\beta \rangle_{T/\varepsilon} g^\alpha \wedge g^\beta \right\}^2 \\
 &\quad + \frac{T^2}{8} K_{T/\varepsilon}^Z + \frac{1}{2} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(g_\alpha, g_\beta) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon^2}{4} c_{T/\varepsilon}(f_\ell)c_{T/\varepsilon}(f_m)L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(f_\ell, f_m) \\
 &\quad + \frac{T^2}{4} c(e_i)c(e_j)L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(e_i, e_j) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon T}{2} c(e_i)c_{T/\varepsilon}(f_\ell)L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(e_i, f_\ell) \\
 &\quad + \frac{T}{\sqrt{2}} g^\alpha \wedge c(e_i)L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(g_\alpha, e_i) \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} g^\alpha \wedge c_{T/\varepsilon}(f_\ell)L'_{3,T/\varepsilon}{}^\xi(g_\alpha, f_\ell).
 \end{aligned}$$

On rappelle que, pour $s \in S$, on note dv_Z, dv_X, dv_Y les formes de volume sur Z, X, Y associées aux métriques $\pi_1^*g^{TY} \oplus g^{TX}, g^{TX}, g^{TY}$ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX, TX, TY$.

Soit $P_{3,\varepsilon,T}(x, x')(x, x' \in Z_s)$ le noyau C^∞ de l'opérateur $\exp(-L_{3,\varepsilon,T}^0)$ relativement à $\frac{dv_Z(x')}{(2\pi)^{\dim Z}}$. Pour $a \in Y_s$, on pose

$$(7.9) \quad g_{\varepsilon,T}(a) = \int_{X_a} \varphi \operatorname{Tr}_s [M_{3,\varepsilon,T}^0 P_{3,\varepsilon,T}(x, x)] \frac{dv_X(x)}{(2\pi)^{\dim X}}.$$

Par (7.3), on a :

$$(7.10) \quad \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] = \int_{Y_s} g_{\varepsilon,T} \frac{dv_Y}{(2\pi)^{\dim Y}}.$$

Pour démontrer le théorème 4.8, on va calculer la limite de $g_{\varepsilon,T}$ quand ε tend vers zéro.

b) Le changement d'échelle sur l'algèbre de Clifford.

Grâce à la propriété de vitesse finie de propagation, on sait que le calcul de la limite de $g_{\varepsilon,T}$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, est local sur Y_{s_0} ($s_0 \in S$). Par conséquent, pour $b_0 \in Y_{s_0}$, on peut remplacer Y_{s_0} par $(TY)_{b_0} = \mathbb{C}^{m_0}$ ($m_0 = \dim Y_s$), avec $0 \in (TY)_{b_0}$ représenté par b_0 .

On rappelle que $S_1, S_2, S_{3,T}$ sont les tenseurs définis au §1 a) associés à $(\pi_1, \tilde{\omega}^W, W, V)$, (π_2, ω^V, V, S) , $(\pi_3, \omega_T^W, W, S)$, et que l'application $\psi_u : \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \rightarrow \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$ est définie en (5.44).

Soit $\nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la connexion sur $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ le long de la fibre Y qui est induite par $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$.

DÉFINITION 7.1. — Soit $\nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la connexion le long de la fibre Y sur $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)$

$$(7.11) \quad \nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)} = \nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)} + \frac{1}{2} \langle S_2(\cdot) f_m, g_{\alpha,2}^H \rangle \sqrt{2} c(f_m) g^\alpha + \frac{1}{2} \langle S_2(\cdot) g_{\alpha,2}^H, g_{\beta,2}^H \rangle g^\alpha \wedge g^\beta.$$

Soit ∇^\oplus la connexion sur

$$\pi_3^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi \simeq \pi_1^* (\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)) \hat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)$$

le long de la fibre Z

$$(7.12) \quad \nabla^\oplus = \pi_1^* \nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi}.$$

Pour $y \in \mathbb{C}^{m_0}$, soit $Y = y + \bar{y}$. On relève la trajectoire $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto tY$ horizontalement en la trajectoire $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x_t \in Z_s$ avec $x_t \in X_{tY}$ et $dx/dt \in T^H Z$. Pour $x_0 \in X_0$, on identifie TX_{x_t} et $(\pi_3^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi)_{x_t}$ à

$$TX_{x_0} \text{ et } (\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \hat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \hat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{x_0}$$

par transport parallèle le long de la courbe $t \mapsto x_t \in Z_s$ relativement à ∇^{TX} et $\psi_\varepsilon \nabla^\oplus \psi_\varepsilon^{-1}$.

L'opérateur $L_{3,\varepsilon,T}^0$ agit sur l'espace vectoriel H_{b_0} des sections C^∞ de $(\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y))_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$ sur $\mathbb{R}^{2m_0} \times X_{b_0}$.

Pour $s \in H_{b_0}$, on pose

$$(7.13) \quad \begin{cases} (F_\varepsilon s)(Y, x) = s\left(\frac{Y}{\varepsilon}, x\right) & \text{pour } (Y, x) \in \mathbb{R}^{2m_0} \times X_{b_0}, \\ L_{3,\varepsilon,T}^2 = F_\varepsilon^{-1} L_{3,\varepsilon,T}^0 F_\varepsilon. \end{cases}$$

Soit \mathcal{O}_p l'ensemble des opérateurs différentiels agissant sur les sections C^∞ de $(\Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$ sur $\mathbb{R}^{2m_0} \times X_{b_0}$. Soit $c(T_{\mathbb{R}} Y)$ l'algèbre de Clifford de $(T_{\mathbb{R}} Y, g^{T_{\mathbb{R}} Y})$. Alors on a

$$(7.14) \quad L_{3,\varepsilon,T}^2 \in \pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} c(T_{\mathbb{R}} Y)_{b_0} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_p.$$

DÉFINITION 7.2. — Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$(7.15) \quad \tilde{c}_\varepsilon(f_\ell) = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} f^\ell \wedge -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} i_{f_\ell}.$$

Soient $L_{3,\varepsilon,T}^3$ et $M_{3,\varepsilon,T}^3 \in (\pi_2^* (\Lambda T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} c(T_{\mathbb{R}} Y))_{b_0} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_p$ les opérateurs obtenus en remplaçant $c(f_\ell)$ par $\tilde{c}_\varepsilon(f_\ell)$ dans $L_{3,\varepsilon,T}^2$ et $M_{3,\varepsilon,T}^0$.

Soit $dv_{TY}|_{b_0}$ la forme de volume de $(T_{\mathbb{R}} Y_{b_0}, g^{TY_{b_0}}) \simeq \mathbb{R}^{2m_0}$.

Soit $P_{3,\varepsilon,T}^3((Y, x), (Y', x'))$ ($(Y, x), (Y', x') \in \mathbb{R}^{2m_0} \times X_{b_0}$) le noyau C^∞ de l'opérateur $\exp(-L_{3,\varepsilon,T}^3)$ relativement à $dv(Y')_{TY}|_{b_0} dv(x')_{TX}|_{X_{b_0}} / (2\pi)^{\dim Z}$. Alors pour $x \in X_{b_0}$, il existe

$$R_{\varepsilon,T}^{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q}((0, x), (0, x)) \in \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \text{End}(\Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$$

tels que $M_{3,\varepsilon,T}^3 P_{3,\varepsilon,T}^3((0, x), (0, x))$ peut s'écrire sous la formule suivante :

$$(7.16) \quad \begin{aligned} M_{3,\varepsilon,T}^3 P_{3,\varepsilon,T}^3((0, x), (0, x)) &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 2m_0 \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq 2m_0}} f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \wedge i_{f_{j_1}} \dots i_{f_{j_q}} \widehat{\otimes} R_{\varepsilon,T}^{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}. \end{aligned}$$

On pose

$$(7.17) \quad [M_{3,\varepsilon,T}^3 P_{3,\varepsilon,T}^3((0, x), (0, x))]^{\max} = R_{\varepsilon,T}^{1, \dots, 2m_0}((0, x), (0, x)).$$

D'après [ABoP, p. 484] et [Ge], on sait que

$$(7.18) \quad \begin{aligned} \varphi \text{Tr}_s [M_{3,\varepsilon,T}^0 P_{3,\varepsilon,T}((0, x), (0, x))] &= (-i)^{\dim Y} \varphi \text{Tr}_s [[M_{3,\varepsilon,T}^3 P_{3,\varepsilon,T}^3((0, x), (0, x))]^{\max}]. \end{aligned}$$

c) L'asymptotique des opérateurs $L_{3,\epsilon,T}^3$ et $M_{3,\epsilon,T}^3$ quand ϵ tend vers zéro.

En utilisant (1.8), (7.4) et (7.15), on sait que, quand $\epsilon \rightarrow 0$

$$(7.19) \quad \begin{aligned} M_{3,\epsilon,T}^3 &\longrightarrow M_{3,0,T}^3 \\ &= \frac{2}{T}(N_X - \dim X) + \frac{2i}{T^3} \tilde{\omega}^W(g_{\alpha,3,\infty}^H, f_{\ell,1}^H) g^\alpha \wedge f^\ell \\ &\quad + \frac{i}{T^3} \tilde{\omega}^W(g_{\alpha,3,\infty}^H, g_{\beta,3,\infty}^H) g^\alpha \wedge g^\beta - \frac{2}{T^3} \langle h\bar{\theta}_\ell, \theta_m \rangle_{g^{TY}} \bar{\theta}^\ell \wedge \theta^m. \end{aligned}$$

Par [BerB, (7.27)] et (7.19), on a

$$(7.20) \quad M_{3,0,T}^3 = \frac{2}{T}(N_X - \dim X) + \frac{2i}{T^3} \tilde{\omega}_1^{H\bar{H}} = \frac{2}{T}(\tilde{N}_{1,T^2} - \dim X).$$

Soit $\Gamma^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y)}$ la forme de connexion sur \mathbb{C}^{m_0} de

$$\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y)$$

relativement à $\nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y)}$ le long de la courbe $t \mapsto tY$ ($Y \in \mathbb{R}^{2m_0}$). Alors par [ABoP, prop. 3.7], pour $Y \in \mathbb{R}^{2m_0}$, on a

$$(7.21) \quad \begin{aligned} \Gamma_Y^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y)}(\cdot) \\ = \frac{1}{2} \nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y), 2}(Y, \cdot) + O(|Y|^2). \end{aligned}$$

Soit P^{TY} la projection de $TV = T_2^H V \oplus TY$ sur TY .

Pour $X \in T_{\mathbb{R}} Z$, on note $X^{(1,0)}, X^{(0,1)}$ les composantes de X dans TZ, \overline{TZ} . Soit

$$(7.22) \quad L_1^\xi = L^\xi + \frac{1}{2} \text{Tr}[R^{TX}].$$

Soit K^X la courbure scalaire de la fibre (X, g^{TX}) . Pour $U \in T_{\mathbb{R}} Y$, soit ∇_U l'opérateur différentiel ordinaire dans la direction U .

En utilisant [B4, th. 11.8 et (11.61)], le théorème 1.7, (1.35), (7.6), (7.21) et (7.22), quand $\epsilon \rightarrow 0$, on a :

$$(7.23) \quad \begin{aligned} L_{3,\epsilon,T}^3 &\longrightarrow L_{3,0,T}^3 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\nabla_{f_\ell} + \frac{1}{2} \langle R^{TY} Y, f_\ell \rangle_{g_{b_0}^{TY}} \right)^2 + \frac{1}{2} \text{Tr}[\nabla^{TY, 2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{T^2}{2} \left\{ \nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} + \frac{1}{T\sqrt{2}} \langle A(e_i) f_{\ell,1}^H, e_j \rangle f^\ell \wedge c(e_j) \right. \\
 & \quad - \frac{i}{T^2} \sum_{\ell < m} e_i^{(1,0)} \tilde{\omega}_1^{H\bar{H}}(f_\ell, f_m) f^\ell \wedge f^m \\
 & \quad + \frac{1}{T\sqrt{2}} \langle S_1(e_i) e_j, g_{\alpha,3,\infty}^H \rangle c(e_j) g^\alpha \\
 & \quad + \frac{1}{2T^2} \langle S_1(e_i) g_{\alpha,3,\infty}^H, g_{\beta,3,\infty}^H \rangle g^\alpha \wedge g^\beta \\
 & \quad + \frac{1}{T^2} [\langle S_1(e_i) f_{\ell,1}^H, g_{\alpha,3,\infty}^H \rangle \\
 & \quad \quad \left. + \frac{1}{2} L_{e_i} \langle h' g_{\alpha,3,\infty}^H, f_{\ell,1}^H \rangle_{\pi_1^* g^{TY}}] f^\ell \wedge g^\alpha \right\}^2 \\
 & + \frac{T^2}{8} K^X + \frac{1}{2} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge L_1'^\xi(g_{\alpha,3,\infty}^H, g_{\beta,3,\infty}^H) \\
 & + \frac{1}{2} f^\ell \wedge f^m \wedge L_1'^\xi(f_{\ell,1}^H, f_{m,1}^H) \\
 & + \frac{T^2}{4} c(e_i) c(e_j) L_1'^\xi(e_i, e_j) + \frac{T}{\sqrt{2}} f^\ell \wedge c(e_i) L_1'^\xi(f_{\ell,1}^H, e_i) \\
 & + \frac{T}{\sqrt{2}} g^\alpha \wedge c(e_i) L_1'^\xi(g_{\alpha,3,\infty}^H, e_i) + g^\alpha \wedge f^\ell \wedge L_1'^\xi(g_{\alpha,3,\infty}^H, f_{\ell,1}^H).
 \end{aligned}$$

d) La superconnexion de Levi-Civita.

On rappelle que $B_{1,u}$ est la superconnexion de Levi-Civita associée à $(\pi_1, \tilde{\omega}^W, h^\xi)$, qui a été définie à la définition 2.3. On pose :

$$(7.24) \quad \tilde{\omega}^{H\bar{H}} = \frac{1}{2} i \tilde{\omega}_1^{H\bar{H}}(f_\ell, f_m) f^\ell \wedge f^m - \frac{1}{2} \langle h' g_{\alpha,3,\infty}^H, f_{\ell,1}^H \rangle_{\pi_1^* g^{TY}} f^\ell \wedge g^\alpha.$$

En utilisant [BerB, (7.33)], (7.23) et en procédant comme dans [BerB, § 7(c)], on a :

$$(7.25) \quad e^{-\frac{1}{T^2} \tilde{\omega}^{H\bar{H}}} L_{3,0,T}^3 e^{\frac{1}{T^2} \tilde{\omega}^{H\bar{H}}} = -\frac{1}{2} (\nabla_{f_\ell} + \frac{1}{2} \langle R^{TY} Y, f_\ell \rangle_{g_{b_0}^{TY}})^2 + \frac{1}{2} \text{Tr}[R^{TY}] + B_{1,T^2}^2.$$

e) Preuve du théorème 4.8.

En utilisant (7.10), (7.18), (7.19), (7.23) et (7.25), la preuve du théorème 4.8 est la même que dans [BerB, § 7 (d)]. \square

8. Preuves des théorèmes 4.9 et 4.10

Le but de ce paragraphe est d'établir les théorèmes 4.9 et 4.10.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on énonce le théorème 8.1, dont on peut déduire le théorème 4.10. Les parties b), c) sont consacrées à la preuve du théorème 8.1. Dans b), en utilisant la propriété de vitesse finie de propagation, on montre que la preuve du théorème 8.1 est locale sur la fibre Y_s . Dans c), en utilisant le théorème d'indice local relatif, on montre le théorème 8.1 et la première partie du théorème 4.9. Dans d), on montre la deuxième partie du théorème 4.9.

On fait les mêmes hypothèses et on utilise les mêmes notations qu'aux paragraphes 1 b), 5 et 7.

a) Reformulation du théorème 4.10.

On rappelle que $\mu_0(T)$ est la forme sur S définie au théorème 4.9.

THÉORÈME 8.1. — *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in]0, 1]$ et $T \geq 1$, on a*

$$(8.1) \quad \left| \varphi \operatorname{Tr}_s [M_{3,u^2/T^2,T} \exp(-B_{3,u^2/T^2,T}^2)] \right. \\ \left. - \frac{2}{u^2} \int_Z \frac{\tilde{\omega}^W}{2\pi T} \operatorname{Td}(TZ, g_T^{TZ}) \operatorname{ch}(\xi, h^\xi) \right. \\ \left. + \int_Z \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{Td} \left(\frac{-R_T^{TZ}}{2i\pi} - b(g_T^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (g_T^{TZ}) \right)_{b=0} \operatorname{ch}(\xi, h^\xi) + \varphi d^S \mu_0(T) \right| \leq \frac{Cu^2}{T}.$$

REMARQUE 8.2. — Le théorème 8.1 implique le théorème 4.10. En effet, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $\varepsilon \leq T \leq 1$, on applique (8.1) pour $u = T$, et T étant remplacé par T/ε ; alors le terme à droite de (8.1) est dominé par $CT^2\varepsilon/T = C\varepsilon T \leq C\varepsilon$. On a donc démontré le théorème 4.10.

b) La preuve du théorème 8.1 est locale sur Y_s .

Soit r tel que

$$r < \inf_{s \in S} \{ \text{rayon d'injectivité des fibres } (Y_s, g^{TY}) \}.$$

Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{4}r]$. Pour $b \in V$, soit $B^Y(b, \alpha)$ la boule dans Y_s de centre b et de rayon α . Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction paire C^∞ , telle que

$$(8.2) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2}\alpha, \\ 0 & \text{si } |t| \geq \alpha. \end{cases}$$

On pose :

$$(8.3) \quad g = 1 - f.$$

DÉFINITION 8.3. — Pour $u \in]0, 1]$ et $a \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(8.4) \quad \begin{cases} F_u(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ita\sqrt{2}) \exp(-\frac{1}{2}t^2) f(ut) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}, \\ G_u(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ita\sqrt{2}) \exp(-\frac{1}{2}t^2) g(ut) \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}. \end{cases}$$

On a

$$(8.5) \quad F_u(a) + G_u(a) = \exp(-a^2).$$

Les fonctions $F_u(a), G_u(a)$ sont des fonctions holomorphes paires sur \mathbb{C} . Il existe donc des fonctions holomorphes $\tilde{F}_u(a), \tilde{G}_u(a)$ telles que

$$(8.6) \quad F_u(a) = \tilde{F}_u(a^2), \quad G_u(a) = \tilde{G}_u(a^2).$$

Par (8.5), (8.6), on a :

$$(8.7) \quad \exp(-B_{3,u^2/T^2,T}^2) = \tilde{F}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2) + \tilde{G}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2).$$

PROPOSITION 8.4. — Il existe $c, C > 0$ tels que, pour tout $0 < u \leq 1$ et tout $T \geq 1$,

$$(8.8) \quad |\text{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T} \tilde{G}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2)]| \leq C \exp\left(-c \frac{T^2}{u^2}\right).$$

Preuve. — Pour $v > 0$, on pose

$$(8.9) \quad H_v(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\sqrt{2}a) \exp\left(-\frac{t^2}{2v^2}\right) g(t) \frac{dt}{v\sqrt{2\pi}}.$$

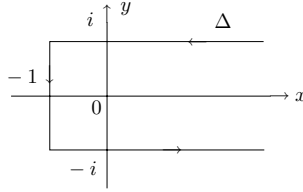
Alors il existe une fonction holomorphe $\tilde{H}_v(a)$ telle que $H_v(a) = \tilde{H}_v(a^2)$. Par (8.6) et (8.9), on a

$$(8.10) \quad \tilde{G}_v(a) = \tilde{H}_v\left(\frac{a}{v^2}\right).$$

D'après (5.2), (5.45) et (8.10), on a

$$(8.11) \quad \text{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T} \tilde{G}_{u/T}(-B_{3,u^2/T^2,T}^2)] = \psi_{u/T} \text{Tr}_s[C_T M_{3,1,T} C_T^{-1} \tilde{H}_{u/T}(A_T^2)].$$

Soit Δ le contour suivant dans \mathbb{C} :



Par [B4, (11.21)], pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $c_m > 0$ et $C_m > 0$ tels que

$$(8.12) \quad \sup_{a \in \Delta} |a|^m \cdot |\tilde{H}_v(a)| \leq C_m \exp\left(-\frac{c_m}{v^2}\right).$$

On a aussi

$$(8.13) \quad \tilde{H}_{u/T}(A_T^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\tilde{H}_{u/T}(\lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda.$$

En utilisant (5.69), (8.12), (8.13), et en procédant comme dans le § 5 g), on voit facilement que, pour $u \in]0, 1]$ et $T \geq 1$,

$$(8.14) \quad |\text{Tr}_s[C_T M_{3,1,T} C_T^{-1} \tilde{H}_{u/T}(A_T^2)]| \leq C \exp\left(-c \frac{T^2}{u^2}\right).$$

De (8.11) et (8.14), on tire la proposition. \square

Soit $\tilde{F}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2)(x, x')(x, x' \in Z_s)$ le noyau de $\tilde{F}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2)$ relativement à $dv_Z(x')/(2\pi)^{\dim Z}$. En utilisant (8.4) et la propriété de vitesse finie de propagation, [CP, § 7.8] et [T, § 4.4], il est clair que pour $0 < u \leq 1$, $T \geq 1$ et $x \in Z_s$, $\tilde{F}_{u/T}(B_{3,u^2/T^2,T}^2)(x, x)$ ne dépend que de la restriction de $B_{3,u^2/T^2,T}^2$ à $\pi_1^{-1}B^Y(\pi_1 x, \alpha)$. Par (8.8) et par la discussion ci-dessus, la démonstration de (8.1) est locale sur Y_s .

Pour $b_0 \in Y_{s_0}$, on peut remplacer Z_{s_0} par $\mathbb{C}^{m_0} \times X_{b_0}$ comme au § 7 b), et on trivialise les fibrés vectoriels comme indiqué au § 7 b). On va montrer le théorème 8.1 dans cette situation.

c) Preuve du théorème 8.1.

On rappelle que $E_{1,0}$ est la forme \mathcal{C}^∞ sur V définie en (4.20).

THÉORÈME 8.5.

i) Il existe $C > 0$, et des formes $a_{T,j}$ (avec $n = \dim Z$ et $j \geq -n$), \mathcal{C}^∞ sur S , qui dépendent continûment de $T \in [1, +\infty]$, tels que, pour tout $u \in]0, 1[$ et $T \in [1, +\infty[$,

$$(8.15) \quad \left| \varphi \operatorname{Tr}_s [M_{3,u^2/T^2,T} \exp(-B_{3,u^2/T^2,T}^2)] - \sum_{j=-n}^0 \frac{a_{T,j}}{T} u^{2j} \right| \leq C \frac{u^2}{T}.$$

ii) Pour $j \geq -n$, quand $T \rightarrow +\infty$, on a

$$(8.16) \quad a_{T,j} = a_{\infty,j} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

iii) De plus

$$(8.17) \quad a_{\infty,0} = \int_Y \operatorname{Td}(TY, g^{TY}) [\pi_{1*}(-2 \operatorname{Td}'(TX, g^{TX}) \operatorname{ch}(\xi, h^\xi)) - \varphi_1 d^V E_{1,0}].$$

Preuve. — i) En utilisant (5.45) et (7.2), on a

$$(8.18) \quad \varphi \operatorname{Tr}_s [M_{3,u^2/T^2,T} \exp(-B_{3,u^2/T^2,T}^2)] = \psi_u \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{T} M_{3,\frac{1}{T},1}^0 \exp(-u^2 L_{3,\frac{1}{T},1}^0) \right].$$

On va utiliser les mêmes notations du § 7, avec ε remplacé par $1/T$, et T par 1. Alors d'après (7.23), quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(8.19) \quad L_{3,\frac{1}{T},1}^3 \longrightarrow L_{3,0,1}^3.$$

Soit $P_{\varepsilon,T,u}$ (resp. $P_{\varepsilon,T,u}^3$) le noyau \mathcal{C}^∞ de l'opérateur $\exp(-u^2 L_{3,\varepsilon,T}^0)$ (resp. $\exp(-u^2 L_{3,\varepsilon,T}^3)$) relativement à $dv_{TY}|_{b_0} dv_{X_{b_0}} / (2\pi)^{\dim Z}$.

D'après (7.19), quand $T \rightarrow +\infty$,

$$(8.20) \quad M_{3,\frac{1}{T},1}^3 \longrightarrow M_{3,0,1}^3 = 2(\tilde{N}_{1,1} - \dim X).$$

En utilisant (8.19), (8.20), et en procédant comme en [BerB, § 8 (c)], on sait qu'il existe $C > 0$, et des sections $a'_{T,j}$ de $\pi_3^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \hat{\otimes} \pi_1^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* Y)$ sur Z_s qui dépendent continûment de $T \in [1, +\infty]$, tels que pour tout $u \in]0, 1[$, $T \in [1, +\infty]$ et $x \in X_{b_0}$,

$$(8.21) \quad \left| \psi_u \operatorname{Tr}_s [M_{3,\frac{1}{T},1}^3 P_{\frac{1}{T},1,u}^3((0,x), (0,x))] - \sum_{j=-n}^0 a'_{T,j}(x) u^{2j} \right| \leq cu^2.$$

Posons

$$(8.22) \quad a_{T,j} = (-i)^{\dim Y} \varphi \int_Z [a'_{T,j}(x)]^{\max} \frac{dv_Z(x)}{(2\pi)^{\dim Z}}.$$

Comme en (7.20), on a aussi

$$(8.23) \quad \begin{aligned} \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{T} M_{3, \frac{1}{T}, 1}^0 P_{\frac{1}{T}, 1, u}((0, x), (0, x)) \right] \\ = (-i)^{\dim Y} \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\left\{ \frac{1}{T} M_{3, \frac{1}{T}, 1}^3 P_{\frac{1}{T}, 1, u}^3((0, x), (0, x)) \right\}^{\max} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (8.18), (8.21) et (8.23), on en déduit (8.15).

ii) Par l'asymptotique du noyau de chaleur [BGS2, th. 2.11], dans (8.21), $a'_{T,j}(x)$ ($x \in X_{b_0}$) sont des fonctions des coefficients de $M_{3, \frac{1}{T}, 1}^3$, $L_{3, \frac{1}{T}, 1}^3$, et de ses dérivées au point $(0, x)$. Comme $L_{3, \varepsilon, 1}^3$ et $M_{3, \varepsilon, 1}^3$ sont \mathcal{C}^∞ pour $\varepsilon \in [0, 1]$, on a

$$(8.24) \quad a'_{T,j}(x) = a'_{\infty,j}(x) + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

De (8.22), (8.24), on tire (8.16).

iii) Soit $q_{u^2}(x, x')$ ($x, x' \in X$) le noyau \mathcal{C}^∞ de l'opérateur $\exp(-B_{1, u^2}^2)$ relativement à $dv_X(x')/(2\pi)^{\dim X}$. En utilisant (7.25), (8.20), et en procédant comme en [BerB, § 7 (d)], on a

$$(8.25) \quad \begin{aligned} \psi_u \operatorname{Tr}_s [M_{3, 0, 1}^3 P_{0, 1, u}^3((0, x), (0, x))] \\ = 2 \operatorname{Td}(-R^{TY})_{b_0} \operatorname{Tr}_s [(\tilde{N}_{1, u^2} - \dim X) q_{u^2}(x, x)]. \end{aligned}$$

D'après [BGS2, th. 2.16], (8.21) et (8.25), on a

$$(8.26) \quad \begin{aligned} \varphi_1 \left(\int_X a'_{\infty, 0} \frac{dv_X}{(2\pi)^{\dim X}} \right) \\ = \operatorname{Td}(TY, g^{TY}) [\pi_{1*}(-2 \operatorname{Td}'(TX, g^{TX}) \operatorname{ch}(\xi, h^\xi)) - \varphi_1 d^V E_{1, 0}]. \end{aligned}$$

Par (8.22) et (8.26), on a (8.17).

On a bien terminé la preuve du théorème 8.5. \square

Soient

$$(8.27) \quad \begin{cases} C_{3, -1}(T) = \int_Z \frac{\tilde{\omega}^W}{2\pi} \operatorname{Td}(TZ, g_T^{TZ}) \operatorname{ch}(\xi, h^\xi), \\ C_{3, 0}(T) = \int_Z \frac{\partial}{\partial b} \operatorname{Td} \left(-\frac{R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ}) \right) \Big|_{b=0} \operatorname{ch}(\xi, h^\xi). \end{cases}$$

PROPOSITION 8.6.

i) Il existe une forme $\mu_0(T)$, C^∞ sur S , telle que, pour T fixé, quand $u \rightarrow 0$,

$$(8.28) \quad \text{Tr}_s \left[u M_{3,u,T} \exp \left(-B_{3,u,T}^2 + du \frac{\partial}{\partial u} B_{3,u,T} \right) \right]^{du} = \mu_0(T) + O(u).$$

ii) Pour $T \geq 1$ fixé, quand $u \rightarrow 0$, on a

$$(8.29) \quad \varphi \text{Tr}_s [M_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] \\ = \frac{2C_{3,-1}(T)}{uT^3} - (C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)) + O(u).$$

Preuve. — i) En utilisant les mêmes arguments que dans [BGS2, th. 2.11], on a (8.28).

ii) En utilisant les mêmes arguments que dans [BGS2, th. 2.11], il existe $p' \in \mathbb{N}$, des formes μ'_j sur S tels que, quand $u \rightarrow 0$, on a

$$(8.30) \quad \varphi \text{Tr}_s [M_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] = \sum_{j=-p'}^k \mu'_j u^j + O(u^{k+1}).$$

En procédant comme en [B1, § 4], on a

$$(8.31) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \varphi \text{Tr}_s [u M_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)] = 2 \int_Z \frac{\tilde{\omega}^W}{2\pi T^3} \text{Td}(TZ, g_T^{TZ}) \text{ch}(\xi, h^\xi)$$

et donc

$$(8.32) \quad \mu'_j = 0 \quad \text{pour } j \leq -2, \quad \mu'_{-1} = \frac{2}{T^3} C_{3,-1}(T).$$

En utilisant (8.30) et (8.32), on sait que

$$(8.33) \quad \mu'_0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial u} \varphi \text{Tr}_s [u M_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)].$$

De [BKö, th. 3.17 et 3.22], (8.28) et (8.33), on déduit que

$$(8.34) \quad \mu'_0 = -(C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)).$$

On a bien terminé la preuve de la proposition 8.6. \square

Preuve du théorème 8.1. — D'après (8.29), on sait que pour T fixé, quand $u \rightarrow 0$, on a

$$(8.35) \quad \varphi \text{Tr}_s [M_{3,u^2/T^2,T} \exp(-B_{3,u^2/T^2,T}^2)] \\ = \frac{2}{u^2 T} C_{3,-1}(T) - (C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)) + O(u^2).$$

En comparant (8.15) et (8.35), on a

$$(8.36) \quad a_{T,j} = \begin{cases} 0 & \text{pour } j < -1, \\ 2C_{3,-1}(T) & \text{pour } j = -1, \\ -T(C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)) & \text{pour } j = 0. \end{cases}$$

De (8.15) et (8.36), on tire le théorème 8.1. \square

d) L'asymptotique de $\mu_0(T)$ quand T tend vers l'infini.

D'après (4.32), (8.17) et (8.36), on a

$$(8.37) \quad \begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} T \varphi d^S \mu_0(T) &= - \lim_{T \rightarrow +\infty} (a_{T,0} + T C_{3,0}(T)) \\ &= \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \varphi_1 d^V E_{1,0}. \end{aligned}$$

En utilisant [BGS2, prop. 2.10], et en procédant comme aux parties a), b), c) de ce paragraphe, on sait qu'il existe $C > 0$, et des formes $b_{T,j}$, C^∞ sur S , qui dépendent continûment en $T \in [1, +\infty]$, tels que, pour $u \in]0, 1]$ et $T \in [1, +\infty[$,

$$(8.38) \quad \left| \text{Tr}_s \left[M_{3,u^2/T^2,T} \exp \left(- B_{3,u^2/T^2,T}^2 + du \left(t \frac{\partial}{\partial t} B_{3,t,T} \right) \Big|_{t=u^2/T^2} \right) \right] - \sum_{j=-n}^0 \frac{b_{T,j}}{T} u^{2j} \right| \leq C \frac{u^2}{T}.$$

Plus précisément, pour $j \geq -n$, quand $T \rightarrow +\infty$, on a

$$(8.39) \quad b_{T,j} = b_{\infty,j} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

En comparant (8.15), (8.28), (8.38), on a

$$(8.40) \quad b_{T,0} = \varphi^{-1} a_{T,0} + T \mu_0(T) du$$

et donc

$$(8.41) \quad \mu_0(T) = \frac{1}{T} [b_{\infty,0} - \varphi^{-1} a_{\infty,0}] du + O\left(\frac{1}{T^2}\right).$$

Par (8.28), (8.37), (8.41), on a terminé la preuve du théorème 4.9. \square

9. Preuve du théorème 4.11

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème 4.11. Pour montrer celui-ci, on s'inspire de [BerB, § 9], [B4, § 13] et [BL, § 13].

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on montre que la preuve du théorème 4.11 est locale sur Y_{s_0} ($s_0 \in S$). Dans b), étant donné $b_0 \in Y_{s_0}$, on remplace Z_{s_0} par $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$. On associe à cette dernière variété de nouveaux opérateurs $L_{3,\varepsilon,T}^1$ et $L_{3,\varepsilon,T}^3$. Dans c), on calcule l'asymptotique, quand T tend vers l'infini, de la matrice de $L_{3,\varepsilon,T}^3$ relativement au scindement orthogonal de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur $L_{3,\varepsilon,T}^3$ agit naturellement. Dans d), on introduit une famille de normes de Sobolev qui dépendent de ε, T . Ces normes de Sobolev prennent en compte la graduation des variables grassmanniennes dans $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$. Dans e), on introduit un opérateur Ξ_{ε} qui est un analogue d'un opérateur introduit dans [BerB, § 9]. Dans f), on montre le théorème 9.2.

On utilise les mêmes notations qu'aux §§ 4–8.

a) Localisation du problème.

On utilise les mêmes notations qu'au § 8 a).

PROPOSITION 9.1. — *Il existe $\delta, c, C > 0$ tels que, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1, T \geq 1$, on a*

$$(9.1) \quad \left| \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \tilde{G}_{\varepsilon}(B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] - \frac{2}{T} \varphi \operatorname{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \tilde{G}_{\varepsilon}(B_{2,\varepsilon^2}^2) \right] \right| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}} \exp \left(- \frac{C}{\varepsilon^2} \right).$$

Preuve. — Par (8.10), on a

$$(9.2) \quad \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \tilde{G}_{\varepsilon}(B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] = \psi_{\varepsilon} \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} C_{T/\varepsilon} M_{3,1,T/\varepsilon} C_{T/\varepsilon}^{-1} \tilde{H}_{\varepsilon}(A_{T/\varepsilon}^2) \right].$$

En utilisant (5.2), (7.4), (8.12) et (8.13), en procédant comme au §§ 5 g)–i), on sait qu'il existe $\delta, C, c > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $T \geq 1$

$$(9.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \operatorname{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \tilde{H}_{\varepsilon}(A_{T/\varepsilon}^2) \right] - \operatorname{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \tilde{H}_{\varepsilon}(B_{2,1}^2) \right] \right| \leq \frac{C}{T^{\delta}} \exp \left(- \frac{c}{\varepsilon^2} \right), \\ \left| \operatorname{Tr}_s \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} C_{T/\varepsilon} M_{3,1,T/\varepsilon} C_{T/\varepsilon}^{-1} - \frac{2}{T} (N_X - \dim X) \right) \tilde{H}_{\varepsilon}(A_{T/\varepsilon}^2) \right] \right| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}} \exp \left(- \frac{c}{\varepsilon^2} \right). \end{array} \right.$$

De (9.2) et (9.3) on tire (9.1). \square

D'après (9.1), il est clair que pour établir le théorème 4.11, il suffit d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 9.2. — *Pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe $\delta, c > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $T \geq 1$,*

$$(9.4) \quad \left| \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \tilde{F}_\varepsilon(B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] - \frac{2}{T} \varphi \operatorname{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \tilde{F}_\varepsilon(B_{2,\varepsilon^2}^2) \right] \right| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}. \quad \square$$

Le reste du paragraphe est consacré à la preuve du théorème 9.2.

Par (7.2), on a

$$(9.5) \quad \varphi \operatorname{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \tilde{F}_\varepsilon(B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] = \varphi \operatorname{Tr}_s \left[M_{3,\varepsilon,T}^0 \tilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^0) \right].$$

Soit $\tilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^0)(x, x')(x, x' \in Z_s)$ le noyau C^∞ de $\tilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^0)$ relativement à $dv_Z(x')/(2\pi)^{\dim Z}$. En utilisant la propriété de la vitesse finie de propagation, il est clair que pour $x \in Z_s$, $\tilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^0)(x, x)$ dépend seulement de la restriction de $L_{3,\varepsilon,T}^0$ à $\pi_1^{-1}(B^Y(\pi_1 x, \alpha))$.

b) Un nouvel opérateur sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$.

Soit g^{TS} une métrique sur TS . Elle induit naturellement une métrique sur $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)$.

On fixe $b_0 \in Y_{s_0}$ (avec $s_0 \in S$). Sur $B^Y(b_0, r)$, on trivialisé la fibration $\pi_1^{-1}(B^Y(b_0, r)) \rightarrow B^Y(b_0, r)$ et les fibrés vectoriels considérés comme au § 7 b). Alors l'opérateur $L_{3,\varepsilon,T}^0$ agit sur l'espace vectoriel $H_{b_0}(r)$ des sections C^∞ de

$$\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \hat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \hat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$$

sur $B^Y(b_0, r) \times X_{b_0}$.

Soit $G_{b_0} = \Omega(X_{b_0}, \xi|_{X_{b_0}})$ l'espace vectoriel des sections de classe C^∞ de $(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$ sur X_{b_0} . Alors G_{b_0} est muni d'une métrique hermitienne, et $\operatorname{Ker} D^X|_{B^Y(b_0,r)}$ est un sous-fibré vectoriel \mathbb{Z} -gradué de G_{b_0} sur $B^Y(b_0, r)$.

Pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe un fibré vectoriel $K \subset G_{b_0}$, \mathbb{Z} -gradué sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \simeq \mathbb{R}^{2m_0}$ qui coïncide avec $\operatorname{Ker} D^X$ sur $B^{TY}(0, 2\alpha)$, et avec $\operatorname{Ker} D_{b_0}^X$ sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \setminus B^{TY}(0, 3\alpha)$, tel que si K^\perp est le fibré vectoriel orthogonal à K dans G_{b_0} , alors

$$(9.6) \quad K^\perp \cap \operatorname{Ker} D_{b_0}^X = \{0\}.$$

Soit P_b (avec $b \in \mathbb{R}^{2m_0}$) la projection orthogonale de G_{b_0} sur K_b pour le produit hermitien naturel sur G_{b_0} . On pose $P_b^\perp = 1 - P_b$.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction \mathcal{C}^∞ telle que

$$(9.7) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq \alpha, \\ 0 & \text{pour } |t| \geq 2\alpha. \end{cases}$$

Soit Δ^{TY} le Laplacien standard sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0}$ correspondant à la métrique $g^{TY_{b_0}}$. Soit H_{b_0} l'espace vectoriel des sections \mathcal{C}^∞ de

$$\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$$

sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$. Soit $L_{3,\varepsilon,T}^1$ l'opérateur défini par

$$(9.8) \quad L_{3,\varepsilon,T}^1 = \varphi^2(|Y|)L_{3,\varepsilon,T}^0 + (1 - \varphi^2(|Y|))(-\frac{1}{2}\varepsilon^2\Delta^{TY} + T^2P_Y^\perp D_{b_0}^{X,2} P_Y^\perp).$$

Alors $L_{3,\varepsilon,T}^1$ coïncide avec $L_{3,\varepsilon,T}^0$ sur $|Y| \leq \alpha$.

Pour $\varepsilon > 0$, avec $s \in H_{b_0}$, on pose

$$(9.9) \quad \begin{cases} (S_\varepsilon s)(Y, x) = s(Y/\varepsilon, x), & \text{pour } (Y, x) \in \mathbb{R}^{2m_0} \times X_{b_0}, \\ L_{3,\varepsilon,T}^2 = S_\varepsilon^{-1} L_{3,\varepsilon,T}^1 S_\varepsilon. \end{cases}$$

On fait le même changement d'échelle sur les variables de Clifford $c(f_\ell)$ ($1 \leq i \leq 2m_0$) qu'au § 7. On obtient ainsi un opérateur $L_{3,\varepsilon,T}^3$.

Soit $\widetilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^j)(x, x')$ (avec $x, x' \in (T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$) le noyau \mathcal{C}^∞ de l'opérateur $\widetilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^j)$ relativement à $1/(2\pi)^{\dim Z} dv_{TY_{b_0}} dv_{X_{b_0}}$. D'après la propriété de vitesse finie de propagation, on sait que si $x \in X_{b_0}$ est identifié à $(0, x)$, alors on a

$$(9.10) \quad \widetilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^0)(x, x) = \widetilde{F}_\varepsilon(L_{3,\varepsilon,T}^1)(x, x).$$

Soit E^0 l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de

$$\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$$

sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$.

Soit F_ε^0 l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de

$$\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} S_\varepsilon^{-1*} K$$

sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0}$. Alors l'espace F_ε^0 a un sens pour $\varepsilon = 0$, et F_0^0 est l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de

$$\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} \text{Ker } D_{b_0}^X$$

sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0}$. L'espace F_ε^0 est un sous-espace de Hilbert de E^0 . Soit $F_\varepsilon^{0,\perp}$ l'espace orthogonal à F_ε^0 dans E^0 . Soit p_ε la projection orthogonale de E^0 sur F_ε^0 .

On pose $p_\varepsilon^\perp = 1 - p_\varepsilon$. Pour $s \in E^0$, $Y \in T_{\mathbb{R}}Y$, on a

$$(9.11) \quad p_\varepsilon s(Y) = P_{\varepsilon Y} s(Y, \cdot).$$

On pose

$$(9.12) \quad \begin{cases} E_{\varepsilon, T} = p_\varepsilon L_{3, \varepsilon, T}^3 p_\varepsilon, & F_{\varepsilon, T} = p_\varepsilon L_{3, \varepsilon, T}^3 p_\varepsilon^\perp, \\ G_{\varepsilon, T} = p_\varepsilon^\perp L_{3, \varepsilon, T}^3 p_\varepsilon, & H_{\varepsilon, T} = p_\varepsilon^\perp L_{3, \varepsilon, T}^3 p_\varepsilon^\perp. \end{cases}$$

Alors on écrit $L_{3, \varepsilon, T}^3$ sous forme matricielle relativement au scindage $E^0 = F_\varepsilon^0 \oplus F_\varepsilon^{0, \perp}$:

$$(9.13) \quad L_{3, \varepsilon, T}^3 = \begin{bmatrix} E_{\varepsilon, T} & F_{\varepsilon, T} \\ G_{\varepsilon, T} & H_{\varepsilon, T} \end{bmatrix}.$$

c) L'asymptotique de la matrice $L_{3, \varepsilon, T}^3$ quand T tend vers l'infini.

On rappelle que ${}^0\nabla^{\Omega(Z, \xi|Z)}$ est la connexion sur $\Omega(Z, \xi|Z)$ définie en (5.13).

Si C est une section de $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} c(T_{\mathbb{R}} Y)_{b_0}$, et si $b \in Y_{s_0}$ est un point près de b_0 , soit $C_\varepsilon^3(b)$ l'élément de $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \text{End}(\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* Y))_{b_0}$ qui est obtenu en utilisant la trivialisatıon de $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \text{End}(\Lambda(T_{\mathbb{R}}^* Y))$, relativement à la connexion $\psi_\varepsilon' \nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^* S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)} Y)} \psi_\varepsilon^{-1}$ comme au § 7 b), et par le changement d'échelle sur les éléments $c(T_{\mathbb{R}} Y)_{b_0}$ défini à la définition 7.2.

Dans la suite, on note $[A, B]_+$ l'anti-commutateur de A et B . On pose :

$$(9.14) \quad L_1'^\xi = L^\xi + \frac{1}{2} \text{Tr}[R^{TX}].$$

THÉORÈME 9.3. — *Il existe des opérateurs $E_\varepsilon, F_\varepsilon, G_\varepsilon, H_\varepsilon$ tels que quand T tend vers l'infini,*

$$(9.15) \quad \begin{cases} E_{\varepsilon, T} = E_\varepsilon + O\left(\frac{1}{T}\right), & F_{\varepsilon, T} = TF_\varepsilon + O(1), \\ G_{\varepsilon, T} = TG_\varepsilon + O(1), & H_{\varepsilon, T} = T^2 H_\varepsilon + O(T). \end{cases}$$

On pose :

$$(9.16) \quad Q_\varepsilon = \varphi^2(\varepsilon|Y) \left\{ -\frac{1}{2} \left[\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)} X) \otimes \xi}, \right. \right. \\ \left. \frac{1}{2} \langle A(e_i) f_{\ell, 1}^H, e_j \rangle_{g^{TY}} \{ \varepsilon c(f_{\ell, 1}^H) \}_\varepsilon^3 c(e_j) \right. \\ \left. + \langle S_1(e_i) g_{\alpha, 3, \infty}^H, e_j \rangle_{g^{TX}} g^\alpha \frac{c(e_j)}{\sqrt{2}} \right]_+ \\ \left. + \frac{1}{2} \{ \varepsilon c(f_{\ell, 1}^H) \}_\varepsilon^3 c(e_j) L_1'^\xi(f_{\ell, 1}^H, e_j) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} g^\alpha c(e_j) L_1'^\xi(g_{\alpha, 3, \infty}^H, e_j) \right\}_{\varepsilon Y}.$$

Alors on a $Q_\varepsilon(F_\varepsilon^0) \subset F_\varepsilon^{0,\perp}$, et

$$(9.17) \quad \begin{cases} F_\varepsilon = p_\varepsilon Q_\varepsilon p_\varepsilon^\perp, & G_\varepsilon = p_\varepsilon^\perp Q_\varepsilon p_\varepsilon, \\ H_\varepsilon = p_\varepsilon^\perp (\varphi^2(\varepsilon|Y|)D_{\varepsilon Y}^{X,2} + (1 - \varphi^2(\varepsilon|Y|))D_{b_0}^{X,2})p_\varepsilon^\perp. \end{cases}$$

Preuve. — Par (7.8), on voit facilement que le coefficient de T^2 dans l'expansion asymptotique de $L_{3,\varepsilon,T}^3$ est H_ε .

En utilisant (1.35) et (7.8), on voit que le coefficient de T dans l'expansion de $L_{3,\varepsilon,T}^3$ est l'opérateur Q_ε .

D'après le même calcul que dans [BerB, théorème 9.3], on a

$$(9.18) \quad [D^X, D_\infty^H + {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi|Z)}] \\ = -\frac{1}{2} [\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi}, \frac{1}{2} \langle A(e_i) f_{\ell,1}^H, e_j \rangle_{g^{Tx}} c(f_{\ell,1}^H) c(e_j) \\ + \langle S_1(e_i) g_{\alpha,3,\infty}^H, e_j \rangle_{g^{Tx}} g^\alpha c(e_j) / \sqrt{2}]_+ \\ + \frac{1}{2} c(f_{\ell,1}^H) c(e_j) L_1^\xi(f_{\ell,1}^H, e_j) \\ + (1/\sqrt{2}) g^\alpha c(e_j) L_1^\xi(g_{\alpha,3,\infty}^H, e_j).$$

Par (9.12), (9.16) et (9.18), il est clair que $Q_\varepsilon(F_\varepsilon^0) \subset F_\varepsilon^{0,\perp}$.

On a bien terminé la preuve du théorème 9.3. \square

Il est clair que pour $Y \in (T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0}$, $H_{\varepsilon Y}$ est un opérateur elliptique agissant le long de la fibre X_{b_0} .

PROPOSITION 9.4. — *Pour tout $\varepsilon > 0$*

$$(9.19) \quad \text{Ker } H_{\varepsilon Y} = \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*Y)_{b_0} \widehat{\otimes} K_{\varepsilon Y}.$$

Preuve. — La preuve est la même que dans [BerB, prop. 9.4]. \square

d) Une famille d'espaces de Sobolev.

Soit

$$(9.20) \quad g_\varepsilon(Y) = 1 + (1 + |Y|^2)\varphi^2\left(\frac{1}{2}\varepsilon|Y|\right).$$

Pour $0 \leq q \leq 2 \dim V$, soit E_q^0 l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de

$$\bigoplus_{q_1+q_2=q} \Lambda^{q_1}(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} \Lambda^{q_2}(T_{\mathbb{R}}^*Y)_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)|_{X_{b_0}}$$

sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$. Alors

$$E^0 = \bigoplus_{q=0}^{2 \dim V} E_q^0.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on note E^p et E_q^p les espaces de Sobolev d'ordre p correspondants.

Pour $s \in E_q^0$, on pose

$$(9.21) \quad |s|_{\varepsilon,0}^2 = \int_{(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}} |s(Y, x)|^2 g_{\varepsilon}^{2(2 \dim V - q)}(Y) \frac{dv_{TY_{b_0}}(Y) dv_{X_{b_0}}(x)}{(2\pi)^{\dim Z}}.$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon,0}$ le produit hermitien sur E^0 correspondant à $|\cdot|_{\varepsilon,0}$. Pour $s \in E^1$, on pose

$$(9.22) \quad |s|_{\varepsilon,T,1}^2 = T^2 |P_{\varepsilon Y}^{\perp} s|_{\varepsilon,0}^2 + |P_{\varepsilon Y} s|_{\varepsilon,0}^2 + \sum_1^{2m} |\nabla_{f_{\alpha}} s|_{\varepsilon,0}^2 + T^2 \sum |\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi} P_{\varepsilon Y}^{\perp} s|_{\varepsilon,0}^2.$$

Alors (9.22) définit une norme sur E^1 . Soit E^{-1} l'antidual de E^1 , et soit $|\cdot|_{\varepsilon,T,-1}$ la norme sur E^{-1} associée à la norme $|\cdot|_{\varepsilon,T,1}$ sur E^1 . On identifie E^0 à son antidual par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon,0}$.

Par le théorème 9.3, il est clair que l'argument d'analyse fonctionnelle de [BL, § 13 (k)–(o)] et [BerB, § 9 (d)] peut être utilisé directement dans notre situation. En effet, la structure asymptotique de $L_{3,\varepsilon,T}^3$ quand $T \rightarrow +\infty$ est la même que dans [BerB, § 9 (c)]. Bien sûr, on a aussi des variables grassmanniennes supplémentaires $g^{\alpha} \in T_{\mathbb{R}}^*S$, mais elles sont du même type que les f^{ℓ} .

e) Un opérateur Ψ_{ε} .

Soit F_{ε} l'espace vectoriel des sections C^{∞} de $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*Y)_{b_0} \widehat{\otimes} S_{\varepsilon}^{-1*}K$ sur $(T_{\mathbb{R}}Y)_{b_0}$. Alors H_{ε} est inversible sur $F_{\varepsilon}^{0,\perp}$.

DÉFINITION 9.5. — Soit Ψ_{ε} l'opérateur de F_{ε} dans F_{ε} défini par

$$(9.23) \quad \Psi_{\varepsilon} = E_{\varepsilon} - F_{\varepsilon} H_{\varepsilon}^{-1} G_{\varepsilon}.$$

On vérifie facilement que l'opérateur Ψ_{ε} est un opérateur elliptique d'ordre 2 agissant sur F_{ε} .

Pour $U \in B^{TY}(0, 2\alpha)$, on identifie $(\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y))_U$ à $\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)_{b_0}$ par transport parallèle le long de la géodésique dans Y , $t \in [0, 1] \rightarrow tU$, relativement à la connexion

$$\psi_{\varepsilon} \nabla \pi_2^* \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y) \psi_{\varepsilon}^{-1}.$$

L'opérateur B_{2,ε^2}^2 agit sur les sections \mathcal{C}^∞ de $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}Y)_{b_0} \widehat{\otimes} K$ sur $B^{TY}(0, 2\alpha)$. Si l'on fait le même changement de coordonnées locales sur Y_s , et le même changement d'échelle sur les variables de Clifford $c(f_\ell)$ qu'au § 9 b), alors, à partir de B_{2,ε^2}^2 , on obtient un opérateur Σ_ε^3 , qui agit sur les sections \mathcal{C}^∞ de $\Lambda(T_{\mathbb{R}}^*S)_{s_0} \widehat{\otimes} \Lambda(T_{\mathbb{R}}^*Y)_{b_0} \widehat{\otimes} S_\varepsilon^{-1*}K$ sur $B^{TY}(0, 2\alpha/\varepsilon)$.

THÉORÈME 9.6. — Sur $B^{TY}(0, 2\alpha/\varepsilon)$, on a

$$(9.24) \quad \Psi_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon^3.$$

Preuve. — En utilisant (7.8) et en procédant comme en [BL, th. 13.43], on a (9.24). \square

f) Preuve du théorème 9.2.

En utilisant (7.7), (7.15), les théorèmes 9.3 et 9.6, la preuve du théorème 9.2 est la même que dans [BL, § 13 (q)] et [BerB, § 9 (g)]. \square

10. La classe de Bott-Chern $\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)})$

Le but de ce paragraphe est de construire la classe de Bott-Chern $\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$, et de démontrer les théorèmes 3.8 et 3.9.

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on généralise les résultats de [BGS1] sur les classes de Bott-Chern. Dans b), on rappelle la propriété de fonctorialité de la suite spectrale de Leray [Grot]. Dans c), d'après b), on construit un bicomplexe de fibrés holomorphes sur S qui calcule la suite spectrale de Leray. Dans d), on construit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S/P^{S,0}$ et on démontre le théorème 3.8. Dans e), on montre le théorème 3.9.

On suppose ici que π_1 est projective, et que V et W sont des variétés projectives. On utilise les mêmes notations qu'au § 3.

a) Classes de Bott-Chern.

Soit $(E, v) = (E^i, v)_{0 \leq i \leq n}$ un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe S . Pour $s \in S$, on note $H_s^i(E)$ la i -ième cohomologie du complexe $(E, v)_s$. On suppose que pour $0 \leq i \leq n$, le rang des fibres $H^i(E)$ est localement constant; alors, $H^i(E)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur S . Soient $F^i = v(E^{i-1})$ et $G^i = \text{Ker } v|_{E^i}$.

On a les suites exactes suivantes :

$$(10.1) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow G^i \rightarrow E^i \rightarrow F^{i+1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow F^i \rightarrow G^i \rightarrow H^i(E) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Soient h^{E^i} , $h^{H^i(E)}$ des métriques hermitiennes sur E^i , $H^i(E)$. On note

$$h^E = \bigoplus_i h^{E^i}, \quad h^{H(E)} = \bigoplus_i h^{H^i(E)}$$

des métriques sur $E = \bigoplus_i E^i$, $H(E) = \bigoplus_i H^i(E)$. Soient h^{F^i} et h^{G^i} les métriques sur F^i et G^i induites par h^{E^i} .

On note

$$\tilde{\text{ch}}(E^i, F^{i+1}, h^{E^i}, h^{F^{i+1}}), \quad \tilde{\text{ch}}(G^i, H^i(E), h^{G^i}, h^{H^i(E)}) \in P^S/P^{S,0}$$

les classes de Bott-Chern associées à (10.1) [BGS1, § 1(f)]. On pose

$$(10.2) \quad \begin{cases} \text{ch}(E, h^E) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(E^i, h^{E^i}), \\ \text{ch}(H(E), h^{H(E)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(H^i(E), h^{H^i(E)}). \end{cases}$$

On dit que E est scindé, si

$$(10.3) \quad E^i = G^i \oplus F^{i+1}, \quad G^i = H^i(E) \oplus F^i,$$

et si les scindements (10.3) sont orthogonaux.

PROPOSITION 10.1. — *Il existe une unique manière de définir une classe de Bott-Chern $\tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que :*

i) *On a*

$$(10.4) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \text{ch}(H(E), h^{H(E)}) - \text{ch}(E, h^E).$$

ii) *Pour tout application holomorphe de variétés complexes $f : S' \rightarrow S$,*

$$(10.5) \quad \tilde{\text{ch}}(f^*E, f^*H(E), h^{f^*E}, h^{f^*H(E)}) = f^* \tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}).$$

iii) *Si E est scindé, alors*

$$(10.6) \quad \tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = 0 \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

Preuve. — La preuve est la même que dans [BGS1, théorème 1.29]. \square

PROPOSITION 10.2. — On a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(10.7) \quad \begin{aligned} \tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \\ = \sum_i (-1)^i [\tilde{\text{ch}}(G^i, H^i(E), h^{G^i}, h^{H^i(E)}) + \tilde{\text{ch}}(E^i, F^{i+1}, h^{E^i}, h^{F^{i+1}})]. \end{aligned}$$

Preuve. — On vérifie facilement que le terme à droite de (10.7) vérifie (10.4)–(10.6). D’après la proposition 10.1, on a (10.7). \square

Par la théorie de Hodge, on peut identifier $H(E)$ au sous-fibré de E formé des éléments harmoniques dans E . Soit $h^{H(E)}$ la métrique induite par la métrique h^E sur $H(E)$. Soient $\nabla^E, \nabla^{H(E)}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(E, h^E), (H(E), h^{H(E)})$. Soit N l’opérateur de nombre sur E . Soit v^* l’adjoint de v pour h^E . On pose $V = v + v^*$. Pour $u \geq 0$, soit A_u la superconnexion

$$(10.8) \quad A_u = \nabla^E + \sqrt{u} V.$$

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $\text{Re } s > 1$, on pose

$$(10.9) \quad \zeta_1(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 u^{s-1} \{ \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-A_u^2)] - \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{H(E),2})] \} du.$$

Alors $\zeta_1(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $s \in \mathbb{C}$ près de $s = 0$.

Pour $s \in \mathbb{C}, \text{Re } s < \frac{1}{2}$, on pose

$$(10.10) \quad \zeta_2(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{+\infty} u^{s-1} \{ \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-A_u^2)] - \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{H(E),2})] \} du.$$

En utilisant [BeGeV, th. 9.2], $\zeta_2(s)$ est une fonction holomorphe de s .

DÉFINITION 10.3. — On pose

$$(10.11) \quad \zeta(E, h^E) = \frac{\partial}{\partial s} (\zeta_1 + \zeta_2)(0).$$

Alors $\zeta(E, h^E)$ est une forme \mathcal{C}^∞ sur S . En utilisant (10.9), (10.10), on a

$$(10.12) \quad \begin{aligned} \zeta(E, h^E) = & -\int_0^1 \{ \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-A_u^2)] - \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{E,2})] \} \frac{du}{u} \\ & - \int_1^{+\infty} \{ \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-A_u^2)] - \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{H(E),2})] \} \frac{du}{u} \\ & + \Gamma'(1) \{ \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{E,2})] - \varphi \text{Tr}_s [N \exp(-\nabla^{H(E),2})] \}. \end{aligned}$$

Par [BGS1, th. 1.15], les formes $\zeta(E, h^E)$ sont dans P^S , et on a

$$(10.13) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \zeta(E, h^E) = \text{ch}(H(E), h^{H(E)}) - \text{ch}(E, h^E).$$

PROPOSITION 10.4. — On a l'identité

$$(10.14) \quad \zeta(E, h^E) = \tilde{\text{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

Démonstration. — La preuve est la même que dans [BGS1, cor. 1.30]. \square

PROPOSITION 10.5. — Soit $E = E^0 \supset \dots \supset E^m = 0$ une filtration de fibrés vectoriels holomorphes sur S . On pose $\text{Gr}^i E = E^i/E^{i+1}$. Soient h^E , $h^{\text{Gr} E} = \oplus h^{\text{Gr}^i E}$ des métriques hermitiennes sur E , $\text{Gr} E = \bigoplus \text{Gr}^i E$. Soit h^{E^i} la métrique sur E^i induite par h^E . Alors il existe une unique manière de définir une classe de Bott-Chern $\tilde{\text{ch}}(E, \text{Gr} E, h^E, h^{\text{Gr} E})$ appartenant à $P^S/P^{S,0}$ telle que :

i) On a

$$(10.15) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \tilde{\text{ch}}(E, \text{Gr} E, h^E, h^{\text{Gr} E}) = \text{ch}(\text{Gr} E, h^{\text{Gr} E}) - \text{ch}(E, h^E).$$

ii) Pour toute application holomorphe de variétés complexes $f : S' \rightarrow S$,

$$(10.16) \quad \tilde{\text{ch}}(f^* E, f^* \text{Gr} E, h^{f^* E}, h^{f^* \text{Gr} E}) = f^* \tilde{\text{ch}}(E, \text{Gr} E, h^E, h^{\text{Gr} E}).$$

iii) Si $(E^k, h^{E^k}) = \bigoplus_{i \geq k} (\text{Gr}^i E, h^{\text{Gr}^i E})$ pour tout $k \geq 0$, alors

$$(10.17) \quad \tilde{\text{ch}}(E, \text{Gr} E, h^E, h^{\text{Gr} E}) = 0.$$

Preuve. — La preuve est la même que dans [BGS1, th. 1.29]. \square

REMARQUE 10.6. — On a les suites exactes suivantes

$$(10.18) \quad S_i : 0 \rightarrow E^{i+1} \rightarrow E^i \rightarrow \text{Gr}^i E \rightarrow 0.$$

D'après la proposition 10.5. on vérifie facilement qu'on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(10.19) \quad \tilde{\text{ch}}(E, \text{Gr} E, h^E, h^{\text{Gr} E}) = - \sum_{i=0}^m \tilde{\text{ch}}(E^i, \text{Gr}^i E, h^{E^i}, h^{\text{Gr}^i E})$$

Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})$ (où $0 \leq p, q \leq n$) un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur S . Soit $H(\mathcal{E})$ la cohomologie de \mathcal{E} . Soit (\mathcal{E}_r, d_r)

la suite spectrale induite par la filtration $F^p \mathcal{E} = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{E}^{p', \bullet}$. Soit $FH(\mathcal{E})$ la filtration associée sur $H(\mathcal{E})$. Alors $\mathcal{E}_\infty = \text{Gr}H(\mathcal{E})$ (cf. [GrH, § 3.5]).

On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant.

Soit $h^\mathcal{E} = \bigoplus h^{\mathcal{E}^{p,q}}$ une métrique sur $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{E}^{p,q}$ et $h^{\mathcal{E}_0}$ la métrique correspondante sur $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Soient $h^{\mathcal{E}_r}$ ($r \geq 1$) et $h^{H(\mathcal{E})}$ des métriques sur \mathcal{E}_r et $H(\mathcal{E})$. On suppose que $h^{\mathcal{E}_r} = h^{\mathcal{E}_\infty}$ pour $r > n$. On pose

$$(10.20) \quad \tilde{\text{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \tilde{\text{ch}}(H^k(\mathcal{E}), \text{Gr} H^k(\mathcal{E}), h^{H^k(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}).$$

THÉORÈME 10.7. — On a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(10.21) \quad \begin{aligned} \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^\mathcal{E}, h^{H(\mathcal{E})}) \\ = \sum_{k=0}^\infty \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k+1}, h^{\mathcal{E}_k}, h^{\mathcal{E}_{k+1}}) - \tilde{\text{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}). \end{aligned}$$

Preuve. — On le démontrera dans [Ma1]. \square

b) Suite spectrale de Leray [Grot].

Soit Y un espace topologique. On note C^Y la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y . Pour un objet G de C^Y , on note $\Gamma_Y(G)$ le groupe des sections de G sur Y .

DÉFINITION 10.8. — Soit G un faisceau de groupes abéliens, et soit $L = (L^i)$ un complexe à degrés positifs de faisceaux de groupes abéliens. Soit $\varepsilon : G \rightarrow L$ une application d'augmentation. On dit que le complexe L est une résolution de G , si la suite

$$(10.22) \quad 0 \rightarrow G \xrightarrow{\varepsilon} L^0 \rightarrow L^1 \rightarrow \dots \rightarrow L^i \rightarrow \dots$$

est exacte. On dit que le complexe L est une résolution injective (resp. acyclique) de G , si de plus les L^i sont injectifs (resp. acycliques).

Si (F, v) est un complexe dans C^Y , on note, pour $i \in \mathbb{Z}$,

$$(10.23) \quad \begin{aligned} Z^i(F) &= \text{Ker}(v|_{F^i}), \quad B^i(F) = \text{Im}(v|_{F^{i-1}}), \\ H^i(F) &= Z^i(F)/B^i(F). \end{aligned}$$

Soit $L = (L^{p,q})$ un bicomplexe dans C^Y ; on définit aussi $Z^{p,q}(L), B^{p,q}(L), H^{p,q}(L)$ comme (10.23) pour le complexe $L^{\bullet,q} = (L^{p,q})_p$.

DÉFINITION 10.9. — On dit que le bicomplexe $L = (L^{p,q})_{p \geq 0}$ est une résolution du complexe $F = (F^p)_{p \geq 0}$ s'il existe une augmentation $F \rightarrow L$, telle que pour p fixé, $L^{p,\bullet}$ est une résolution de F^p , et si on filtre L par $F^q L = \bigoplus_{q' \geq q} L^{\bullet,q'}$, alors la suite spectrale associée $(\mathcal{E}_r(L), d_r)$ dégénère à partir de $\mathcal{E}_2(L)$. On dit que le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution injective (resp. acyclique) de F , si de plus les $L^{p,q}, H^{p,q}(L)$ sont injectifs (resp. acycliques).

REMARQUE 10.10. — Le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution du complexe F si et seulement si, pour p fixé, $L^{p,\bullet}$ (resp. $Z^{p,\bullet}(L)$, resp. $B^{p,\bullet}(L)$, resp. $H^{p,\bullet}(L)$) est une résolution de F^p (resp. $Z^p(F)$, resp. $B^p(F)$, resp. $H^p(F)$) [CE, chap. XVII].

De même le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution injective (resp. acyclique) de F , si et seulement si de plus les $L^{p,q}, Z^{p,q}(L), B^{p,q}(L), H^{p,q}(L)$ sont injectifs (resp. acycliques).

Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit f une application continue de Y dans X . Soit G un objet de C^Y , soit (G^p) une résolution de G dans C^Y . Soit $L = (L^{p,q})$ un bicomplexe qui est une résolution injective du complexe $F = (f_*(G^p))$ dans C^X . Alors on obtient un bicomplexe $\Gamma_X(L)$. Si on le filtre par $F^p \Gamma_X(L) = \bigoplus_{p' \geq p} \Gamma_X(L^{\bullet,p'})$, on obtient une suite spectrale associée (E_r, d_r) dont le terme E_2 est

$$E_2^{p,q}(G) = H^p(X, R^q f_*(G))$$

et dont le terme E_∞ est le groupe gradué associé à une filtration convenable de $(H^n(Y, G))_n$.

Le résultat suivant est établi dans [Grot, th. 3.7.3].

THÉORÈME 10.11. — Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit f une application continue de Y dans X . Alors il existe un foncteur spectral sur la catégorie C^Y des faisceaux de groupes abéliens G sur Y , aboutissant au foncteur gradué $(H^n(Y, G))_n$, et dont le terme initial est

$$(10.24) \quad E_2^{p,q}(G) = H^p(X, R^q f_*(G)).$$

De plus, ce foncteur spectral est calculé de la manière ci-dessus.

REMARQUE 10.12. — Pour calculer la suite spectrale de Leray, d'après [Grot, p. 147 et 149, rem. 2], on sait qu'on peut prendre aussi une résolution \mathcal{G} de G par des G^i qui sont f_* -acycliques (i.e. $R^j f_* G^i = 0$, pour $j > 0$ et $i \geq 0$), et qu'il suffit de supposer que $L = (L^{q,p})$ est une résolution acyclique du complexe $(f_* G^q)$.

c) Un bicomplexe holomorphe sur S .

Dans cette partie, en procédant comme dans la partie b), on construit la suite spectrale de Leray dans le contexte holomorphe.

DÉFINITION 10.13. — Soit $(F, v) = (F^i)$ un complexe (resp. $\mathcal{F} = (F^{i,j})$ un bicomplexe) de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe V . On suppose que les $H^i(F)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes. On dit que le bicomplexe \mathcal{F} est une résolution de fibrés holomorphes du complexe F , si les $H^{i,j}$ sont des fibrés vectoriels holomorphes et le bicomplexe \mathcal{F} vérifie les conditions de la définition 10.9 dans le contexte holomorphe. Si de plus, les $F^{i,j}$ et les $H^{i,j}$ sont des fibrés acycliques, on dit que le bicomplexe \mathcal{F} est une résolution acyclique de fibrés holomorphes du complexe F .

REMARQUE 10.14. — Désormais, si $\mathcal{F} = (F^{i,j})$ est une résolution acyclique de fibrés holomorphes du complexe F sur V , alors on note $(\mathcal{E}_r(\mathcal{F}), d_r)$ (resp. $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$) la suite spectrale associée au bicomplexe \mathcal{F} filtré par $F^p \mathcal{F} = \bigoplus_{p' \geq p} F^{\bullet, p'}$ (resp. $H^0(V, \mathcal{F})$ filtré par $F^p H^0(V, \mathcal{F}) = \bigoplus_{p' \geq p} H^0(V, F^{\bullet, p'})$). D'après la définition 10.13, on a

$$(10.25) \quad E_1(\mathcal{F}) = H^0(V, \mathcal{E}_1(\mathcal{F})), \quad E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = H^p(V, H^q(F)).$$

On rappelle que V et W sont des variétés projectives. Soit $n = \dim Z$.

En procédant comme dans [GrH, § 5.3] et [Q1, § 7.2.7], on peut construire une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique $(\xi^i)_{0 \leq i \leq n}$ de fibrés holomorphes de ξ sur W . On note $F^i = R^0 \pi_{1*} \xi^i$ ($i \geq 0$). Alors F^i est π_{2*} -acyclique. On a aussi un complexe F de fibrés holomorphes sur V

$$(10.26) \quad (F, v) : \quad 0 \rightarrow F^0 \xrightarrow{v} F^1 \xrightarrow{v} \dots \xrightarrow{v} F^n \rightarrow 0.$$

Alors d'après la construction de l'image directe, on sait que pour $i \geq 0$,

$$(10.27) \quad H^i(F) = R^i \pi_{1*} \xi.$$

Comme le rang de $H^i(F)$ est localement constant, on sait que les rangs de $Z^i(F), B^i(F)$ sont aussi localement constants. Donc $Z^i(F), B^i(F)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur V .

D'après [BS, preuve du lemme 12], on sait qu'on peut construire des fibrés vectoriels holomorphes $B^{i,j}, Z^{i,j}, H^{i,j}, F^{i,j}$ (avec $0 \leq i, j \leq n$) sur V tels que pour chaque fibre $Y_s (s \in S)$, pour tout $i \geq 0$, le bicomplexe

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z^{i,\bullet} \rightarrow F^{i,\bullet} \rightarrow B^{i+1,\bullet} \rightarrow 0, \\ (\text{resp. } 0 \rightarrow B^{i,\bullet} \rightarrow Z^{i,\bullet} \rightarrow H^{i,\bullet} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

est une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z^i(F) \rightarrow F^i \rightarrow B^{i+1}(F) \rightarrow 0, \\ (\text{resp. } 0 \rightarrow B^i(F) \rightarrow Z^i(F) \rightarrow H^i(F) \rightarrow 0) \end{aligned}$$

au sens de la définition 10.13.

Maintenant, en composant les bicomplexes

$$0 \rightarrow Z^{i,\bullet} \longrightarrow F^{i,\bullet} \longrightarrow B^{i+1,\bullet} \rightarrow 0$$

et les injections $B^{i,\bullet} \rightarrow Z^{i,\bullet}$, on obtient un bicomplexe $(F^{i,j})$ de fibrés holomorphes sur V qui, pour chaque fibre Y_s ($s \in S$), est une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe (F^i) au sens de la définition 10.13.

Désormais, on note $(\xi^i)_{0 \leq i \leq n}$ une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de fibrés holomorphes de ξ sur W , et on note $F^i = R^0\pi_{1*}\xi^i$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe (F^i) au sens de la définition 10.13. On note :

$$(10.28) \quad v : \mathcal{F}^{i,j} \rightarrow \mathcal{F}^{i+1,j}, \quad \delta : \mathcal{F}^{i,j} \rightarrow \mathcal{F}^{i,j+1},$$

les morphismes du bicomplexe \mathcal{F} et $d = v + \delta$ le morphisme total.

D'après la partie b), si on filtre le bicomplexe de fibrés holomorphes $E(\mathcal{F}) = (H^0(Y, \mathcal{F}), v, \delta)$ sur S par ${}''F^p E(\mathcal{F}) = \bigoplus_{p' \geq p} H^0(Y, \mathcal{F}^{\bullet, p'}|_Y)$, alors la suite spectrale associée $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$ calcule la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) (à partir de $r = 2$) pour $s \in S$.

d) Définition de $\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)})$.

On se donne des métriques hermitiennes $h^{E^{p,q}(\mathcal{F})}$ et $h^{E_1^{p,q}(\mathcal{F})}$ sur $E^{p,q}(\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{F}^{p,q}|_Y)$ et $E_1^{p,q}(\mathcal{F})$. Soit $h^{E_2(\mathcal{F})}$ la métrique sur $E_2(\mathcal{F})$ correspondant à h^{E_2} .

D'après la partie c) et le théorème 10.7, on a naturellement :

DÉFINITION 10.15. — On définit la classe de Bott-Chern

$$\widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S / P^{S,0}$$

de la manière suivante :

$$(10.29) \quad \begin{aligned} \widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ = \widetilde{\text{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ - \sum_{i=0}^1 \widetilde{\text{ch}}(E_i(\mathcal{F}), E_{i+1}(\mathcal{F}), h^{E_i(\mathcal{F})}, h^{E_{i+1}(\mathcal{F})}). \end{aligned}$$

REMARQUE 10.16. — En utilisant [BGS1, th. 1.20] et la proposition 10.2, on sait que la définition de $\widetilde{\text{ch}}(\cdot, \cdot)$ ne dépend pas des choix de métriques $h^{E(\mathcal{F})}$ sur $E(\mathcal{F})$. De plus, on a

$$(10.30) \quad \begin{aligned} \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \widetilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \\ = \text{ch}(H(Z, \xi|_Z), h^{H(Z, \xi|_Z)}) - \text{ch}(E_2, h^{E_2}). \end{aligned}$$

THÉORÈME 10.17. — *La classe de Bott-Chern*

$$\tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Z, \xi|_Z)}) \in P^S / P^{S,0}$$

ne dépend pas du choix des résolutions (ξ^\bullet) et \mathcal{F} .

Preuve.

• Par [BS, § 4], étant donné $(\xi_1^\bullet), (\xi_2^\bullet)$ deux résolutions π_{1*} et π_{3*} -acycliques de ξ , on peut trouver une troisième résolution (ξ_3^\bullet) π_{1*} et π_{3*} -acyclique et des injections μ_1, μ_2 des deux premières dans la troisième.

• Soient $F_i = R^0 \pi_{1*} \xi_i^\bullet$ où $i = 1, 2, 3$. Par [BS, § 4], étant données \mathcal{F}_i une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe F_i ($i = 1, 2$), on peut trouver $\mathcal{F}_{3,1}, \mathcal{F}_{3,2}$ des résolutions π_{2*} -acycliques de fibrés holomorphes du complexe F_3 , et des injections $\mu_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{3,i}$ ($i = 1, 2$) compatible à $\mu_i : F_i \rightarrow F_3$, et qui induisent des injections de $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_i)$ dans $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,i})$. Pour appliquer [BS, § 4], il suffit de considérer au cas où F_i ($i = 1, 2, 3$) sont des suites exactes courtes.

• Enfin, par [BS, § 4], on peut trouver une troisième résolution \mathcal{F}_3 , π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe F_3 et des applications injectives des deux premières dans la troisième qui induisent des injections de $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,1}), \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,2})$ dans $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_3)$.

D'après les discussions ci-dessus, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, dans la situation suivante, les termes à droite associés à ces résolutions sont égaux.

Soit $(\xi^i), ('\xi^i)$ deux résolutions π_{1*} et π_{3*} acycliques de fibrés holomorphes de ξ sur W , et soit $\mu : \xi^\bullet \rightarrow '\xi^\bullet$ une injection de complexe. Soit $F^i = R^0 \pi_{1*} \xi^i, G^i = R^0 \pi_{1*} '\xi^i$, alors on a une injection de complexe $\mu : F \rightarrow G$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ (resp. $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^{i,j})$) une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe $F = (F^i)$ (resp. $G = (G^i)$) sur V . Soit $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ une injection de bicomplexes qui est compatible aux augmentations $F \rightarrow \mathcal{F}$ et $G \rightarrow \mathcal{G}$, et qui induit également une injection $\mu : \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$.

Alors, on a le diagramme commutatif suivant :

$$(10.31) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & F & \xrightarrow{\mu} & G & \longrightarrow & G/F \rightarrow 0. \end{array}$$

Par un argument de suite spectrale, le complexe G/F est acyclique.

Par (10.31), on a aussi le bicomplexe

$$(10.32) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\ \dots & \rightarrow & \mathcal{E}_1^{\bullet,q}(\mathcal{F}) & \rightarrow & \mathcal{E}_1^{\bullet,q}(\mathcal{G}) & \rightarrow & \mathcal{E}_1^{\bullet,q}(\mathcal{G}/\mathcal{F}) & \rightarrow & \mathcal{E}_1^{\bullet,q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{array}$$

dont chaque ligne est acyclique.

Par la définition 10.13 et (10.32), et par un argument de suite spectrale, on a

$$(10.33) \quad \mathcal{E}_2(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = 0.$$

Comme $\mu : \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ est injective, par (10.32), on a la suite exacte

$$(10.34) \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}_1(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Comme \mathcal{F} , \mathcal{G} , $\mathcal{E}_1(\mathcal{F})$ et $\mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ sont π_{2*} -acycliques, par (10.31) et (10.34), \mathcal{G}/\mathcal{F} et $\mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})$ sont aussi π_{2*} -acycliques. D'où \mathcal{G}/\mathcal{F} est une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe G/F .

D'après la remarque 10.14, on sait que

$$(10.35) \quad E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})|_Y), \quad E_2(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = 0.$$

Comme $\mathcal{E}_1(\mathcal{F})$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ sont π_{2*} -acycliques, par (10.25), (10.34) et (10.35), on a la suite exacte suivante :

$$(10.36) \quad E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F}) : 0 \rightarrow E_1(\mathcal{F}) \longrightarrow E_1(\mathcal{G}) \longrightarrow E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Si on note $I(\mathcal{F})$, $I(\mathcal{G})$ les termes à droite de (10.29) associés à \mathcal{F} , \mathcal{G} , alors on doit montrer que

$$(10.37) \quad I(\mathcal{F}) = I(\mathcal{G}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, on note $E(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ la suite exacte suivante :

$$(10.38) \quad E(\mathcal{G}, \mathcal{F}) : 0 \rightarrow E(\mathcal{F}) \longrightarrow E(\mathcal{G}) \longrightarrow E(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Soient $h^{E_r(\mathcal{F})}$, $h^{E_r(\mathcal{G})}$, $h^{E_r(\mathcal{G}/\mathcal{F})}$ (avec $r = 0, 1, 2$) des métriques hermitiennes sur $E_r(\mathcal{F})$, $E_r(\mathcal{G})$, $E_r(\mathcal{G}/\mathcal{F})$; soient $h^{E(\mathcal{G}, \mathcal{F})}$, $h^{E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F})}$ les métriques induites sur $E(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, $E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.

Pour le bicomplexe

$$(10.39) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow d \\ 0 & \rightarrow & E(\mathcal{F}) & \longrightarrow & E(\mathcal{G}) & \longrightarrow & E(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0, \end{array}$$

en utilisant le théorème 10.7, on a

$$(10.40) \quad \begin{aligned} & \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Z, \xi|Z)}) \\ & - \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}), H(E(\mathcal{G})), h^{E(\mathcal{G})}, h^{H(Z, \xi|Z)}) \\ & + \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \\ & = \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}, \mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}, \mathcal{F})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le bicomplexe

$$(10.41) \quad \begin{array}{ccccccc} & \uparrow v & & \uparrow v & & \uparrow v & \\ 0 & \rightarrow & E(\mathcal{F}) & \longrightarrow & E(\mathcal{G}) & \longrightarrow & E(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0, \end{array}$$

en utilisant le théorème 10.7 et (10.36), on a

$$(10.42) \quad \begin{aligned} & \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{F}), E_1(\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{F})}, h^{E_1(\mathcal{F})}) \\ & - \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}), E_1(\mathcal{G}), h^{E(\mathcal{G})}, h^{E_1(\mathcal{G})}) \\ & + \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}), E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})}, h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \\ & + \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F})}) \\ & = \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}, \mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}, \mathcal{F})}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le bicomplexe

$$(10.43) \quad \begin{array}{ccccccc} & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta & \\ 0 & \rightarrow & E_1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & E_1(\mathcal{G}) & \longrightarrow & E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \rightarrow 0, \end{array}$$

en utilisant le théorème 10.7 et (10.36), on a

$$(10.44) \quad \begin{aligned} & \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{F}), E_2(\mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{F})}, h^{E_2}) \\ & - \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{G}), E_2(\mathcal{G}), h^{E_1(\mathcal{G})}, h^{E_2}) \\ & + \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \\ & = \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{G}, \mathcal{F})}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le bicomplexe $E(\mathcal{G}/\mathcal{F})$, en utilisant le théorème 10.7 et (10.35), on a

$$(10.45) \quad \begin{aligned} & \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}), E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})}, h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \\ & + \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \\ & = \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Par (10.40)–(10.45), on obtient (10.37).

On a bien terminé la preuve du théorème 10.17. \square

e) Preuve du théorème 3.9.

Par la construction de la section canonique $\sigma \in \lambda^{-1}(E_2) \otimes \lambda(R^\bullet \pi_{3*} \xi)$ [KM], en utilisant [BGS3, th. 1.23], (10.7), (10.29), on obtient le théorème 3.9. On laisse le détail au lecteur. \square

11. Identités entre les formes de torsion analytique d'un complexe de fibrés holomorphes

Soit $\pi : M \rightarrow B$ une submersion holomorphe de fibre compacte Z . Soit $(\eta^i, v)_{0 \leq i \leq n}$ un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur M . On suppose que le rang de l'hypercohomologie $H(Z, \eta|_Z)$ est localement constant sur B . Dans ce paragraphe, on montre des relations entre les formes de torsion analytique du complexe (η, v) .

Ce paragraphe est organisé de la façon suivante. Dans a), on rappelle la définition de formes de torsion analytique pour le complexe (η, v) (voir [B4, § 3 (b)]). Dans b), on démontre une identité de formes de torsion analytique associées à (η, v) . Dans c), on énonce une identité entre les formes de torsion analytique de (η, v) et celles de son fibré cohomologique. Dans d), en déformant le complexe η (voir [BGS1]), on montre le théorème 11.2.

On utilise les notations du paragraphe 2.

a) Formes de torsion analytique associées à un complexe.

Soient M et B des variétés complexes. Soit $\pi : M \rightarrow B$ une submersion holomorphe de fibre compacte Z . Soit ω^M une $(1,1)$ -forme réelle, fermée, C^∞ sur M qui induit une métrique hermitienne g^{TZ} sur TZ . Soit

$$(11.1) \quad (\eta, v) : 0 \rightarrow \eta^0 \xrightarrow{v} \eta^1 \xrightarrow{v} \dots \xrightarrow{v} \eta^n \rightarrow 0$$

un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur M . Soient h^η une métrique hermitienne sur η^i , et $h^\eta = \bigoplus_i h^{\eta^i}$ la métrique correspondante sur $\eta = \bigoplus_{i=0}^n \eta^i$.

Pour $b \in B$, soit E_b l'espace des sections C^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \eta$ sur Z_b . Soient N_Z et N_H les opérateurs de nombre sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$ et η . Alors l'opérateur $N_Z + N_H$ définit une \mathbb{Z} -graduation sur E . Soit $\bar{\partial}^Z$ l'opérateur de Dolbeault agissant sur E . Alors $(E, \bar{\partial}^Z + v)$ est un complexe \mathbb{Z} -gradué. Soit $H(Z_b, \eta|_{Z_b})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_Z(\eta|_Z), v)$ sur Z . Alors

$$(11.2) \quad H(Z_b, \eta|_{Z_b}) \simeq H(E_b, \bar{\partial}^Z + v).$$

On suppose que le rang des fibres $H(E, \bar{\partial}^Z + v)$ est localement constant. Alors $H(E, \bar{\partial}^Z + v)$ est un fibré holomorphe sur B . Dans la suite, on identifie les fibrés holomorphes $H(E, \bar{\partial}^Z + v)$ et $H(Z, \eta|_Z)$.

Soit $\bar{\partial}^{Z*}$ (resp. v^*) l'adjoint de $\bar{\partial}^Z$ (resp. v) relativement à g^{TZ}, h^η (resp. h^η). On pose

$$(11.3) \quad V = v + v^*, \quad D^Z = \bar{\partial}^Z + \bar{\partial}^{Z*}, \quad A^Z = D^Z + V.$$

Par la théorie de Hodge, pour $b \in B$,

$$(11.4) \quad H(E_b, \bar{\partial}^Z + v) \simeq \text{Ker } A^{Z_b}.$$

Comme au paragraphe 2 b), $\text{Ker } A^Z$ hérite du produit (2.2) de E . Soit $h^{H(Z, \eta|_Z)}$ la métrique hermitienne correspondante sur $H(Z, \eta|_Z)$. On pose

$$(11.5) \quad \begin{aligned} \text{ch}(\eta, h^\eta) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(\eta^i, h^{\eta^i}), \\ \text{ch}(H(Z, \eta|_Z), h^{H(Z, \eta|_Z)}) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{ch}(H^i(Z, \eta|_Z), h^{H^i(Z, \eta|_Z)}). \end{aligned}$$

Par l'extension de [BKö] au complexe de fibrés hermitiens $(E, \bar{\partial}^Z + v)$, on peut associer des formes de torsion analytique (cf. [B4, § 3 b])

$$T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta) \in P^B / P^{B,0}.$$

Pour cela, il suffit de remplacer partout $\bar{\partial}^Z$ par $\bar{\partial}^Z + v$. Les formes $T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta)$ vérifient l'équation suivante :

$$(11.6) \quad \frac{\bar{\partial} \partial}{2i\pi} T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta) = \text{ch}(H(Z, \eta|_Z), h^{H(Z, \eta|_Z)}) - \int_Z \text{Td}(TZ, g^{TZ}) \text{ch}(\eta, h^\eta).$$

On va maintenant exprimer $T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta)$ en fonction des formes de torsion analytique associées aux deux filtrations du complexe E .

b) Formes de torsion analytique du complexe E et filtration par $\bar{\partial}^Z$.

Dans cette partie, on suppose que η est π_* -acyclique, *i.e.* que l'on a $R^j \pi_* \eta^i = 0$ pour tout $j > 0$ et $i \geq 0$. Alors les $R^0 \pi_* \eta^i$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur B .

On pose $\zeta^i = R^0 \pi_* \eta^i$. Alors

$$(11.7) \quad (\zeta, v) : 0 \rightarrow \zeta^0 \xrightarrow{v} \zeta^1 \xrightarrow{v} \dots \xrightarrow{v} \zeta^n \rightarrow 0$$

est aussi un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur B . On note $H_x^i(\zeta)$ le i -ième groupe cohomologique du complexe $(\zeta, v)_x$.

Par un argument de suite spectrale, pour $i \geq 0$, $H^i(\zeta)$ et $H^i(E, \bar{\partial}^Z + v)$ sont isomorphes canoniquement et holomorphiquement. Dans la suite, on identifie les fibrés holomorphes $H(\zeta)$ et $H(Z, \eta|_Z)$ sur B .

Soient h^ζ et $h^{H(\zeta)}$ les métriques hermitiennes sur ζ et $H(\zeta)$ induites par (g^{TZ}, h^η) , et h^ζ . Soit $\tilde{\text{ch}}(\zeta, H(\zeta), h^\zeta, h^{H(Z, \eta|Z)}) \in P^B/P^{B,0}$ la classe de Bott-Chern construite au paragraphe 10 a). Soient $T(\omega^M, h^{\eta^i})$ les formes de torsion analytiques sur B associées à η^i . On pose

$$(11.8) \quad T(\omega^M, h^\eta) = \sum_{i=0}^n (-1)^i T(\omega^M, h^{\eta^i}).$$

THÉORÈME 11.1. — *Dans $P^B/P^{B,0}$, on a l'identité*

$$(11.9) \quad T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta) = T(\omega^M, h^\eta) + \tilde{\text{ch}}(\zeta, H(\zeta), h^\zeta, h^{H(Z, \eta|Z)}).$$

Preuve. — La formule (11.9) est une généralisation de [B4, th. 0.2]. La seule différence est qu'on suppose $H^i(\zeta) = 0$ pour $i < n$ dans [B4, § 14]. En utilisant la proposition 10.4, et en procédant comme en [B4, § 14], on a (11.9). \square

c) Formes de torsion analytique du complexe E et filtration par v .

Dans cette partie, on suppose que η vérifie l'une de deux conditions suivantes :

- i) on a $H^i(\eta) = 0$ pour $i > 0$;
- ii) le rang des fibres $H^i(\eta)$ est localement constant, et $H^i(\eta)$ est π_* -acyclique.

Par un argument de suite spectrale, on sait que $H(Z, H(\eta)|Z)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur B ; de plus, $H(Z, H(\eta)|Z)$ et $H(Z, \eta|Z)$ sont isomorphes canoniquement et holomorphiquement. D'où dans les deux cas ci-dessus, on peut identifier les fibrés holomorphes $H(Z, H(\eta)|Z)$ et $H(Z, \eta|Z)$.

Soit $h^{H(\eta)}$ une métrique sur $H(\eta)$. Soit $h^{H(Z, H(\eta)|Z)}$ la métrique sur $H(Z, H(\eta)|Z)$ induite par $g^{TZ}, h^{H(\eta)}$. Soit $\tilde{\text{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)})$ la classe de Bott-Chern construite au paragraphe 10 a).

THÉORÈME 11.2. — *On a l'identité suivante dans $P^B/P^{B,0}$:*

$$(11.10) \quad T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta) = T(\omega^M, h^{H(\eta)}) \\ - \tilde{\text{ch}}(H(Z, \eta|Z), h^{H(Z, \eta|Z)}, h^{H(Z, H(\eta)|Z)}) \\ + \int_Z \text{Td}(TZ, g^{TZ}) \tilde{\text{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}).$$

d) Preuve du théorème 11.2.

Soit \mathbb{P}^1 le plan projectif complexe. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droite canonique de degré 1 sur \mathbb{P}^1 , et soit σ la section holomorphe de $\mathcal{O}(1)$ définie par $(1, 0) \in \mathbb{C}^{2*}$.

Alors σ n'est nulle qu'au point ∞ . Si F est un fibré vectoriel holomorphe sur $M \times \mathbb{P}^1$, et $m \geq 0$, on définit $F(m)$ de la manière suivante :

$$(11.11) \quad F(0) = F, \quad F(m) = F(m-1) \otimes \mathcal{O}(1).$$

Pour $i \geq 0$, on pose $F^i = \text{Im}(v|_{\eta^{i-1}})$, $G^i = \ker v|_{\eta^i}$, $H^i = H^i(\eta)$. Soit h^{F^i}, h^{G^i} les métriques sur F^i, G^i induites par h^η .

Pour $j = 0, \dots, n-1$, soit l'application $F^j \rightarrow G^j \oplus F^j(1)$ définie par l'inclusion dans G^j et par $\text{Id} \otimes \sigma$ dans $F^j(1)$. Soit $'G^j = G^j \oplus F^j(1)/F^j$. Soit l'application $G^j \rightarrow \eta^j \oplus 'G^j(1)$ définie par l'inclusion dans η^j et par $x \in G^j \mapsto [(x, 0)] \otimes \sigma \in 'G^j(1)$. On définit aussi

$$(11.12) \quad \begin{cases} \tilde{\eta}^j = \text{Coker}(G^j \rightarrow \eta^j \oplus 'G^j(1))(2n-2j), \\ \tilde{F}^j = F^j(2n-2j+2), \quad \tilde{G}^j = 'G^j(2n-2j+1), \\ \tilde{H}^j = H^j(2n-2j+1). \end{cases}$$

Alors on a les suites exactes suivantes sur $M \times \mathbb{P}^1$

$$(11.13) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow \tilde{G}^j \rightarrow \tilde{\eta}^j \rightarrow \tilde{F}^{j+1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \tilde{F}^{j+1} \rightarrow \tilde{G}^{j+1} \rightarrow \tilde{H}^{j+1} \rightarrow 0. \end{cases}$$

En les composant, on obtient un complexe $(\tilde{\eta}, v) = (\tilde{\eta}^i, v)_{0 \leq i \leq n}$ sur $M \times \mathbb{P}^1$ (voir [GS4, p. 477]).

Soit z le paramètre complexe standard sur \mathbb{P}^1 , et soit $i_z : M \rightarrow M \times \mathbb{P}^1$ l'application de $x \in M$ à $(x, z) \in M \times \mathbb{P}^1$. Alors pour $z \neq \infty$, comme $\sigma(z) \neq 0$, le fibré $i_z^*(\tilde{\eta})$ est isomorphe à η , et $i_\infty^* \tilde{\eta}^j \simeq F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j$. Par partition de l'unité, on peut trouver une métrique $h^{\tilde{\eta}^j}$ sur $\tilde{\eta}^j$ telle que les isomorphismes $i_0^* \tilde{\eta}^j \simeq \eta^j$ et $i_\infty^* \tilde{\eta}^j \simeq F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j$ sont des isométries.

PROPOSITION 11.3. — On a :

$$(11.14) \quad \tilde{\text{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}) = - \int_{\mathbb{P}^1} \text{ch}(\tilde{\eta}, h^{\tilde{\eta}}) \log |z|^2.$$

Preuve. — La preuve est la même que dans [BGS1, (1.115)]. \square

Maintenant, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$(11.15) \quad \begin{array}{ccc} M \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ B \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & B \end{array}$$

avec $\tilde{\pi} = \pi \times \text{Id}_{\mathbb{P}^1}$.

Soit $H(Z, \tilde{\eta}|_Z)$ l'hypercohomologie du complexe $(\mathcal{O}_Z(\tilde{\eta}|_Z), v)$ sur Z . Par notre hypothèse, le rang des fibres $H(Z, \tilde{\eta}|_Z)$ est localement constant. Donc les formes de torsion analytique

$$T(p^*\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{\tilde{\eta}}) \in P^{B \times \mathbb{P}^1} / P^{B \times \mathbb{P}^1, 0}$$

sont bien définies. On a aussi

$$(11.16) \quad h_0^{i_* H(Z, \tilde{\eta}|_Z)} = h^{H(Z, \eta|_Z)}, \quad h_\infty^{i_* H(Z, \tilde{\eta}|_Z)} = h^{H(Z, H(\eta)|_Z)}.$$

On a

$$(11.17) \quad \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \log |z|^2 = \delta_0 - \delta_\infty.$$

En utilisant (2.18), (11.14) et (11.17), on obtient

$$(11.18) \quad \begin{aligned} & \int_Z \text{Td}(TZ, g^{TZ}) \tilde{\text{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}) \\ & - \tilde{\text{ch}}(H(Z, \eta|_Z), h^{H(Z, \eta|_Z)}, h^{H(Z, H(\eta)|_Z)}) \\ & = \int_{\mathbb{P}^1} \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} T(p^*\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{\tilde{\eta}}) \log |z|^2 \\ & = i_0^* T(p^*\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{\tilde{\eta}}) - i_\infty^* T(p^*\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{\tilde{\eta}}) \\ & = T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^\eta) - T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{i_\infty^* \tilde{\eta}}). \end{aligned}$$

D'après notre construction de $\tilde{\eta}$, pour le complexe $i_\infty^* \tilde{\eta}$, on a :

$$(11.19) \quad i_\infty^* \tilde{\eta}^j = F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j, \quad h^{i_\infty^* \tilde{\eta}^j} = h^{F^j} \oplus h^{F^{j+1}} \oplus h^{H^j}$$

et l'application $v : i_\infty^* \tilde{\eta}^j \rightarrow i_\infty^* \tilde{\eta}^{j+1}$ est donnée par 0 sur $F^j \oplus H^j$ et Id sur F^{j+1} .

En utilisant (11.16), (11.19), on peut vérifier facilement qu'on a :

$$(11.20) \quad T(\omega^M, \bar{\partial}^Z + v, h^{i_\infty^* \tilde{\eta}}) = T(\omega^M, h^{H(\eta)}) \quad \text{dans } P^B / P^{B, 0}.$$

Par (11.18), (11.20), on a (11.10). \square

12. Preuve du théorème 3.11

Nous allons appliquer les théorèmes 3.5, 11.1, 11.2 et le paragraphe 10.

On rappelle que $(\xi^\bullet, v) = (\xi^i, v)_{0 \leq i \leq n}$ est une résolution de fibrés holomorphes π_{1*} et π_{3*} -acycliques de ξ sur W . On pose $F^i = R^0 \pi_{1*} \xi^i$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ une résolution π_{2*} -acyclique de fibrés holomorphes du complexe $F = (F^i)$ au sens de la définition 10.13. On note aussi $(\mathcal{E}_r(\mathcal{F}), d_r)$ (resp. $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$) la suite spectrale associée au bicomplexe \mathcal{F} filtré par $F^p \mathcal{F} = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{F}^{\bullet, p'}$ (resp. $H^0(Y, \mathcal{F})$ filtré par

$$F^p H^0(Y, \mathcal{F}) = \bigoplus_{p' \geq p} H^0(Y, \mathcal{F}^{\bullet, p'}|_Y).$$

Soient $v : \mathcal{F}^{i,j} \rightarrow \mathcal{F}^{i+1,j}$ et $\delta : \mathcal{F}^{i,j} \rightarrow \mathcal{F}^{i,j+1}$ les différentielles du bicomplexe \mathcal{F} .

On rappelle que h^ξ est une métrique hermitienne sur ξ , et que $h^{R\pi_{1*}\xi}, h^{R\pi_{3*}\xi}$ sont les métriques sur $R^\bullet \pi_{1*} \xi, R^\bullet \pi_{3*} \xi$ induites par $(g^{TX}, h^\xi), (g^{TZ}, h^\xi)$ définies au paragraphe 2 b). Soit $h^{\xi^\bullet} = \bigoplus_i h^{\xi^i}$ une métrique hermitienne sur ξ^\bullet . Soit h^F la métrique sur F induite par $(g^{TY}, h^{\xi^\bullet})$.

Comme au paragraphe 11 a), on définit $T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v, h^F)$ (resp. $T_3(\omega^W, \bar{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet})$) les formes de torsion analytique sur S associées à (V, S, π_2) (resp. (W, S, π_3)).

Dans la suite, pour η un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur V , on note toujours $T_2(\omega^V, h^\eta)$ les formes de torsion analytique sur S associées à (V, S, π_2) . Si $(L^i)_{0 \leq i \leq n}$ est un complexe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur V , on note

$$(12.1) \quad T_2(\omega^V, h^L) = \sum_{i=0}^n (-1)^i T_2(\omega^V, h^{L^i}).$$

Soient $H(Z, \xi^\bullet|_Z), H(Y, F|_Y)$ les hypercohomologies de $(\mathcal{O}_Z(\xi^\bullet|_Z), v), (\mathcal{O}_Y(F|_Y), v)$. Soient $h^{H(Z, \xi^\bullet|_Z)}, h^{H(Y, F|_Y)}$ les métriques sur $H(Z, \xi^\bullet|_Z), H(Y, F|_Y)$ induites par $(g^{TZ}, h^{\xi^\bullet}), (g^{TY}, h^F)$ comme au paragraphe 11 a). Comme ξ^\bullet est une résolution π_{1*} et π_{3*} -acyclique de ξ sur W , on a :

$$(12.2) \quad H(Z, \xi^\bullet|_Z) = H(Y, F|_Y) = R^\bullet \pi_{3*} \xi.$$

En procédant comme aux paragraphes 4–9, on a dans $P^S/P^{S,0}$:

$$(12.3) \quad \begin{aligned} T_3(\omega^W, \bar{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet}) &= \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^{\xi^\bullet}) \\ &+ T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v, h^F) \\ &- \int_Z \widetilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi^\bullet, h^{\xi^\bullet}) \\ &+ \widetilde{\text{ch}}(R^\bullet \pi_{3*} \xi, h^{H(Y, F|_Y)}, h^{H(Z, \xi^\bullet|_Z)}). \end{aligned}$$

Pour le complexe $\xi^\bullet = (\xi^i)$, en utilisant les théorèmes 11.1 et 11.2, on a :

$$(12.4') \quad T_3(\omega^W, h^\xi) = - \int_Z \text{Td}(TZ, g^{TZ}) \tilde{\text{ch}}(\xi^\bullet, \xi, h^{\xi^\bullet}, h^\xi) \\ + T_3(\omega^W, \bar{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet}) \\ + \tilde{\text{ch}}(R^\bullet \pi_{3*} \xi, h^{H(Z, \xi^\bullet | Z)}, h^{R\pi_{3*} \xi})$$

dans $P^S/P^{S,0}$ et

$$(12.4'') \quad T_1(\omega^W, h^\xi) = T_1(\omega^W, h^{\xi^\bullet}) + \tilde{\text{ch}}(F, R^\bullet \pi_{1*} \xi, h^F, h^{R\pi_{1*} \xi}) \\ - \int_X \text{Td}(TX, g^{TX}) \tilde{\text{ch}}(\xi^\bullet, \xi, h^{\xi^\bullet}, h^\xi)$$

dans $P^V/P^{V,0}$.

D'après (3.2), (12.3) et (12.4), on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.5) \quad T_3(\omega^W, h^\xi) - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ = - \int_Z \tilde{\text{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \text{ch}(\xi, h^\xi) \\ + T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v, h^F) \\ + \tilde{\text{ch}}(R^\bullet \pi_{3*} \xi, h^{H(Y, F|Y)}, h^{R\pi_{3*} \xi}) \\ - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \tilde{\text{ch}}(F, R^\bullet \pi_{1*} \xi, h^F, h^{R\pi_{1*} \xi}).$$

Soit $'\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ la suite spectrale associée à \mathcal{F} filtré par $'F^p(\mathcal{F}) = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{F}^{p' \bullet}$. Alors pour $q > 0$, on a

$$(12.6) \quad '\mathcal{E}_1^{p,0}(\mathcal{F}) = F^p, \quad '\mathcal{E}_2^{p,0}(\mathcal{F}) = R^p \pi_{1*} \xi, \quad '\mathcal{E}_1^{p,q}(\mathcal{F}) = '\mathcal{E}_2^{p,q}(\mathcal{F}) = 0.$$

Pour le bicomplexe \mathcal{F} , d'après la définition 10.13, et (12.6), les suites spectrales $\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$, $'\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ dégénèrent en $\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$, $'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$, et on a :

$$(12.7) \quad \mathcal{E}_2(\mathcal{F}) = '\mathcal{E}_2(\mathcal{F}) = R^\bullet \pi_{1*} \xi.$$

On note $h^{\mathcal{E}_2(\mathcal{F})}$, $h^{'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})}$ les métriques sur $\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$, $'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$ induites par $h^{R\pi_{1*} \xi}$.

Par (10.25), pour $r = 0, 1$, on a

$$(12.8) \quad E_r(\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{E}_r(\mathcal{F})).$$

Soit $h^{\mathcal{F}} = \bigoplus_{p,q} h^{\mathcal{F}^{p,q}}$ une métrique hermitienne sur \mathcal{F} . Soit $h^{\mathcal{E}_r(\mathcal{F})}$ ($r = 0, 1$) la métrique sur $\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ induite par $h^{\mathcal{F}}$. Soient $h^{E(\mathcal{F})}$, $h^{H(Y, \mathcal{E}_1(\mathcal{F}))}$ les métriques sur $E(\mathcal{F})$, $E_1(\mathcal{F})$ induites par g^{TY} , $h^{\mathcal{F}}$, $h^{\mathcal{E}(\mathcal{F})}$.

Soient $H(Y, \mathcal{F}|_Y)$, $H(Y, 'E_1(\mathcal{F})|_Y)$ les hypercohomologies des complexes $(\mathcal{F}|_Y, v + \delta)$, $('E_1(\mathcal{F})|_Y, v)$ sur Y . Soit $h^{H(Y, \mathcal{F}|_Y)}$ la métrique sur $H(Y, \mathcal{F}|_Y)$ induite par $g^{TY}, h^{\mathcal{F}}$. On rappelle qu'on a

$$(12.9) \quad H(E(\mathcal{F})) = H(Y, \mathcal{F}|_Y) = H(Y, 'E_1(\mathcal{F})|_Y) = R^\bullet \pi_{3*} \xi.$$

En procédant comme dans la preuve du théorème 11.2, dans laquelle on remplace $\bar{\partial}^Y$ par $\bar{\partial}^Y + v$, on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.10) \quad T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v, h^F) = T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v + \delta, h^{\mathcal{F}}) - \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \tilde{\text{ch}}(\mathcal{F}, 'E_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^F) + \tilde{\text{ch}}(R^\bullet \pi_{3*} \xi, h^{H(Y, \mathcal{F}|_Y)}, h^{H(Y, \mathcal{F}|_Y)}).$$

Pour le complexe $(\mathcal{F}, v + \delta)$, par le théorème 11.1, on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.11) \quad T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v + \delta, h^{\mathcal{F}}) = T_2(\omega^V, h^{\mathcal{F}}) + \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Y, \mathcal{F}|_Y)}).$$

Pour le complexe (\mathcal{F}, v) , en utilisant les théorèmes 11.1, 11.2 et (12.8), on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.12) \quad T_2(\omega^V, h^{\mathcal{F}}) = \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \tilde{\text{ch}}(\mathcal{F}, E_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^{E_1(\mathcal{F})}) + T_2(\omega^V, h^{E_1(\mathcal{F})}) - \tilde{\text{ch}}(E(\mathcal{F}), E_1(\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Y, E_1(\mathcal{F}))}).$$

Pour le complexe $(E_1(\mathcal{F}), \delta)$, par les théorèmes 11.1 et 11.2, on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.13) \quad T_2(\omega^V, h^{E_1(\mathcal{F})}) = T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*} \xi}) - \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{F}), E_2, h^{H(Y, E_1(\mathcal{F}))}, h^{E_2}) + \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \tilde{\text{ch}}(E_1(\mathcal{F}), E_2(\mathcal{F}), h^{E_1(\mathcal{F})}, h^{R\pi_{1*} \xi}).$$

Par la définition 10.15, (12.10)–(12.13), on a dans $P^S/P^{S,0}$

$$(12.14) \quad T_2(\omega^V, \bar{\partial}^Y + v, h^F) = T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*} \xi}) + \tilde{\text{ch}}(E_2, H(Z, \xi|_Z), h^{E_2}, h^{H(Y, F|_Y)}) + \int_Y \text{Td}(TY, g^{TY}) \left[\sum_{i=0}^1 \tilde{\text{ch}}(E_i(\mathcal{F}), E_{i+1}(\mathcal{F}), h^{E_i(\mathcal{F})}, h^{E_{i+1}(\mathcal{F})}) - \tilde{\text{ch}}(\mathcal{F}, 'E_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^F) \right].$$

Par le théorème 10.7 et (12.7), on a dans $P^V/P^{V,0}$

$$(12.15) \quad \sum_{i=0}^1 \tilde{\text{ch}}(\mathcal{E}_i(\mathcal{F}), \mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F}), h^{\mathcal{E}_i(\mathcal{F})}, h^{\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F})}) \\ = \sum_{i=0}^1 \tilde{\text{ch}}(' \mathcal{E}_i(\mathcal{F}), ' \mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F}), h'^{\mathcal{E}_i(\mathcal{F})}, h'^{\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F})}).$$

De (12.5), (12.14) et (12.15), on tire le théorème 3.11. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [ABoP] ATIYAH (M.F.), BOTT (R.), PATODI (V.K.). — *On the heat equation and the Index Theorem*, Invent. Math., t. **19**, 1973, p. 279–330.
- [BaFM] BAUM (P.), FULTON (W.), MACPHERSON (R.). — *Riemann-Roch for singular varieties*, Publ. Math. IHES, t. **45**, 1975, p. 101–146.
- [BeGeV] BERLINE (N.), GETZLER (E.), VERGNE (M.). — *Heat kernels and the Dirac operator*. — Grundle Math. Wiss., **298**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- [BerB] BERTHOMIEU (A.), BISMUT (J.-M.). — *Quillen metric and higher analytic torsion forms*, J. Reine angew. Math., t. **457**, 1994, p. 85–184.
- [B1] BISMUT (J.-M.). — *The Index Theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs*, Invent. Math., t. **83**, 1986, p. 91–151.
- [B3] BISMUT (J.-M.). — *Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class*, J. Amer. Math. Soc., t. **3**, 1990, p. 159–256.
- [B4] BISMUT (J.-M.). — *Families of immersions, and higher analytic torsion*, Astérisque, **244**, 1997.
- [B5] BISMUT (J.-M.). — *Familles d'immersions et formes de torsion analytique en degré supérieur*, C.R.A.S. Paris, t. **320**, série I, 1995, p. 969–974.
- [BCh] BISMUT (J.-M.), CHEEGER (J.). — *η -invariants and their adiabatic limits*, J. Amer. Math. Soc., t. **2**, 1989, p. 33–70.
- [BGS1] BISMUT (J.-M.), GILLET (H.), SOULÉ (C.). — *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I*, Comm. Math. Phys., t. **115**, 1988, p. 49–78.
- [BGS2] BISMUT (J.-M.), GILLET (H.), SOULÉ (C.). — *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles II*, Comm. Math. Phys., t. **115**, 1988, p. 79–126.
- [BGS3] BISMUT (J.-M.), GILLET (H.), SOULÉ (C.). — *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles III*, Comm. Math. Phys., t. **115**, 1988, p. 301–351.

- [BKö] BISMUT (J.-M.), KÖHLER (K.). — *Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas*, J. Alg. Geom., t. **1**, 1992, p. 647–684.
- [BL] BISMUT (J.-M.), LEBEAU (G.). — *Complex immersions and Quillen metrics*, Publ. Math. IHES, **74**, 1991, p. 1–297.
- [BS] BOREL (A.), SERRE (J.-P.). — *Le théorème de Riemann-Roch*, Bull. Soc. Math. France, t. **86**, 1958, p. 97–136.
- [CE] CARTAN (H.), EILENBERG (S.). — *Homological Algebra*. — Princeton, 1956.
- [CP] CHARAZAIN (J.), PIRIOU (A.). — *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles*. — Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [D] DAI (X.). — *Adiabatic limits, non multiplicativity of signature and Leray spectral sequence*, J. Amer. Math. Soc., t. **4**, 1991, p. 265–321.
- [F] FALTINGS (G.). — *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, 1992.
- [Ge] GETZLER (E.). — *A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem*, Topology, t. **25**, 1986, p. 111–117.
- [GrH] GRIFFITHS (P.), HARRIS (J.). — *Principles of Algebraic Geometry*. — Wiley, New-York, 1978.
- [Grot] GROTHENDIECK (A.). — *Sur quelques points d’algèbre homologique*, Tôhoku Math. J., t. **9**, 1957, p. 119–221.
- [GS1] GILLET (H.), SOULÉ (C.). — *Analytic torsion and the arithmetic Todd genus*, Topology, t. **30**, 1991, p. 21–54.
- [GS2] GILLET (H.), SOULÉ (C.). — *An arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Invent.Math., t. **110**, 1992, p. 473–543.
- [KM] KNUDSEN (P.F.), MUMFORD (D.). — *The projectivity of the moduli space of stable curves I, Preliminaires on “det” and “div”*, Math. Scand., t. **39**, 1976, p. 19–55.
- [Ma] MA (Xiaonan). — *Formes de torsion analytique et familles de submersions*, C. R. Acad. Sciences Paris, t. **324**, série I, 1997, p. 205–210.
- [Ma1] MA (Xiaonan). — *Formes de torsion analytique et familles de submersions II*, à paraître.
- [MKS] MCKEAN (H.), SINGER (I.M.). — *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom., t. **1**, 1967, p. 43–69.
- [Q1] QUILLEN (D.). — *Higher K-theories I*, Springer Lecture Notes in Math., **341**, Springer, Berlin, 1973, p. 85–147.
- [Q2] QUILLEN (D.). — *Superconnections and the Chern character*, Topology, t. **24**, 1986, p. 89–95.
- [RS] RAY (D.B.), SINGER (I.M.). — *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math., t. **98**, 1973, p. 154–177.
- [T] TAYLOR (M.). — *Pseudodifferential operators*. — Princeton University Press, Princeton, 1981.